ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 1, № 2 (1997) с. 191–200

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 1, No 2 (1997) p. 191–200

СЛАБОРЕЛЯТИВІСТСЬКА СИСТЕМА ЗАРЯДЖЕНИХ СПІНОВИХ ЧАСТИНОК У ЗОВНІШНЬОМУ ЕЛЕКТРОМАГНЕТНОМУ ПОЛІ

Л. Блажиєвський, Ю. Криницький
Львівський державний університет імені Івана Франка, кафедра теоретичної фізики
Україна, UA–290005, Львів, вул. Драгоманова, 12
E-mail: yuri@ktf.franko.lviv.ua
(Отримано 31 березня 1997)

Розглядається слаборелятивістська система спінових заряджених частинок у зовнішньому електромагнетному полі. Окрім кулонівських і магнетних взаємодій враховані спін–спінові, спін–орбітальні та контактні взаємодії. Запропоновано "змішане" зображення статистичного оператора системи, яке має вигляд реґуляризованого інтеґралу за траєкторіями конфіґураційного простору для координатних ступенів вільності і звичайного експонентного оператора для спінових. У наближенні хаотичних фаз отримана слаборелятивістська функція Гамільтона. Встановлено ефект екранування взаємодії зарядів із зовнішнім магнетним полем. Розраховані термодинамічний потенціял системи та твірний функціонал для температурних функцій Ґріна. Результат використано для знаходження статичних діелектричної та магнетної проникностей. У граничних випадках абсолютного нуля температури та високих температур проведено аналіз ролі релятивістських кінематичних ефектів та релятивістських ефектів, що обумовлені спіновими взаємодіями.

Ключові слова: діелектрична проникність, магнетна проникність, слаборелятивістська плазма.

PACS number(s): 05.20.-y, 03.30.+p

I. ВСТУП

Добре відомо, що розрахунки багатьох макроскопічних характеристик (наприклад, діелектричної і магнетної проникностей, просторово–часових кореляцій, флюктуацій та інших) термодинамічних систем заряджених частинок базуються на вивченні реакції цих систем на незначні зовнішні збурення. Такі дослідження мають давню історію. Їх результати ввійшли в монографії та підручники. Вкажемо, зокрема, на [1, 2]. Однак, як правило, головна увага при цьому приділялась нерелятивістським аспектам теорії. Релятивістські системи вивчені менше. Зокрема, майже не досліджувався вплив на макроскопічні характеристики електронної плазми спінових та спін–орбітальних взаємодій. Водночас можна показати, що внески цих взаємодій у термодинамічні величини співмірні з внесками, обумовленими релятивістськими поправками до закону Кулона. Можна очікувати, що подібна ситуація матиме місце і при розрахунках функцій реакції.

У випадку статистичної рівноваги обчислення функцій реакцій можна звести до розрахунку певного твірного функціоналу, що має характер статистичної суми. Наприклад, температурні (мацубарівські) функції Ґріна деякої фізичної величини, яка описується шредінґерівським оператором $\hat{a}(r)$, отримуються функціональним диференціюванням виразу

$$\Xi[\rho] = \mathrm{Sp}\, T \exp\left(-\int_0^\beta d\tau [\widehat{H} + \rho(r,\tau)\hat{a}(r)] \right), \qquad (1.1)$$

де $\widehat{H}$ — оператор Гамільтона ситеми, β^{-1} — статистична температура, T — символ хронологічного впорядкування. Як бачимо, при незалежних від τ значеннях ρ (1.1) збігається зі статистичною сумою системи у зовнішньому полі. (Доданок $\rho(r)\hat{a}$ описує взаємодію системи з зовнішнім полем $\rho(r)$). У цій праці ми розрахуємо твірний функціонал та статистичну суму слаборелятивістського електронного газу в зовнішньому електромагнетному полі. Отримані результати будуть використані для визначення статичних діелектричної та магнетної проникностей.

II. СТАТИСТИЧНИЙ ОПЕРАТОР

Застосування канонічної схеми статистичної механіки при дослідженні слаборелятивістських систем суттєво ускладнюється нетривіяльністю переходу до гамільтонових змінних [3, 4]. Ми скористаємось функціональним формулюванням статистичної механіки, розвиненим у ряді праць, зокрема в [5]. У цьому формулюванні усі співвідношення теорії записуються в лаґранжевих змінних. Так статистичний оператор $\widehat{K}_N = e^{-\beta\widehat{H}}$ системи N безспінових частинок можна подати у вигляді континуального інтеґрала за траєкторіями конфіґураційного простору. А саме

$$\widehat{K}_N = \mathrm{reg}\; C^{3N} \int \mathcal{D}^{3N} u(\tau) e^{W[\mathbf{u}]} \prod_{j=1}^{N} \widehat{Q}_j[\mathbf{u}], \qquad (2.1)$$

$$W[\mathbf{u}] = \int_0^\beta d\tau L(i\mathbf{u}(\tau), \mathbf{x}(\tau)), \tag{2.2}$$

$$\widehat{Q}_j[\mathbf{u}] = \exp\left(-\hbar \int_0^\beta d\tau (\mathbf{u}_j(\tau), \boldsymbol{\nabla}_j)\right),$$

$$\mathcal{D}u(\tau) = \prod_{0\le\tau\le\beta} du(\tau), \quad -\infty \le u(\tau) \le +\infty,$$

$$C^{-1} = \int \mathcal{D}z(\tau) \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^\beta d\tau z^2(\tau)\right).$$

$L(i\mathbf{u}(\tau), \mathbf{x}(\tau))$ отримується з класичного лаґранжіяну системи, якщо в останньому швидкості частинок $\mathbf{v}_j$ замінити величинами $i\mathbf{u}_j(\tau)$ $(i^2 = -1)$, а координати $\mathbf{r}_j$ виразами

$$\mathbf{x}_j(\tau) = \mathbf{r}_j - \hbar \int_\tau^\beta d\tau' \mathbf{u}_j(\tau').$$

Тобто функціонал $W[\mathbf{u}]$ має зміст класичної дії у лагранжевих змінних для теорії з уявним часом $t = \hbar\beta/i$ (евклідової теорії). Символ “reg” означає, що результат обчислень потрібно реґуляризувати. Ця реґуляризація є розмірною і полягає у нехтуванні в кінцевих виразах доданками, пропорційними до $[\delta(0)]^n$ $(n = 1, 2, ..., \delta(\tau)$ — дельта–функція). Надалі ми не будемо виписувати цього символа, пам'ятаючи, однак, про необхідність проведення в кінцевих виразах (там, де це необхідно) вказаної реґуляризації.

Середнє значення деякої фізичної величини $A(\mathbf{v}, \mathbf{r})$, залежної від координат і швидкостей, визначається формулами

$$\langle A\rangle = \frac{1}{Z_N}\frac{\delta}{\delta\eta(\tau_0)}\widetilde{Z}_N\,|_{\eta=0}, \quad 0 \le \tau_0 \le \beta, \tag{2.3}$$

$$\widetilde{Z}_N = \int \mathcal{D}^{3N}u(\tau) \times \mathrm{Sp}\exp\left[W + \int_0^\beta d\tau\ \eta(\tau)A(iu(\tau), x(\tau))\right] \prod_j \widehat{Q}_j[u],$$

де Z_N — статистична сума.

