ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
т. 2, № 3 (1998) с. 283–289 v. 2, No. 3 (1998) p. 283–289

ПРО КАЛІБРУВАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ У КЛАСИЧНІЙ МЕХАНІЦІ

В. І. Третяк
Інститут фізики конденсованих систем НАН України,
вул. Свєнціцького, 1, Львів, 290011, Україна
(Отримано 3 листопада 1997 р.; в остаточному вигляді 26 травня 1998 р.)

Для класичної механічної системи з n ступенями вільности запропоновано правило побудови лаґранжіяна, що забезпечує калібрувальну інваріянтність відносно довільної групи Лі.

Ключові слова: калібрувальна інваріянтність, лаґранжева механіка, квазікоординати.

PACS number(s): 03.20.+i; 11.15.–q; 11.30.–j

I. ВСТУП

Калібрувальна теорія поля є наріжним каменем сьогочасної теоретичної фізики. Загальноприйнятим є уявлення, що всі фундаментальні взаємодії зумовлені калібрувальною інваріянтністю відносно певних груп ($U(1)$ у випадку електродинаміки, $U(1)\times SU(2)$ для об'єднаної теорії електрослабкої взаємодії, $SU(3)$ для сильної взаємодії). Вражаючі успіхи, досягнуті в останні десятиліття на шляху уніфікованого опису всіх відомих взаємодій, значною мірою зумовлені винятковою нетривіяльністю і гнучкістю відповідного математичного апарату та глибоким взаємопроникненням чисто математичних і фізичних концепцій. Тому дослідження структур, пов'язаних з різними аспектами калібрувальної інваріянтности, становить актуальну проблему як з огляду опрацювання загальних формальних методів, так і для ліпшого розуміння їхнього фізичного статусу.

У класичній теорії поля добре опрацьовано стандартний спосіб досягнення інваріянтности відносно локальних перетворень, для яких інфінітезимальні параметри є функціями точки бази M волокнистої в'язки (fiber bundle) $\pi:\mathrm{E}\to\mathrm{M}$ (звичайно такою базою служить простір Мінковського $\mathrm{M}=\mathbb{M}_4$) [1–3]. Нехай перерізи в'язки π описуються функціями $\varphi^A(x)$, $x\in\mathrm{M}$, $A=1,\dots,k=\dim\mathrm{E}-\dim\mathrm{M}$, а динаміка відповідної фізичної системи — густиною лаґранжіяна $\mathcal{L}(\varphi^A(x),\partial_\mu\varphi^A(x))$, $\partial_\mu\equiv\partial/\partial x^\mu$, $\mu=1,\dots,\dim\mathrm{M}$, інваріянтною відносно r–параметричної групи Лі $\mathcal{G}_r$, яка діє на поля $\varphi^A(x)$ лінійним чином:

$$\varphi^A(x)\mapsto\varphi^A(x)+\epsilon^\alpha(T_\alpha)^A_B\varphi^B(x),\qquad \alpha=1,\dots,r. \tag{1.1}$$

Тут ϵ^α — інфінітезимальні дійсні параметри, T_α — матриці k–вимірного зображення (можливо, звідного) алгебри Лі групи $\mathcal{G}_r$, які задовольняють комутаційні співвідношення

$$[T_\alpha,T_\beta]=c^\gamma_{\alpha\beta}T_\gamma,\qquad \alpha,\beta,\gamma=1,\dots,r, \tag{1.2}$$

зі структурними константами $c^\gamma_{\alpha\beta}$. За індексами, що повторюються, розуміють підсумовування.

Інваріянтности відносно локальних (або калібрувальних) перетворень із заміною в (1.1) параметрів ϵ^α довільними функціями $\epsilon^\alpha(x)$ досягають уведенням калібрувальних полів $A^\alpha_\mu(x)$ та переходом від $\mathcal{L}(\varphi^A(x),\partial_\mu\varphi^A(x))$ до

$$\mathcal{L}_g=\mathcal{L}(\varphi^A(x),\mathcal{D}_\mu\varphi^A(x))-\frac14 G^\alpha_{\mu\nu}G^{\mu\nu}_\alpha, \tag{1.3}$$