Для систем частинок, взаємодія між якими залежить від спінових змінних, не існує такого зручного як (2.1) зображення статистичного оператора континуальним інтеґралом. Тому при врахуванні спінових взаємодій для спінових змінних будемо використовувати звичайний операторний формалізм. При цьому у формулі (2.1) множник $\exp W[\mathbf{u}]$ потрібно замінити Т — впорядкованою за спіновими змінними експонентою. Відповідно функціонал L в (2.2) матиме зміст лаґранжіяну за координатними ступенями вільності і оператора Гамільтона — за спіновими. У випадку слаборелятивістської системи заряджених частинок у зовнішньому полі його можна подати у вигляді

$$L = L_0 + L_{e-\text{м}} + L_{\text{сс}} + L_{\text{со}} + L_{\text{к}} + L_{\text{п}}. \tag{2.4}$$

Тут

$$L_0 = -\sum_j mc^2(1 + u_j^2/c^2)^{1/2} \tag{2.5}$$

— лаґранжіян вільних частинок (для нього зручно зберегти точну релятивістську форму), а інші доданки описують електромагнетні, спінові, спін–орбітальні та контактні взаємодії частинок та їх взаємодію з зовнішнім електромагнетним полем і визначаються формулами

$$\begin{aligned}
L_{\text{е}-\text{м}} &= -\frac{1}{2}\sum_{j\neq l}\sum_{\mathbf{k}}\frac{4\pi e^2}{Vk^2}e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}_{jl}}\left\{1 + \frac{1}{c^2}\left((\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_l) - \frac{1}{k^2}(\mathbf{k}, \mathbf{u}_j)(\mathbf{k}, \mathbf{u}_l)\right)\right\},\\
L_{\text{сс}} &= \frac{\pi}{2V}\left(\frac{e\hbar}{mc}\right)^2\sum_{j\neq l}\sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}_{jl}}\left\{(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_j, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_l) - \frac{1}{k^2}(\mathbf{k}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j)(\mathbf{k}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_l)\right\},\\
L_{\text{со}} &= -\frac{\hbar}{4mc^2}\sum_{j\neq l}\sum_{\mathbf{k}}\frac{4\pi e^2}{Vk^2}e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}_{jl}}\left\{(\mathbf{k}[\hat{\boldsymbol{\sigma}}_j, \mathbf{u}_j]) + (\mathbf{k}[\hat{\boldsymbol{\sigma}}_l, \vec{u}_j]) - (\mathbf{k}[\hat{\boldsymbol{\sigma}}_j, \vec{u}_l])\right\},\\
L_{\text{к}} &= \frac{\pi}{2V}\left(\frac{e\hbar}{mc}\right)^2\sum_{j\neq l}\sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}_{jl}},\\
L_{\text{п}} &= \frac{e}{V}\sum_j\sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}_j}\left\{\frac{i}{c}(\mathbf{u}_j, \mathbf{A}^0_{\mathbf{k}}) - \varphi^0_{\mathbf{k}} + \frac{\hbar^2k^2}{8m^2c^2}\varphi^0_{\mathbf{k}} + \frac{\hbar}{4mc^2}\varphi^0_{\mathbf{k}}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_j[\mathbf{k}, \mathbf{u}_j]) + \frac{i\hbar}{2mc}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_j[\mathbf{k}, \mathbf{A}^0_{\mathbf{k}}])\right\},
\end{aligned} \tag{2.6}$$

де $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_j$ — матриці Паулі, V — об'єм системи, $\phi^0_{\mathbf{k}}$ і $\mathbf{A}^0_{\mathbf{k}}$ — Фур'є–зображення скалярного і векторного потенціялів зовнішнього електромагнетного поля, інші позначення загальновживані.

З огляду на подальший перехід до польових змінних зручно формули (2.4)–(2.6) записати дещо інакше. Введемо позначення

$$\mathbf{X}_{\mathbf{k}}(\tau) = \sum_j e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}_j(\tau)}\mathbf{F}_{\mathbf{k}j}(\tau), \tag{2.7}$$

$$\mathbf{F}_{\mathbf{k}j}(\tau) = \frac{\mathbf{k}}{k}\left\{1 - \frac{\hbar^2k^2}{8m^2c^2} - \frac{\hbar}{4mc^2}(\mathbf{k}[\hat{\boldsymbol{\sigma}}_j, \mathbf{u}_j(\tau)])\right\} + \frac{1}{ck}\left\{[\mathbf{k}, \mathbf{u}_j(\tau)] + \frac{\hbar}{2m}[\mathbf{k}[\mathbf{k}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j]]\right\}, \tag{2.8}$$

$$\mathbf{R}^0_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi V}}\left\{[\mathbf{k}, \mathbf{A}^0_{\mathbf{k}}] + i\mathbf{k}\varphi^0_{\mathbf{k}}\right\}, \tag{2.9}$$

$$\nu_k^2 = \frac{4\pi e^2}{Vk^2}.$$

Оскільки у слаборелятивістському наближенні не враховуються члени, пропорційні $1/c^4$, то неважко переконатись, що співвідношення (2.4)–(2.6) матимуть вигляд

$$L = L_0 + L_1 + L_{\text{п}} + L',$$
$$L_1 = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}} \nu_k^2(\mathbf{X}_{\mathbf{k}}(\tau), \mathbf{X}_{-\mathbf{k}}(\tau)),$$
$$L_{\text{п}} = \sum_{\mathbf{k}} i\nu_k(\mathbf{X}_{\mathbf{k}}(\tau), \mathbf{R}^0_{-\mathbf{k}}), \tag{2.10}$$
$$L' = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}} \nu_k^2(\mathbf{F}_{\mathbf{k}j}(\tau), \mathbf{F}_{-\mathbf{k}j}(\tau)).$$

Доданок L' введений для компенсації членів самодії, що містяться в L_1 і яких немає у вихідних виразах (2.4)–(2.6). Використаємо тепер (2.10) у співвідношеннях (2.1),(2.2), і, щоб позбутись у показнику експоненти членів парної взаємодії, введемо в (2.1) додаткове інтеґрування. Для цього виразимо операторний співмножник в $\exp W$ через ґаусівський континуальний інтеґрал згідно з формулами

$$T_\sigma \exp\int_0^\beta d\tau \sum_{\mathbf{k}}\left\{\frac{1}{2}\nu_k^2(\mathbf{X}_{\mathbf{k}}(\tau), \mathbf{X}_{-\mathbf{k}}(\tau)) + i\nu_k(\mathbf{X}_{\mathbf{k}}(\tau), \mathbf{R}^0_{-\mathbf{k}})\right\}$$
$$= B\int \mathcal{D}\mathbf{R}_{\mathbf{k}}(\tau)e^{S[\mathbf{R}]}T_\sigma \exp\int_0^\beta d\tau\sum_{\mathbf{k}} i\nu_k(\mathbf{X}_{\mathbf{k}}(\tau), \mathbf{R}_{-\mathbf{k}}(\tau)),$$
$$S[\mathbf{R}] = \int_0^\beta d\tau \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}([\mathbf{R}_{\mathbf{k}}(\tau) - \mathbf{R}^0_{\mathbf{k}}]\cdot[\mathbf{R}_{-\mathbf{k}}(\tau) - \mathbf{R}^0_{-\mathbf{k}}]), \tag{2.11}$$

де $\mathcal{D}\mathbf{R}_{\mathbf{k}}(\tau) = \prod_\tau\prod_{\mathbf{k}} d\mathbf{R}_{\mathbf{k}}(\tau)$; змінна $\mathbf{R}_{\mathbf{k}}(\tau)$ є комплексною, причому $\mathbf{R}_{\pm\mathbf{k}} = \pm\mathbf{R}^c_{\mathbf{k}} + i\mathbf{R}^s_{\mathbf{k}}$; постійна B визначається з умови, щоб при $\mathbf{X}_{\mathbf{k}} = 0$ інтеґрал за $\mathbf{R}_{\mathbf{k}}(\tau)$ дорівнював одиниці. Тоді показник експоненти в (2.1) набере вигляду суми одночастинкових доданків. Неважко побачити, що завдяки цьому статистичний оператор системи N взаємодіючих частинок можемо зобразити наступним чином:

$$\widehat{K}_N = B\int D\mathbf{R}_{\mathbf{k}}(\tau)e^{S[\mathbf{R}]}\prod_{j=1}^N \widehat{K}_j[\mathbf{R}], \tag{2.12}$$

де $\widehat{K_j}[\mathbf{R}]$ має зміст статистичного оператора однієї частинки в нестаціонарному зовнішньому полі $\mathbf{R}_{\mathbf{k}}(\tau)$ і визначається формулами

$$\widehat{K_j}[\mathbf{R}] = C^3\int D\mathbf{u}_j(\tau)e^{W[\mathbf{u}_j]} \times \exp\left(-\hbar\int_0^\beta d\tau(\mathbf{u}_j(\tau), \boldsymbol{\nabla}_j)\right), \tag{2.13}$$

$$W[\mathbf{u}_j] = \int_0^\beta d\tau\left\{-mc^2\left(1 + \frac{u_j^2}{c^2}\right)^{1/2} + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\nu_k^2(\mathbf{F}_{\mathbf{k}j}(\tau), \mathbf{F}_{-\mathbf{k}j}(\tau)) + i\sum_{\mathbf{k}}\nu_k e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}_j(\tau)}(\mathbf{F}_{\mathbf{k}j}(\tau), \mathbf{R}_{\mathbf{k}}(\tau))\right\}. \tag{2.14}$$

Зображення статистичного оператора у вигляді

(2.12)–(2.14) характерне для польової теорії. Справді, останній доданок у формулі (2.14) описує взаємодію зарядів з деяким полем $\mathbf{R_k}(\tau)$. У цьому можна переконатись, якщо змінну інтеґрування $\mathbf{R_k}(\tau)$ виразити за допомогою співвідношення (2.9) через потенціяли $\mathbf{A_k}(\tau)$, $\varphi_{\mathbf{k}}(\tau)$. Неважко побачити, що тоді квадратичний за $\mathbf{R_k}(\tau)$ доданок у функціоналі (2.11) набере вигляду інтеґрала дії для статичних електричного і магнетного полів. Така структура виразів дає можливість вийти за межі постньютонівського наближення, коли уже потрібно враховувати самостійні польові ступені вільності у системі частинок. Для цього досить [6] замінити в (2.12) $S[\mathbf{R}]$ величиною

$$S^{'}[\mathbf{R}] = S[\mathbf{R}] +$$

$$\int_0^\beta d\tau \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{(\hbar ck)^2}\left[(\dot{\mathbf{R}}_{\mathbf{k}}, \dot{\mathbf{R}}_{-\mathbf{k}}) - \frac{(\mathbf{k}, \dot{\mathbf{R}}_{\mathbf{k}})(\mathbf{k}, \dot{\mathbf{R}}_{-\mathbf{k}})}{k^2}\right],$$

$\dot{\mathbf{R}}_{\mathbf{k}} \equiv \partial \mathbf{R_k}(\tau)/\partial\tau$. При $\mathbf{R}^0_{\mathbf{k}} = 0$ функціонал $S^{'}[\mathbf{R}]$ є інтеґралом дії вільного електромагнетного поля у теорії з уявним часом. Тоді, як показано в [6] на прикладі системи безспінових частинок, формула (2.12) збігається з відповідним релятивістським виразом. Замінивши у даному випадку в (2.12) $S[\mathbf{R}]$ на $S^{'}[\mathbf{R}]$, отримаємо деяке узагальнення формули для статистичного оператора на релятивістський випадок. Однак таке узагальнення є неповним, оскільки при цьому точно враховуються лише релятивістські кінематичні ефекти, ефекти запізнення взаємодії та магнетні взаємодії. Ефекти ж спінових взаємодій враховуються наближено.

При застосуваннях більш зручною є операторна форма співвідношень (2.12)–(2.14). Оскільки $W[\mathbf{u}_j]$ є одночастинковою дією, то перехід до канонічних змінних не ускладнюється врахуванням термодинамічної межі [4]. Неважко показати, що з точністю до $1/c^2$ включно одночастинковий гамільтоніян матиме вигляд

$$\widehat{H}_j(\mathbf{R}) = \widehat{H}_{0j} - i\sum_{\mathbf{k}} \nu_k e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j}(\mathbf{F_k}(\hat{\mathbf{p}}_j), \mathbf{R_k}(\tau))$$
$$- \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}} \nu_k^2(\mathbf{F_k}(\hat{\mathbf{p}}_j), \mathbf{F}_{-\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{p}}_j)) \qquad (2.15)$$
$$+ \frac{1}{2mc^2}\left(\sum_{\mathbf{k}} \nu_k^2 e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j}\left[\frac{\mathbf{k}}{k}, \mathbf{R_k}(\tau)\right]\right)^2,$$

де $\mathbf{F_k}(\hat{\mathbf{p}}_j)$ визначається формулою (2.8), якщо в ній $\mathbf{u}_j(\tau)$ замінити оператором $-i\hat{\mathbf{p}}_j/m$; H_{0j} — слаборелятивістський гамільтоніян вільної частинки. Тепер

$$\widehat{K}[\mathbf{R}] = T\exp\left(-\int_0^\beta d\tau \widehat{H}_j(\mathbf{R})\right).$$

Підставляючи це в (2.12), знаходимо

$$\widehat{K}_N = B\int \mathcal{D}\mathbf{R_k}(\tau) e^{S[\mathbf{R}]} \qquad (2.16)$$
$$\times T\exp\left(-\int_0^\beta d\tau \sum_{j=1}^N \widehat{H}_j(\mathbf{R})\right).$$

На закінчення відзначимо, що інтеґрали (2.12),(2.16) потрібно розуміти як реґуляризовані. Це обумовлено зміною порядку інтеґрування за $\mathbf{u}_j(\tau)$ і $\mathbf{R_k}(\tau)$, яка проводиться при їх одержанні.