де коваріянтна похідна $\mathcal{D}_\mu$ означена співвідношенням

$$\mathcal{D}_\mu\varphi^A(x)\equiv\partial_\mu\varphi^A(x)-g(T_\alpha)^A_BA^\alpha_\mu(x)\varphi^B(x); \tag{1.4}$$

$$G^\alpha_{\mu\nu}\equiv\partial_\mu A^\alpha_\nu-\partial_\nu A^\alpha_\mu-gc^\gamma_{\alpha\beta}A^\beta_\mu A^\gamma_\nu \tag{1.5}$$

і g — довільна стала. Трансформаційні властивості калібрувальних полів $A^\alpha_\mu(x)$ постулюють у вигляді

$$A^\alpha_\mu(x)\mapsto A^\alpha_\mu(x)+\epsilon^\gamma(x)c^\alpha_{\gamma\beta}A^\beta_\mu(x)+g^{-1}\partial_\mu\epsilon^\alpha(x). \tag{1.6}$$

Цікаво розглянути аналогічну проблему в рамках класичної механіки. Тут базовий многовид $\mathrm{M}=\mathbb{R}$ одновимірний, що значно спрощує ситуацію, дозволяючи "проінтеґрувати" співвідношення (1.6), позбуваючись члена з $\partial_\mu\epsilon^\alpha(x)$. Поряд з тим у цьому випадку порівняно легко розглянути довільну дію групи $\mathcal{G}_r$ у тотальному просторі E в'язки π, включаючи (не обов'язково лінійні) перетворення, що діють на базі й навіть перемішують базу і шари. Зауважимо, що в теорії поля розгляд як калібрувальної групи перетворень бази — конкретно групи Пуанкаре — необхідний елемент побудови калібрувальної теорії тяжіння [4].

II. УМОВИ КАЛІБРУВАЛЬНОЇ ІНВАРІЯНТНОСТИ

Розглянемо лаґранжеву динамічну систему $(\pi,L,\mathcal{G}_r)$, де:

$\pi:\mathrm{E}\to\mathbb{R}$ — (тривіяльна) волокниста в'язка, перерізи якої описують рухи цієї системи;

$L : J^1\pi \to \mathbb{R}$ — функція Лаґранжа, задана на 1–джеті $J^1\pi$ в'язки π;

$\mathcal{G}_r$ — група симетрії системи.

Нехай (t, x^i), $i = 1, \ldots, \dim \mathrm{E} - 1$, — локальні координати в E; $(t, x^i, \dot{x}^i)$ — координати в $J^1\pi$, так що локально $L = L(t, x, \dot{x})$, а дія групи $\mathcal{G}_r$ в E має вигляд (інфінітезимально)

$$t \mapsto t + \epsilon^\alpha \eta_\alpha(t, x) + o(\epsilon),$$
$$x^i \mapsto x^i + \epsilon^\alpha \zeta^i_\alpha(t, x) + o(\epsilon); \qquad \alpha = 1, \ldots, r. \tag{2.1}$$

(див. [5–7]). Векторні поля на E

$$\mathcal{X}_\alpha = \eta_\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \zeta^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{2.2}$$

задовольняють комутаційні співвідношення алгебри Лі групи $\mathcal{G}_r$,

$$[\mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_\beta] = c^\gamma_{\alpha\beta} \mathcal{X}_\gamma. \tag{2.3}$$

Це означає,що функції $\eta_\alpha, \zeta^i_\alpha$ задовольняють систему рівнянь

$$\mathcal{X}_\alpha \eta_\beta - \mathcal{X}_\beta \eta_\alpha = c^\gamma_{\alpha\beta} \eta_\gamma,$$
$$\mathcal{X}_\alpha \zeta^i_\beta - \mathcal{X}_\beta \zeta^i_\alpha = c^\gamma_{\alpha\beta} \zeta^i_\gamma. \tag{2.4}$$

Навпаки, кожен розв'язок цієї системи дає змогу побудувати скінченне перетворення

$$t \mapsto t'(t, x, \epsilon) \equiv \exp(\epsilon^\alpha \mathcal{X}_\alpha) t, \tag{2.5}$$
$$x^i \mapsto x^{i'}(t, x, \epsilon) \equiv \exp(\epsilon^\alpha \mathcal{X}_\alpha) x^i,$$

яке для малих ϵ матиме вигляд (2.1) [7, 8].