III. ФУНКЦІЯ ГАМІЛЬТОНА

Співвідношення з попереднього розділу дають можливість знайти оператор Гамільтона $\widehat{H}$ слаборелятивістської системи заряджених частинок у зовнішньому електромагнетному полі. Справді, після обчислення континуального інтеґралу (2.16) ми повинні отримати звичайне зображення статистичного оператора $\widehat{K}_N = \exp(-\beta\widehat{H})$. Інтеґрал (2.16) ґаусівський. Однак його розрахунок суттєво ускладнений наявністю недіагональних за $\mathbf{R_k}(\tau)$ членів. Дійсно, як видно з (2.11),(2.15), залежна від змінних інтеґрування частина показника експоненти описується формулами

$$\int_0^\beta d\tau \left\{\frac{1}{2}\left\{\sum_{\mathbf{k}} \gamma^{\mu\nu}_{\mathbf{k}} R^\mu_{\mathbf{k}}(\tau) R^\nu_{-\mathbf{k}}(\tau)\right.\right.$$
$$\left.\left. - \sum_{\mathbf{k}} Y^\mu_{\mathbf{k}} R^\mu_{\mathbf{k}}(\tau)\right\} - \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}\neq\mathbf{k}'} \Psi_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}[\mathbf{R}]\right\},$$

$$\Psi_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}[\mathbf{R}] =$$
$$\frac{\nu_k\nu_{k'}}{2mc^2}\sum_j e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{r}_j}\left(\left[\frac{\mathbf{k}}{k}, \mathbf{R_k}\right]\cdot\left[\frac{\mathbf{k}'}{k'}, \mathbf{R}_{\mathbf{k}'}\right]\right),$$

$$\mathbf{Y_k} = \mathbf{R}^0_{\mathbf{k}} + i\nu_k\sum_j e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j}\mathbf{F_k}(\hat{\mathbf{p}}_j),$$

$$\gamma^{\mu\nu}_{\mathbf{k}} = \delta_{\mu\nu} + l^\perp_{\mu\nu}\frac{\kappa_c^2}{k^2}, \quad \kappa_c^2 = \frac{4\pi Ne^2}{Vmc^2},$$
$$l^\perp_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \equiv \delta_{\mu\nu} - l^\parallel_{\mu\nu}. \qquad (3.1)$$

За грецькими індексами, що повторюються, проводиться підсумовування від 1 до 3. При інтеґруванні недіагональні доданки $\Phi_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}[\mathbf{R}]$ можна розрахувати шляхом кумулянтних розвинень. Оскільки $\Phi_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}[\mathbf{R}] \sim 1/c^2$, то досить обмежитись лише внеском від першого кумулянта. Після простих, але дещо громіздких обчислень знайдемо

$$\widehat{K}_N = Je^{-\beta\widehat{H}}, \qquad J = B\int \mathcal{D}\mathbf{R}_{\mathbf{k}}(\tau)\exp\int_0^\beta d\tau\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\gamma_{\mathbf{k}}^{\mu\nu}R_{\mathbf{k}}^{\mu}(\tau)R_{-\mathbf{k}}^{\nu}(\tau). \tag{3.2}$$

Тут $\widehat{H}$ є шуканим гамільтоніяном. При цьому незалежна від поля частина $\widehat{H}$ (ми її не виписуємо) збігається з виразом, знайденим у [4] іншим методом, а доданки, що характеризують взаємодію зарядів з полем, описуються формулою

$$\widehat{H}_{\text{п}} = \frac{e}{V}\sum_{\mathbf{k},j}e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_j}\left\{1-\frac{\hbar^2k^2}{8m^2c^2}-\frac{\hbar}{4m^2c^2}k(\boldsymbol{\sigma}_j,\hat{\mathbf{p}}_j)\right\}\varphi_{\mathbf{k}}^0$$
$$-\frac{e}{2mcV}\sum_{\mathbf{k},j}e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_j}\left(1+\frac{\kappa_c^2}{k^2}\right)^{-1}\{(\mathbf{A}_{\mathbf{k}}^0,\hat{\mathbf{p}}_j)+i\hbar(\boldsymbol{\sigma}_j[\mathbf{k},\mathbf{A}_{\mathbf{k}}^0])\}+\frac{e^2}{2mc^2}\sum_j\left\{\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}\frac{\mathbf{A}_{\mathbf{k}}^0}{1+\kappa_c^2/k^2}e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_j}\right\}^2.$$

Як бачимо, взаємодія зарядів із зовнішнім магнетним полем, подібно до їх магнетних і частково спінових взаємодій між собою, є екранованою.

Розглянемо ще інтеґрал з (3.2). Неважко зауважити, що після заміни змінних $\mathbf{R}_{\mathbf{k}}^{\mu}(\tau)\to a_{\mathbf{k}}^{\mu\nu}\widetilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{k}}^{\nu}(\tau)$, де матриця $[a_{\mathbf{k}}]$ визначається з умови $[a_{\mathbf{k}}][\gamma_{\mathbf{k}}][a_{\mathbf{k}}^{-1}]=[I]$ ($[I]$ — одинична матриця), інтеґрал у нових змінних скорочується з нормуючою постійною B. Таким чином J збігається з якобіяном перетворення до нових змінних. Останній визначається за формулою

$$J=\prod_{0\le\tau\le\beta}\prod_{\mathbf{k}}det[a_{\mathbf{k}}]. \tag{3.3}$$

Безмежнократні добутки такого типу можна записати у показниковій формі, якщо використати рівність

$$\prod_{0\le\tau\le\beta}f(\tau)=\exp\left[\delta(0)\int_0^\beta d\tau\; lnf(\tau)\right].$$

Отже (3.3) є рядом за степенями $\delta(0)$. Реґуляризація, про яку йшлося раніше, передбачає віднімання виразів, що є пропорційними до $[\delta(0)]^n$. Тобто множник J в (3.2) потрібно замінити одиницею.

IV. СТАТИСТИЧНА СУМА І ТВІРНИЙ ФУНКЦІОНАЛ

Використаємо тепер результати попереднього розділу для обчислення статистичної суми. Для великого канонічного ансамблю вона виражається формулою

$$\Xi=\sum_{N\ge0}\frac{1}{N!}e^{\beta\mu N}\mathrm{Sp}\widehat{K}_N,$$

де μ — хемічний потенціял. Виразивши тут $\widehat{K}_N$ згідно з (2.16), отримаємо

$$\Xi=B\int\mathcal{D}\mathbf{R}_{\mathbf{k}}(\tau)e^{S[\mathbf{R}]}\Xi_0(\mathbf{R}), \tag{4.1}$$

$$\Xi_0(\mathbf{R})=\sum_{N\ge0}\frac{1}{N!}e^{\beta\mu N}\mathrm{Sp}\;T\exp\left(-\int_0^\beta d\tau\sum_j\widehat{H}_j(\mathbf{R})\right). \tag{4.2}$$

$\Xi_0(\mathbf{R})$ має зміст статистичної суми системи невзаємодіючих частинок у деякому фіктивному зовнішньому полі $\mathbf{R}_{\mathbf{k}}(\tau)$. Для її розрахунку зручно перейти до зображення вторинного квантування. У цьому зображенні $\Xi_0(\mathbf{R})$

набуває вигляду

$$\Xi_0(\mathbf{R}) = \mathrm{Sp}\; T \exp\left(-\int_0^\beta d\tau \left[\widehat{H}(\tau) - \mu\widehat{N}\right]\right).$$

Тут

$$\widehat{H}(\tau) = \sum_{\mathbf{p},s,\mathbf{p}^{'},s^{'}} < \mathbf{p}, s|\widehat{H}_j(\mathbf{R})|\mathbf{p}^{'}, s^{'} > a^{+}_{\mathbf{p},s} a_{\mathbf{p}^{'},s^{'}}, \qquad \widehat{N} = \sum_{\mathbf{p},s} a^{+}_{\mathbf{p},s} a_{\mathbf{p},s},$$