Векторні поля $\mathcal{X}_\alpha$ можна стандартним чином продовжити на $J^1\pi$:

$$X_\alpha = \mathcal{X}_\alpha + (D\zeta^i_\alpha - v^i D\eta_\alpha) \frac{\partial}{\partial v^i}, \tag{2.6}$$

де $v^i \equiv \dot{x}^i$ та

$$D \equiv \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{2.7}$$

Поля X_α задовольняють ті ж комутаційні співвідношення, що й $\mathcal{X}_\alpha$. Умови симетрії лаґранжевого опису відносно групи $\mathcal{G}_r$ виражаються системою диференційних рівнянь першого порядку на функцію Лаґранжа L [6, 8]:

$$X_\alpha L + L D\eta_\alpha = 0. \tag{2.8}$$

Якщо тепер уважати, що параметри ϵ^α в перетвореннях (2.1) залежать від t, $\epsilon^\alpha = \epsilon^\alpha(t)$, то умов (2.8) уже не досить для забезпечення інваріянтности лаґранжевого опису: вирази, що визначають зміну форми Ldt, будуть у цьому випадку поряд з $\epsilon^\alpha(t)$ містити члени, пропорційні до $\dot{\epsilon}^\alpha = d\epsilon^\alpha/dt$. Прирівнювання останніх до нуля дасть додаткові співвідношення виду

$$Y_\alpha L + L\eta_\alpha = 0, \tag{2.9}$$

де

$$Y_\alpha = (\zeta^i_\alpha - v^i \eta_\alpha) \frac{\partial}{\partial v^i}. \tag{2.10}$$

III. РОЗВ'ЯЗОК УМОВ ІНВАРІЯНТНОСТИ

Спробуймо задовольнити r додаткових співвідношень (2.9) уведенням у лаґранжіян r нових змінних λ^α, $\alpha = 1, \ldots, r$. Таким чином, замість $\pi : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ ми розглядаємо в'язку $\pi' : \mathrm{E}' \to \mathbb{R}$ з $\dim \mathrm{E}' = \dim \mathrm{E} + r$, замість L — лаґранжіян $L' : J^1\pi' \to \mathbb{R}$, заданий на 1–джеті в'язки π'. Якщо (t, x^i, λ^α) — локальні координати в E', то $(t, x^i, v^i, \lambda^\alpha, \dot{\lambda}^\alpha)$ позначатимуть локальні координати в $J^1\pi'$; і дія групи $\mathcal{G}_r$ в E' визначатиметься поряд з формулами (2.1) ще й трансформаційними властивостями змінних λ^α:

$$\lambda^\alpha \mapsto \lambda^\alpha + \epsilon^\beta \sigma^\alpha_\beta(t, x, \lambda) + o(\epsilon), \tag{3.1}$$

де $\sigma^\alpha_\beta(t, x, \lambda)$ — деякі функції, що будуть визначені нижче.

Базу алгебри Лі групи $\mathcal{G}_r$ у модулі векторних полів на E' задаватимуть поля

$$\mathcal{X}'_\alpha = \mathcal{X}_\alpha + \sigma^\alpha_\beta \frac{\partial}{\partial \lambda^\beta}. \tag{3.2}$$

Прийнявши, що

$$\sigma^\alpha_\beta(t, x, \lambda) = \sigma^\alpha_\beta(\lambda), \tag{3.3}$$

отримаємо, що для виконання комутаційних співвідношень (2.3) для полів $\mathcal{X}'_\alpha$ ці функції повинні задовольняти співвідношення

$$\sigma^\gamma_\alpha \frac{\partial \sigma^\delta_\beta}{\partial \lambda^\gamma} - \sigma^\gamma_\beta \frac{\partial \sigma^\delta_\alpha}{\partial \lambda^\gamma} = c^\gamma_{\alpha\beta} \sigma^\delta_\gamma. \tag{3.4}$$

Продовження полів $\mathcal{X}'_\alpha$ на $J^1\pi'$ дає векторні поля

$$X'_\alpha = X_\alpha + \sigma^\beta_\alpha \frac{\partial}{\partial \lambda^\beta} + (D\sigma^\beta_\alpha - \dot{\lambda}^\beta D\eta_\alpha) \frac{\partial}{\partial \dot{\lambda}^\beta}, \tag{3.5}$$

і умови інваріянтности набудуть вигляду

$$X'_\alpha L' + L' D\eta_\alpha = 0, \tag{3.6}$$

$$Y'_\alpha L' + L'\eta_\alpha = 0, \tag{3.7}$$

де

$$Y'_\alpha \equiv Y_\alpha + (\sigma^\alpha_\beta - \dot\lambda^\beta \eta_\alpha)\frac{\partial}{\partial\dot\lambda^\beta}. \tag{3.8}$$

Розглянемо рівняння (3.7):

$$(\zeta^i_\alpha - v^i\eta_\alpha)\frac{\partial L'}{\partial v^i} + (\sigma^\alpha_\beta - \dot\lambda^\beta\eta_\alpha)\frac{\partial L'}{\partial\dot\lambda^\beta} + L'\eta_\alpha = 0. \tag{3.9}$$

Припустимо, що матриця $\hat\sigma = \|\sigma^\alpha_\beta\|$ невироджена,

$$\det\|\sigma^\alpha_\beta\| \neq 0, \tag{3.10}$$

і введемо обернену до неї матрицю $\|\kappa^\alpha_\beta\|$:

$$\sigma^\alpha_\gamma\kappa^\gamma_\beta = \delta^\alpha_\beta. \tag{3.11}$$

Підставляння

$$L' = (1 - \eta_\alpha\kappa^\alpha_\beta\dot\lambda^\beta)F \tag{3.12}$$

приводить (3.9) до однорідної системи рівнянь для функції F:

$$(\zeta^i_\alpha - v^i\eta_\alpha)\frac{\partial F}{\partial v^i} + (\sigma^\alpha_\beta - \dot\lambda^\beta\eta_\alpha)\frac{\partial F}{\partial\dot\lambda^\beta} = 0. \tag{3.13}$$

Ця система r рівнянь для функції F від $1{+}2(\dim \mathrm{E}{+}r)$ арґументів має $1 + 2\dim\mathrm{E} + r$ перших інтеґралів [9], якими є t, x^i, λ^α (бо за ними немає похідних) і “коваріянтні похідні” від координат

$$V^i = \frac{v^i - \zeta^i_\alpha\kappa^\alpha_\beta\dot\lambda^\beta}{1 - \eta_\alpha\kappa^\alpha_\beta\dot\lambda^\beta}. \tag{3.14}$$

Коли ввести позначення

$$\omega^\alpha \equiv \kappa^\alpha_\beta\dot\lambda^\beta, \tag{3.15}$$

$$f \equiv 1 - \eta_\alpha\omega^\alpha, \tag{3.16}$$

то формула для V^i набуде вигляду

$$V^i = f^{-1}(v^i - \zeta^i_\alpha\omega^\alpha), \tag{3.17}$$

і загальний розв’язок системи (3.9) можна подати як

$$L' = fF(t, x^i, V^i, \lambda^\alpha), \tag{3.18}$$

де F — довільна функція вказаних аргументів.

Тепер слід підставити вираз (3.18) у рівняння (3.6). Але попередньо варто розрахувати дію X'_α на величини ω^α і f.

З означення (3.15) маємо

$$X'_\alpha\omega^\beta = \kappa^\beta_\gamma(D\sigma^\gamma_\alpha - \dot\lambda^\gamma D\eta_\alpha) + \dot\lambda^\gamma X'_\alpha\kappa^\beta_\gamma =$$

$$\dot\lambda^\gamma\left(\kappa^\beta_\delta\frac{\partial\sigma^\delta_\alpha}{\partial\lambda^\gamma} + \sigma^\delta_\alpha\frac{\partial\kappa^\beta_\gamma}{\partial\lambda^\delta}\right) - \omega^\beta D\eta_\alpha. \tag{3.19}$$