$a^{+}_{\mathbf{p},s}, a_{\mathbf{p},s}$ — оператори народження і знищення частинок у стані $\mathbf{p}, s$; матричні елементи одночастинкового гамільтоніяну описуються формулами

$$< \mathbf{p}, s|\widehat{H}_j(\mathbf{R})|\mathbf{p}^{'}, s^{'} >= \varepsilon_p \delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}^{'}} \delta_{s,s^{'}} + < \mathbf{p}, s|\widehat{H}^{'}_j(\mathbf{R})|\mathbf{p}^{'}, s^{'} >,$$

$$< \mathbf{p}, s|\widehat{H}^{'}_j(\mathbf{R})|\mathbf{p}^{'}, s^{'} >= -i \sum_{\mathbf{k}} \nu_k < s|\mathbf{R}_{\mathbf{k}}(\tau), \mathbf{F}_{\mathbf{k}}(\mathbf{p})|s^{'} > \delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}^{'}-\hbar\mathbf{k}}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}} \nu_k^2 < s|\mathbf{F}_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}), \mathbf{F}_{-\mathbf{k}}(\mathbf{p})|s^{'} > \delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}^{'}} \tag{4.3}$$

$$+\frac{1}{2mc^2}\sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}^{'}} \nu_k \nu_{k^{'}} \left(\left[\frac{\mathbf{k}}{k}, \mathbf{R}_{\mathbf{k}}(\tau)\right] \cdot \left[\frac{\mathbf{k}^{'}}{k^{'}}, \mathbf{R}_{\mathbf{k}^{'}}(\tau)\right]\right) \delta_{s,s^{'}} \delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}^{'}-\hbar(\mathbf{k}+\mathbf{k}^{'})},$$

$$\varepsilon_p = \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2}, \quad < s|(\ldots)|s^{'} >= \overline{W}(s)(\ldots)W(s^{'}),$$

$\delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}^{'}}$ — символ Кронекера, $W(s)$ — власні функції оператора спіну.

Розрахунок шпуру в (4.2) можна здійснити методом теорії збурень. Оскільки гамільтоніян $\widehat{H}(\tau)$ є квадратичним, то неважко виписати усі члени ряду. Після обчислень отримаємо

$$\Xi_0(\mathbf{R}) = \Xi_0^0 \exp\left(-\sum_{l\geq 1}\frac{1}{l}L_l\right), \tag{4.4}$$

$$L_{l\geq 2} = \int_0^\beta d\tau_1 \ldots \int_0^\beta d\tau_l \sum_{\mathbf{p}_1,s_1} \ldots \sum_{\mathbf{p}_l,s_l} G_{p_1}(\tau_l - \tau_1) G_{p_2}(\tau_1 - \tau_2) \ldots G_{p_l}(\tau_{l-1} - \tau_l)$$

$$\times < \mathbf{p}_1, s_1|\widehat{H}^{'}(\tau_1)|\mathbf{p}_2, s_2 >< \mathbf{p}_2, s_2|\widehat{H}^{'}(\tau_2)|\mathbf{p}_3, s_3 > \ldots < \mathbf{p}_l, s_l|\widehat{H}^{'}(\tau_l)|\mathbf{p}_1, s_1 >,$$

$$L_1 = \int_0^\beta d\tau \sum_{\mathbf{p},s} n_p < \mathbf{p}, s|\widehat{H}^{'}(\tau)|\mathbf{p}, s >,$$

$$G_p(\tau - \tau^{'}) = -e^{-(\tau-\tau^{'})(\varepsilon_p - \mu)}\{\theta(\tau - \tau^{'})(1 - n_p) - \theta(\tau^{'} - \tau)n_p\}.$$

Тут $G_p(\tau - \tau^{'})$ — одночастинкова температурна функція Ґріна системи невзаємодіючих частинок; n_p — розподіл Фермі–Дірака; Ξ_0^0 — велика статистична сума системи невзаємодіючих частинок.

Як бачимо, експонента від виразу (4.3) є складним рядом за степенями константи взаємодії. Ми обмежимось врахуванням лише перших його членів, пропорційних до ν_k^2. Ці члени містяться лише у L_1 і L_2. Лінійного за ν_k доданку враховувати непотрібно, оскільки внески від нього компенсуються фоновим зарядом, наявність якого повинна забезпечувати електродинамічну стійкість системи. З огляду на сказане знайдемо

$$ln\left(\frac{\Xi_0(\mathbf{R})}{\Xi_0^0}\right) = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\beta\nu_k^2\sum_{\mathbf{p}}\mathrm{Sp}(\mathbf{F_k}(\hat{\mathbf{p}}),\mathbf{F_{-k}}(\hat{\mathbf{p}}))n_p$$

$$+\int_0^\beta d\tau\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\nu_k^2\mathbf{R}_{\mathbf{k}}^\mu(\tau)\mathbf{R}_{-\mathbf{k}}^\nu(\tau)U_{\mathbf{k}}^{\mu\nu}$$

$$+\int_0^\beta d\tau\int_0^\beta d\tau'\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\nu_k^2\mathbf{R}_{\mathbf{k}}^\mu(\tau)\mathbf{R}_{-\mathbf{k}}^\nu(\tau')\widetilde{P}_{\mathbf{k}}^{\mu\nu}(\tau-\tau'),$$

$$\widetilde{P}_{\mathbf{k}}^{\mu\nu}(\tau-\tau') = \sum_{\mathbf{p}}Sp(F_{\mathbf{k}}^\mu(\hat{\mathbf{p}}),F_{-\mathbf{k}}^\nu(\hat{\mathbf{p}}))$$

$$\times G_p(\tau-\tau')G_{|\mathbf{p}-\hbar\mathbf{k}|}(\tau'-\tau), \tag{4.5}$$

$$U_{\mathbf{k}}^{\mu\nu} = \frac{1}{mc^2}l_{\mu\nu}^\perp\sum_{\mathbf{p},s}n_p,$$

операція “Sp” відноситься до спінових змінних. Підставляємо тепер (4.4) у (4.1). Врахувавши ще формулу (2.11), будемо мати

$$\Xi = \Xi_0^0\exp\left[\Phi+\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\int_0^\beta d\tau(\mathbf{R}_{\mathbf{k}}^0,\mathbf{R}_{-\mathbf{k}}^0)\right] \tag{4.6}$$

$$\times B\int\mathcal{D}\mathbf{R_k}(\tau)e^{\widetilde{S}[\mathbf{R}]},$$

$$\widetilde{S}[\mathbf{R}] = \int_0^\beta d\tau\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\gamma_{\mathbf{k}}^{\mu\nu}R_{\mathbf{k}}^\mu(\tau)R_{-\mathbf{k}}^\nu(\tau) \tag{4.7}$$

$$-\int_0^\beta d\tau\sum_{\mathbf{k}}(\mathbf{R_k}(\tau),\mathbf{R}_{-\mathbf{k}}^0)$$

$$+\int_0^\beta d\tau\int_0^\beta d\tau'\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\nu_k^2\widetilde{P}_{\mathbf{k}}^{\mu\nu}(\tau-\tau')R_{\mathbf{k}}^\mu(\tau)R_{-\mathbf{k}}^\nu(\tau'),$$

де

$$\gamma_{\mathbf{k}}^{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}+\nu_k^2U_{\mathbf{k}}^{\mu\nu}$$

а Φ визначається першим доданком формули (4.4). Як і в попередньому розділі для реґуляризації континуального інтеґралу потрібно провести заміну змінних $\gamma_{\mathbf{k}}^{\mu\nu}R_{\mathbf{k}}^\mu(\tau)R_{-\mathbf{k}}^\nu(\tau)\to(\mathbf{R_k}(\tau),\mathbf{R_k}(\tau))$ і прирівняти якобіян перетворення до одиниці. Після цього зручно перейти до змінних інтеґрування $\mathbf{R}_{\mathbf{k},n}$, покладаючи

$$\mathbf{R_k}(\tau) = \frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathbf{R}_{\mathbf{k},n}e^{i\omega_n\tau},\quad \omega_n = \frac{2\pi}{\beta}n.$$

Розрахуємо спочатку твірний функціонал, коли $\mathbf{R}_{\mathbf{k}}^0$ потрібно вважати функцією параметра τ. Тоді формула (4.7) набуває вигляду

$$\widetilde{S}[\mathbf{R}] = \frac{1}{\beta}\left\{\frac{1}{2}R_{\mathbf{k},n}^\mu R_{-\mathbf{k},-n}^\nu(\delta_{\mu\nu}+\nu_k^2[\gamma_{\mathbf{k}}^{-1}P_{\mathbf{k},n}]_{\mu\nu})\right.$$

$$\left.-R_{\mathbf{k},n}^\mu[\gamma_{\mathbf{k}}]_{\mu\nu}^{-1/2}R_{-\mathbf{k},-n}^{0,\nu}\right\},$$

де $\gamma_{\mathbf{k}}^{-1}$ — матриця, обернена до матриці $\gamma_{\mathbf{k}}^{\mu\nu}$,

$$P_{\mathbf{k},n}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\int_{-\beta}^\beta d\tau P_{\mathbf{k}}^{\mu\nu}(\tau)e^{-i\omega_n\tau}.$$

Після інтеґрування у (4.6) отримаємо

$$\frac{\Xi}{\Xi_0^0} = e^{-\beta(\Omega'+\widetilde{\Omega}'')}, \tag{4.8}$$

$$\Omega' = -\frac{1}{\beta}\Phi+\frac{1}{2\beta}\sum_{\mathbf{k},n}\ln\,\det|\delta_{\mu\nu}+\nu_k^2[\gamma_{\mathbf{k}}^{-1}P_{\mathbf{k},n}]_{\mu\nu}|, \tag{4.9}$$

$$\widetilde{\Omega}'' = -\frac{1}{2\beta^2}\sum_{\mathbf{k},n}R_{\mathbf{k},n}^{0,\mu}R_{-\mathbf{k},-n}^{0,\nu}\left(\delta_{\mu\nu}-[\gamma_{\mathbf{k}}+\nu_k^2P_{\mathbf{k},n}]_{\mu\nu}^{-1}\right).$$

Розглянемо ці співвідношення детальніше. Величини $\gamma_{\mathbf{k}}^{\mu\nu}, P_{\mathbf{k},n}^{\mu\nu}$ є тензорами другого рангу з компонентами, пропорційними лише до одиничного тензора $\delta_{\mu\nu}$ і до тензора $k_\mu k_\nu$. Тому їх можна подати як суперпозицію двох ортогональних тензорів $l_{\mu\nu}^{\|}$ (повздовжнього) і $l_{\mu\nu}^\perp$ (поперечного), які визначаються формулами (3.1). Тоді

$$\gamma_{\mathbf{k}}^{\mu\nu} = l_{\mu\nu}^{\|}\gamma_k^{\|}+l_{\mu\nu}^\perp\gamma_k^\perp,$$

$$\gamma_k^{\|} = l_{\mu\nu}^{\|}\gamma_{\mathbf{k}}^{\nu\mu},\quad \gamma_k^\perp = \frac{1}{2}l_{\mu\nu}^\perp\gamma_{\mathbf{k}}^{\nu\mu}.$$

Враховуючи (4.5),(4.7), отримуємо

$$\gamma_k^{\|} = 1,\quad \gamma_k^\perp = 1+\frac{\nu_k^2}{mc^2}\sum_{\mathbf{p},s}n_p.$$

В аналогічному вигляді записуємо і тензор $P_{\mathbf{k},n}^{\mu\nu}$. Після дещо громіздких розрахунків, на яких ми не будемо зупинятись, можна показати, що повздовжня і поперечна складові цього тензора визначаються формулами

$$P_{k,n}^{\|} = (1-\Lambda_k)\Pi_{k,n}^{\|},\quad P_{k,n}^\perp = \Pi_{k,n}^\perp-\Lambda_k\Pi_{k,n}^{\|}, \tag{4.10}$$

$$\Pi_{k,n}^{\|} = -2\sum_{\mathbf{p},s}\frac{\Delta\varepsilon n_p}{(\Delta\varepsilon)^2+\omega_n^2}, \tag{4.11}$$

$$\Pi^{\perp}_{k,n} = \frac{1}{m^2c^2}\sum_{\mathbf{p},s}\left(p^2 - \frac{(\mathbf{k},\mathbf{p})^2}{k^2}\right)\frac{\Delta\varepsilon n_p}{(\Delta\varepsilon)^2+\omega_n^2}, \tag{4.12}$$

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_p - \varepsilon_{|\mathbf{p}-\hbar\mathbf{k}|}, \quad \Lambda_k = \frac{\hbar^2k^2}{4m^2c^2}.$$

Тепер уже неважко побачити, що співвідношення (4.8),(4.9) набувають вигляду

$$\Omega^{'} = -\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\nu_k^2\sum_{\mathbf{p},s}n_p\left(1-\frac{1}{m^2c^2}\left[p^2-\frac{(\mathbf{k},\mathbf{p})^2}{k^2}\right]-3\Lambda_k\right)+\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k},n}ln(1+\nu_k^2P^{\|}_{k,n})+\sum_{\mathbf{k},n}ln\left(1+\nu_k^2\frac{P^{\perp}_{k,n}}{\gamma^{\perp}_k}\right), \tag{4.13}$$

$$\widetilde{\Omega}^{''} = -\frac{1}{8\pi V\beta^2}\sum_{\mathbf{k},n}|\varphi^0_{\mathbf{k},n}|^2k^2\left(1-\frac{1}{1+\nu_k^2P^{\|}_{k,n}}\right)+\frac{1}{8\pi V\beta^2}\sum_{\mathbf{k},n}|\mathbf{A}^0_{\mathbf{k},n}|^2k^2\left(1-\frac{1}{\gamma^{\perp}_k+\nu_k^2P^{\perp}_{k,n}}\right). \tag{4.14}$$

Ми врахували тут зв‘язок $\mathbf{R}^0_{\mathbf{k}}$ з потенціялами $\mathbf{A}^0_{\mathbf{k}}$, $\varphi^0_{\mathbf{k}}$.