За допомогою (3.4) і (3.11) можна вивести формулу

$$\kappa^\beta_\delta\frac{\partial\sigma^\delta_\alpha}{\partial\lambda^\gamma} + \sigma^\delta_\alpha\frac{\partial\kappa^\beta_\gamma}{\partial\lambda^\delta} = -\mathrm{c}^\beta_{\alpha\delta}\kappa^\delta_\gamma, \tag{3.20}$$

так що отримуємо

$$X'_\alpha\omega^\beta = \mathrm{c}^\beta_{\gamma\alpha}\omega^\gamma - \omega^\beta D\eta_\alpha. \tag{3.21}$$

Враховуючи (3.21), маємо

$$X'_\alpha f = -\omega^\beta(\mathcal{X}_\alpha\eta_\beta - c^\gamma_{\alpha\beta}\eta_\gamma) + \eta_\beta\omega^\beta D\eta_\alpha, \tag{3.22}$$

або, беручи до уваги першу з формул (2.4),

$$X'_\alpha f = -\omega^\beta(\zeta^i_\beta - v^i\eta_\beta)\frac{\partial\eta_\alpha}{\partial x^i}, \tag{3.23}$$

що за допомогою означення (3.14) коваріянтної похідної V^i можна подати у вигляді

$$X'_\alpha f = f(V^i - v^i)\frac{\partial\eta_\alpha}{\partial x^i} = f(\mathcal{D} - D)\eta_\alpha, \tag{3.24}$$

де $\mathcal{D}$ — “коваріянтна похідна за часом”,

$$\mathcal{D} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + V^i\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{3.25}$$

Результат (3.24) показує, що підставляння (3.18) у рівняння (3.6) приведе до співвідношення

$$X'_\alpha F + F\mathcal{D}\eta_\alpha = 0. \tag{3.26}$$

Безпосереднім розрахунком з використанням формул (3.24), (3.21) і (3.4) отримуємо

$$X'_\alpha V^i = \mathcal{D}\zeta^i_\alpha - V^i\mathcal{D}\eta_\alpha. \tag{3.27}$$

Тому рівняння (3.26) набуде вигляду

$$\eta_\alpha \frac{\partial F}{\partial t} + \zeta^i_\alpha \frac{\partial F}{\partial x^i} + (\mathcal{D}\zeta^i_\alpha - V^i \mathcal{D}\eta_\alpha)\zeta^i_\alpha \frac{\partial F}{\partial V^i} \tag{3.28}$$

$$+\sigma^\beta_\alpha \frac{\partial F}{\partial \lambda^\beta} + F\mathcal{D}\eta_\alpha = 0.$$

При $\partial F/\partial\lambda^\alpha = 0$ це рівняння відрізняється від (2.8) тільки заміною швидкостей v^i на коваріянтні похідні V^i. Таким чином, можна покласти

$$F = L(t, x^i, V^i), \tag{3.29}$$

де $L(t, x^i, v^i)$ — функція Лаґранжа вихідної системи, що задовольняє умови інваріянтности відносно групи $\mathcal{G}_r$. Зазначимо, що залежність від λ^α у функції F виявляється лише через посередництво “коваріянтної похідної” V^i.

Отже, рецепт досягнення калібрувальної інваріянтности відносно групи $\mathcal{G}_r$ можна сформулювати так: у лаґранжіяні, що забезпечує інваріянтність відносно групи (глобальних) перетворень $\mathcal{G}_r$, слід замінити швидкості v^i на коваріянтні похідні V^i та домножити результат на фактор f:

$$L' = fL(t, x^i, V^i). \tag{3.30}$$

Якщо група $\mathcal{G}_r$ діє тривіяльно на базі $\mathbb{R}$ в'язки π ($\eta_\alpha = 0$), то $f = 1$.