Записані формули отримані в наближенні хаотичних фаз. $\Omega^{'}$ є поправкою на взаємодію до термодинамічного потенціялу виродженого слабoрелятивістського електронного газу. Члени, що пропорційні до множника Λ_k, обумовлені врахуванням спінових, спін–орбітальних та контактних взаємодій (див. (2.6)). $\widetilde{\Omega}^{''}$ характеризує реакцію системи на зовнішнє електромагнетне збурення. Функціональним диференціюванням цього виразу можна отримати функції Ґріна, просторово–часові кореляційні функції, діелектричну і магнетну проникності. Накінець, з (4.14) легко отримуємо поправку до термодинамічного потенціялу заряджених частинок у зовнішніх неоднорідних статичних полях. У цьому випадку слід покласти $\mathbf{R}^0_{\mathbf{k},n} = \mathbf{R}^0_{\mathbf{k}}\beta\delta_{n,0}$, $\mathbf{A}^0_{\mathbf{k},n} = \mathbf{A}^0_{\mathbf{k}}\beta\delta_{n,0}$, $\varphi^0_{\mathbf{k},n} = \varphi^0_{\mathbf{k}}\beta\delta_{n,0}$.

V. ДІЕЛЕКТРИЧНА І МАГНЕТНА ПРОНИКНОСТІ

Використаємо отримані вище результати для обчислення діелектричної (ε) і магнетної (μ) проникностей. Звернемо перш за все увагу на те, що при врахуванні спінових взаємодій рівняння макроскопічної електродинаміки дещо відрізняються від звичайних рівнянь Максвелла. Справді, як неважко побачити з останнього співвідношення (2.6), лаґранжіян взаємодії спінових заряджених частинок з електромагнетним полем можна описати формулами

$$\mathcal{L} = \int d^3r\left\{\frac{1}{c}(\mathbf{A}(\mathbf{r},t),\widetilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t)) - \varphi(\mathbf{r},t)\widetilde{\rho}(\mathbf{r},t)\right\},$$

$$\widetilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t) = \mathbf{j}(\mathbf{r},t) + c\ \mathrm{rot}\ \widehat{\mathbf{m}}(\mathbf{r},t),$$

$$\widetilde{\rho}(\mathbf{r},t) = \rho(\mathbf{r},t) + \frac{\hbar^2}{8m^2c^2}\Delta\rho(\mathbf{r},t) - \frac{1}{2}\mathrm{div}\ \widehat{\mathbf{d}}(\mathbf{r},t),$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = e\sum_l \mathbf{v}_l\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_l),$$

$$\rho(\mathbf{r},t) = e\sum_l \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_l),$$

$$\widehat{\mathbf{m}}(\mathbf{r},t) = \frac{e\hbar}{2mc}\sum_l \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_l\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_l),$$

$$\widehat{\mathbf{d}}(\mathbf{r},t) = \frac{e\hbar}{2mc^2}\sum_l [\mathbf{v}_l,\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_l]\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_l).$$

Тут $\rho(\mathbf{r},t)$ і $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ — густини електричних заряду і струму; $\widehat{\mathbf{m}}(\mathbf{r},t)$ — оператор густини магнетного моменту; $\widehat{\mathbf{d}}(\mathbf{r},t)$ — оператор густини електричного дипольного моменту, індукованого рухом магнетних моментів.

Введені таким чином величини $\widetilde{\rho}(\mathbf{r},t)$ і $\widetilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t)$ відіграють роль джерел мікроскопічного поля. Макроскопічні рівняння отримують усередненням відповідних мікроскопічних співвідношень. У загальному випадку при наявності зовнішніх джерел ρ^0 і $\mathbf{j}^0$ знайдемо

$$\begin{aligned} &\mathrm{div}\mathbf{E} = 4\pi(\rho^0 + \langle\widetilde{\rho}(\mathbf{r},t)\rangle_t),\\ &\mathrm{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}^0 + \langle\widetilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r},t)\rangle_t),\\ &\mathrm{div}\mathbf{B} = 0, \quad \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

де $\mathbf{E}$ і $\mathbf{B}$ — напруженість електричного й індукція магнетного полів; символ $\langle\cdots\rangle_t$ означає статистичне усереднення в момент часу t. Якщо означити індукцію $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$ електричного і напруженість $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ магнетного полів формулами

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t)=\int_{-\infty}^{t}dt'\int d^3r'\ \varepsilon(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|,t-t')\mathbf{E}(\mathbf{r}',t'),$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\int_{-\infty}^{t}dt'\int d^3r'\ \mu(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|,t-t')\mathbf{H}(\mathbf{r}',t'),$$

то двом першим рівнянням з (5.1) можна надати традиційного вигляду

$$\mathrm{div}\mathbf{D}=4\pi\rho^0, \tag{5.2}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}^0.$$

Введені таким способом функції ε і μ характеризують реакцію середовища на зовнішнє збурення. Мікроскопічна теорія для їх розрахунку базується на співставленні двох форм рівнянь — (5.1) і (5.2). Ми обмежимось тут лише статичним наближенням. Зручно перейти до зображення Фур'є. Тоді з (5.1)–(5.2) знайдемо, що $i(\mathbf{k},\mathbf{E}_\mathbf{k})=4\pi(\rho^0_\mathbf{k}+\langle\widetilde{\rho}_\mathbf{k}\rangle)$, $\mathbf{D}_\mathbf{k}=\varepsilon(\mathbf{k})\mathbf{E}_\mathbf{k}$, $i(\mathbf{k},\mathbf{D}_\mathbf{k})=4\pi\rho^0_\mathbf{k}$. Звідси можна визначити $\varepsilon(\mathbf{k})$. Врахувавши що $\rho^0_\mathbf{k}$ зв'язане з скалярним потенціялом $\varphi^0_\mathbf{k}$ зовнішнього поля співвідношенням $k^2\varphi^0_\mathbf{k}=4\pi\rho^0_\mathbf{k}$, отримаємо

$$\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k})}-1=\frac{4\pi}{k^2}\frac{\partial}{\partial\varphi^0_\mathbf{k}}\langle\widetilde{\rho}_\mathbf{k}\rangle.$$

Аналогічно, використавши магнетостатичні співвідношення, будемо мати

$$\mu(\mathbf{k})-1=\frac{4\pi}{3ck^2}\frac{\partial}{\partial\mathbf{A}^0_\mathbf{k}}\langle\widetilde{\mathbf{j}}_\mathbf{k}\rangle.$$

У цих співвідношеннях усереднення проводиться за рівноважним розподілом. Приймаючи до уваги формули (2.3), (2.6) і результати попереднього розділу, неважко побачити, що ці середні визначаються першими похідними за $\varphi^0_\mathbf{k}$, $\mathbf{A}^0_\mathbf{k}$ від термодинамічного потенціялу. А саме

$$\langle\widetilde{\rho}_\mathbf{k}\rangle=-V\frac{\partial\Omega''}{\partial\varphi^0_{-\mathbf{k}}},\quad \langle\widetilde{\mathbf{j}}_\mathbf{k}\rangle=-V\frac{\partial\Omega''}{\partial\mathbf{A}^0_{-\mathbf{k}}},$$

де Ω'' визначається формулою (4.14). Після розрахунків знайдемо

$$\varepsilon(\mathbf{k})=1+\nu_k^2(1-\Lambda_k)\Pi^{\parallel}_{k,0}, \tag{5.3}$$

$$\mu^{-1}(\mathbf{k})=1+\nu_k^2\left[\frac{1}{mc^2}\sum_{\mathbf{p},s}n_\mathbf{p}+\Pi^{\perp}_{k,0}-\Lambda_k\Pi^{\parallel}_{k,0}\right].$$

Розглянемо тепер детальніше першу з цих формул у двох часткових випадках.

1. При нульовій температурі $\Pi^{\parallel}_{k,0}$ визначається (як це видно з (4.10)) формулою

$$\Pi^{\parallel}_{k,0}=4\sum_{|\mathbf{p}|<\hbar k_0}(\varepsilon_{\mathbf{p}-\hbar\mathbf{k}}-\varepsilon_\mathbf{p})^{-1},$$

де максимальний імпульс $\hbar\mathbf{k}_0$ зв'язаний з хемічним потенціялом μ співвідношенням

$$\frac{\hbar^2k_0^2}{2m}-\frac{1}{2mc^2}\left(\frac{\hbar^2k_0^2}{2m}\right)^2=\mu.$$

Провівши обчислення, отримаємо

$$\Pi^{\parallel}_{k,0}=V\frac{mk_0}{4\pi^2\hbar^2}\left\{\Phi_0(x)+\left(\frac{\hbar k_0}{mc}\right)^2\Phi_1(x)\right\},$$

$$\Phi_0(x)=1+\frac{1-x^2}{2x}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|,\quad x=\frac{k}{2k_0},$$

$$\Phi_1(x)=\frac{3+x^2}{4}+\frac{1-x^4}{8x}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|.$$

Формула для $\varepsilon(\mathbf{k})$ набуває вигляду

$$\varepsilon(\mathbf{k})-1=$$

$$\frac{\kappa_0^2}{k^2}\left\{\Phi_0(x)+\left(\frac{\hbar k_0}{mc}\right)^2[\Phi_1(x)-x^2\Phi_0(x)]\right\}, \tag{5.4}$$

$$\kappa_0^2=\frac{2e^2mk_0}{\pi\hbar^2}.$$

2. У випадку високих температур можна знехтувати ефектами статистичного виродження, використавши в (4.10) слаборелятивістський розподіл Максвелла. Тоді матимемо

$$\varepsilon(\mathbf{k})-1= \tag{5.5}$$

$$\frac{\kappa^2}{k^2}\left\{\Psi_0(y)+\frac{1}{\beta mc^2}[\Psi_1(y)-2y^2\Psi_0(y)]\right\},$$

$$\Psi_0(y)=\frac{1}{2y^2}\varphi(y),$$

$$\Psi_1(y)=\left(\frac{1}{y^2}+1+\frac{y^2}{4}\right)\varphi(y)-\frac{1}{8}(1+2y^2),$$

$$\varphi(y)=2ye^{-y^2}\int_0^y d\eta\ e^{\eta^2}.$$

Тут $y^2=\beta\frac{\hbar^2k^2}{8m}=\frac{3}{32\pi}(\lambda k)^2$, λ — довжина теплової хвилі де Бройля, κ^{-1} — радіус екранування кулонівської ваємодії ($\kappa^2 = 4\pi e^2 e^{\beta\mu} Z_1^0/V$, Z_1^0 — статистична сума вільної частинки).

Перші доданки у правому боці співвідношень (5.4), (5.5) мають звичайний нерелятивістський вигляд. Два інші є релятивістськими поправками до діелектричної проникності. Причому, доданки, що є пропорційними до $\Phi_1(x)$ та $\Psi_1(y)$, описують кінематичні релятивістські ефекти, обумовлені залежністю маси від швидкості, а доданки $-x^2\Phi_0(x)$ та $-2y^2\Psi_0(y)$ характеризують внески від спінових взаємодій. На рисунках 1, 2 приведені графіки функцій Φ_1, $-x^2\Phi_0$, $\Phi_1 - x^2\Phi_0$ та Ψ_1, $-2y^2\Psi_0$, $\Psi_1 - 2y^2\Psi_0$ (відповідно криві 1, 2, 3 та 4, 5, 6).

Як видно, при великих значеннях хвильового вектора **k** внески від кінематичних і спінових ефектів, що є майже однаковими за абсолютними величинами, взаємно погашуються. Тобто, на малих віддалях між частинками релятивістські кінематичні ефекти компенсуються спіновими ефектами. На великих віддалях ($x << 1, y << 1$) інтенсивність спінових взаємодій спадає і переважаючими є кінематичні ефекти. Відзначимо, що подібне зменшення сумарної релятивістської поправки при врахуванні спінових взаємодій є характерним і для термодинамічних величин (середньої енергії, хемічного потенціялу, тиску та ін.).

На закінчення відзначимо, що при $\Lambda_k = 0$ (це відповідає виключенню спінових взаємодій) формула (5.3) для діелектричної проникності збігається з релятивістським виразом, отриманим у [1], якщо у (4.10) використати релятивістський розподіл.

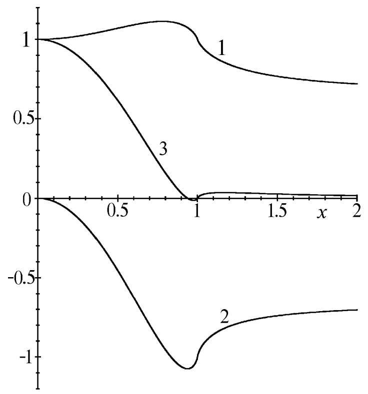

Рис. 1.

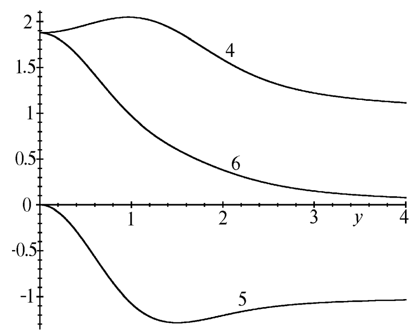

Рис. 2.

[1] А. Г. Ситенко, *Электромагнитные флуктуации в плазме* (Изд-во Харьк. ун-та, Харьков, 1965).
[2] Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика* (Наука, Москва, 1979).
[3] Б. А. Трубников, В. В. Косачев, ЖЭТФ **54**, 941 (1968).
[4] Л. Ф. Блажиєвський, Г. Б. Гіль, С. С. Семак, Журн. фіз. досл. **1**, 1 (1996).
[5] Л. Ф. Блажиевский, Теорет. и матем. физика **66**, 409 (1986).
[6] L. F. Blazhyjevskii, Cond. Matt. Phys. (Lviv) No 6, 23 (1995).

THE WEAKLY RELATIVISTIC SYSTEM OF CHARGED PARTICLES WITH SPINS IN THE EXTERNAL ELECTROMAGNETIC FIELD

L. Blazhievsky, Yu. Krynytskyi
Ivan Franko Lviv State University, Chair of Theoretical Physics
12 Drahomanov Str., Lviv, UA–290005, Ukraine
E-mail: yuri@ktf.franko.lviv.ua

The weakly relativistic system of charged particles with spins in the external electromagnetic field is considered. Besides Coulomb and magnetic interactions, the spin–spin, spin–orbital and contact interactions are also taken into account. A "mixed" representation of the statistical operator in the form of a regularized path integral for coordinate degrees of freedom and simple exponent operator for spin degrees of freedom is proposed. The weakly relativistic Hamilton function is obtained in random phase approximation. The screening of the interaction of charges by the magnetic field is proved. The thermodynamical potential of the system and generating functional for the temperature Green function is calculated. These results are used for obtaining static dielectric and magnetic permitivities. The analysis of the role of relativistic kinematic and relativistic spin effects is carried out in the limits of absolute zero and high temperatures.