IV. КАЛІБРУВАЛЬНІ ЗМІННІ ТА КВАЗІКООРДИНАТИ

Розглянемо зміст уведених додаткових змінних λ^α. Для цього звернемося до співвідношень (3.4), (3.10). Третя теорема Лі (див., наприклад, [10]) стверджує для кожного тензора структурних констант $c^\gamma_{\alpha\beta}$ існування розв'язку системи (3.4) з початковою умовою

$$\sigma^\alpha_\beta(0) = \delta^\alpha_\beta, \tag{4.1}$$

так що принаймні для малих λ буде виконуватись умова (3.10). При цьому λ^α — канонічні координати групи $\mathcal{G}_r$. Таким чином, тотальний простір E' введеної в'язки π' має вигляд

$$\mathrm{E}' = \mathrm{E} \times \mathcal{G}_r. \tag{4.2}$$

Функції $\sigma^\alpha_\beta(\lambda)$ можна розрахувати за відомим законом композиції групи $\mathcal{G}_r$ — функціями $\varphi^\alpha(\lambda, \epsilon)$, що означаються співвідношенням

$$\exp(\lambda^\alpha \mathcal{X}_\alpha) \circ \exp(\epsilon^\beta \mathcal{X}_\beta) = \exp(\varphi^\alpha(\lambda, \epsilon)\mathcal{X}_\alpha). \tag{4.3}$$

Відповідна формула має вигляд [10]:

$$\sigma^\alpha_\beta(\lambda) = \left.\frac{\partial \varphi^\alpha(\lambda, \epsilon)}{\partial \epsilon^\beta}\right|_{\epsilon=0}. \tag{4.4}$$

Віднотуємо, що для абелевої групи ($c^\gamma_{\alpha\beta} = 0$), коли

$$\varphi^\alpha(\lambda, \epsilon) = \lambda^\alpha + \epsilon^\alpha, \tag{4.5}$$

маємо

$$\sigma^\alpha_\beta = \kappa^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta. \tag{4.6}$$

Змінні λ^α, $\dot\lambda^\alpha$ входять у лаґранжіян (3.30) лише в комбінації $\kappa^\alpha_\beta \dot\lambda^\beta = \omega^\alpha$. Тому доцільно перейти до “квазікоординат”, здійснивши таке перетворення $J^1\pi'$:

$$(t, x^i, v^i, \lambda^\alpha, \dot\lambda^\alpha) \mapsto (t, x^i, v^i, \lambda^\alpha, \omega^\alpha). \tag{4.7}$$

Це перетворення не зберігає структури тих рівнянь Ойлера–Лаґранжа, які містять похідні за λ. Якщо в старих змінних $(\lambda^\alpha, \dot\lambda^\alpha)$ вони мають вигляд

$$\frac{\partial L'}{\partial \lambda^\alpha} - D\frac{\partial L'}{\partial \dot\lambda^\alpha} = 0, \tag{4.8}$$

то, переходячи до нових змінних $(\lambda^\alpha, \omega^\alpha)$, враховуючи (3.15) і те, що у нових змінних L' не залежить від λ^α, одержимо

$$\dot\lambda^\gamma \left(\frac{\partial \kappa^\beta_\gamma}{\partial \lambda^\alpha} - \frac{\partial \kappa^\beta_\alpha}{\partial \lambda^\gamma}\right)\frac{\partial L'}{\partial \omega^\beta} - \kappa^\beta_\alpha D\frac{\partial L'}{\partial \omega^\beta} = 0. \tag{4.9}$$

Домноживши (4.9) на невироджену матрицю $\hat\sigma$, отримаємо рівняння Ойлера-Лаґранжа в термінах квазікоординат:

$$c^\gamma_{\alpha\beta}\omega^\beta \frac{\partial L'}{\partial \omega^\gamma} + D\frac{\partial L'}{\partial \omega^\alpha} = 0 \tag{4.10}$$

(пор., наприклад, [11]).

“Квазішвидкості” ω^α власне і є аналогом калібрувальних полів $A^\alpha_\mu(x)$ класичної теорії поля. Формула (3.17) для коваріянтної похідної у випадку

$$\eta_\alpha = 0, \qquad \zeta^i_\alpha = (T_\alpha)^i_j x^j, \tag{4.11}$$

що відповідає (1.1), набуде вигляду (коли ще провести заміну $\omega^\alpha \mapsto g\omega^\alpha$, g — константа)

$$V^i = v^i - g(T_\alpha)^i_j x^j \omega^\alpha \tag{4.12}$$

або

$$\mathcal{D}x^i = Dx^i - g(T_\alpha)^i_j\omega^\alpha x^j, \tag{4.13}$$

що узгоджується з (1.4).

Трансформаційні властивості величин ω^α можна вивести таким чином. При інфінітезимальних перетвореннях (3.1) із залежними від t параметрами ϵ^α похідні $\dot\lambda^\alpha$ перетворюються за правилом

$$\dot\lambda^\alpha \mapsto \dot\lambda^\alpha + \epsilon^\beta(D\sigma^\alpha_\beta - \dot\lambda^\alpha D\eta_\beta) + \dot\epsilon^\beta(\sigma^\alpha_\beta - \lambda^\alpha\eta_\beta). \tag{4.14}$$

Звідси випливає, що величини ω^α перетворюються як

$$\omega^\alpha \mapsto \omega^\alpha + \epsilon^\beta X'_\beta\omega^\alpha + g^{-1}\dot\epsilon^\beta\kappa^\alpha_\gamma(\sigma^\gamma_\beta - \lambda^\gamma\eta_\beta), \tag{4.15}$$

або, враховуючи формули (3.21) і (3.11),

$$\omega^\alpha \mapsto \omega^\alpha + \epsilon^\gamma(c^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta - \omega^\alpha D\eta_\gamma) + g^{-1}\dot\epsilon^\beta(\delta^\alpha_\beta - g\omega^\alpha\eta_\beta), \tag{4.16}$$

що узгоджується з формулою (1.6) для калібрувальних полів.

Таким чином, екзотичний доданок у трансформаційних властивостях калібрувальних полів, пропорційний до $\partial_\mu\epsilon^\alpha$, у випадку одновимірної бази є наслідком використання квазішвидкостей.

Різниця між похідними $\dot\lambda^\alpha$ і квазішвидкостями ω^α зникає для абелевих груп (див. (4.6)).

Зауважимо, що у випадку класичної механіки немає жодного відповідника власного лаґранжіяна калібрувального поля типу другого доданка у формулі (1.3): коли $\dim \mathrm{M} = 1$, тензор кривини (1.5) є тотожним нулем.

V. ПРИКЛАДИ

А. Параметрична (хронометрична) інваріянтність

Нехай $\mathcal{G}_1 = T_0$— однопараметрична група зсувів за t:

$$t \mapsto t + \epsilon, \qquad x^i \mapsto x^i, \tag{5.1}$$

так що у (2.1) $\eta = 1$, $\zeta^i = 0$ і, як для кожної абелевої групи, $\hat\sigma = \hat\kappa = I$. Загальний вигляд лаґранжіяна, що забезпечує інваріянтність відносно ґлобальних перетворень (5.1), є

$$L = L(x^i, v^i). \tag{5.2}$$

Відповідні калібрувальні перетворення

$$t \mapsto t + \epsilon(t), \qquad x^i \mapsto x^i, \tag{5.3}$$

описують довільну зміну параметра еволюції t. За правилом (3.30) знаходимо калібрувально–інваріянтний лаґранжіян

$$L' = (1 - \dot\lambda)L\left(x^i, \frac{v^i}{1-\dot\lambda}\right). \tag{5.4}$$

Згідно (3.1), калібрувальна змінна λ при перетвореннях (5.3) міняється за правилом

$$\lambda \mapsto \lambda + \epsilon(t). \tag{5.5}$$

Якщо замість λ ввести нову змінну

$$x^0 = t - \lambda, \tag{5.6}$$

яка відповідно до (5.3) і (5.5) буде інваріянтом відносно калібрувальних перетворень, то лаґранжіян (5.4) можна подати у вигляді

$$L' = \dot x^0 L(x^i, v^i/\dot x^0), \tag{5.7}$$

тобто в стандартній формі, що забезпечує хронометричну інваріянтність за рахунок однорідности першого порядку за першими похідними (див., наприклад, [12]).

Так, нерелятивістичному вільночастинковому лаґранжіянові

$$L = \frac{mv^2}{2} \tag{5.8}$$

відповідає хронометрично–інваріянтний вираз [13]

$$L' = \frac{mv^2}{2\dot x^0}, \tag{5.9}$$

а релятивістичній вільній частинці з

$$L = -m\sqrt{1 - v^2} \tag{5.10}$$

($c = 1$) — лаґранжіян Планка (див. [14])

$$L' = -m\sqrt{(\dot x^0)^2 - v^2} \equiv -m\sqrt{\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}, \tag{5.11}$$

де $u^\mu \equiv \dot x^\mu$, $\mu = 0, 1, 2, 3$ і $\|\eta_{\mu\nu}\| = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ — стандартна метрика Мінковського. Таким чином, перехід від тривимірного до чотиривимірного опису можна трактувати як спосіб забезпечення явної хронометричної інваріянтности формалізму. Він однаково добре застосовний як у релятивістичній (Пуанкаре–інваріянтній) механіці, так і в Ґалілей–інваріянтній (“нерелятивістичній”). Дію групи Ґалілея можна задати в 4–вимірному просторі $\mathbb{M}_4$ з координатами x^μ, як і дію групи Пуанкаре, з тою лише відмінністю, що група Ґалілея не зберігатиме метрики Мінковського. На цьому шляху можна побудувати послідовний чотиривимірний опис Ґалілей–інваріянтної механіки [13, 15]. Більше того, останнім часом значний інтерес викликає побудова класичної теорії поля в $\mathbb{M}_4$, базованої на калібрувальній інваріянтності відносно групи Ґалілея [16, 17], як з огляду на її внутрішню узгодженість, так і з потреби послідовного розгляду ньютонівської та постньютонівської межі релятивістичної калібрувальної теорії тяжіння, яку отримують шляхом калібрування групи Пуанкаре.

Користуючись тим, що калібрувально-інваріянтний лаґранжіян (5.4) не визначає закону еволюції калібрувальної змінної λ, а отже, і пов'язаної з нею формулою (5.6) величини x^0, останню можна пов'язати з $t, \mathbf{x}$ співвідношенням виду $x^0 = \varphi(t, \mathbf{x})$. Його підставляння у (5.11) приводить до виразу [18–20]

$$L = -m\sqrt{(D\varphi)^2 - v^2}, \tag{5.12}$$

який забезпечує лаґранжів опис вільної релятивістичної частинки в довільній формі динаміки Дірака [21]. Лише при $\varphi(t, \mathbf{x}) = t$ ми приходимо до стандартного виразу (5.10), який відповідає миттєвій формі динаміки.

B. Неінерціяльні системи відліку

Нехай $n = 3$ і $\mathcal{G}_6 = \mathrm{e}(3)$ — евклідова група трансляцій та поворотів

$$t \mapsto t, \qquad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \boldsymbol{\epsilon}_R \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\epsilon}_T. \tag{5.13}$$

Вираз (3.30), який відповідає евклідово–інваріянтному лаґранжіянові $L = L(\mathbf{v}^2)$, має вигляд

$$L' = L([\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega}_R \times \mathbf{x} - \dot{\boldsymbol{\lambda}}_T]^2) \tag{5.14}$$

і описує вільну частинку з погляду неінерціяльної системи відліку, що рухається з лінійною швидкістю $\dot{\boldsymbol{\lambda}}_T(t)$ і кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}_R(t)$ [22]. Розрахунок ω^i_R за формулою (3.15) з функціями κ^i_j; $i, j = 1, 2, 3$, що відповідають групі SO(3), приводить до відомих виразів для кутової швидкости в термінах кутів Ойлера [23], які можна вважати канонічними кординатами λ^i групи SO(3).

C. Масштабні перетворення

Як приклад групи, що діє одночасно в базі та шарах, розглянемо однопараметричну групу масштабних перетворень

$$t \mapsto t(1 + \epsilon), \qquad x^i \mapsto x^i(1 + \epsilon). \tag{5.15}$$

Умови інваріянтности (2.8) для перетворень (5.15) мають розв'язок

$$L = t^{-1}F(t^{-1}x^i, v^i); \tag{5.16}$$

з довільною функцією F. Відповідний калібрувально-інваріянтний лаґранжіян згідно з (3.30), (3.16), (3.17) має вигляд

$$L' = (t^{-1} - \dot{\lambda})F\left(\frac{x^i}{t}, \frac{v^i - x^i\dot{\lambda}}{1 - t\dot{\lambda}}\right), \tag{5.17}$$

де λ — калібрувальна змінна.

VI. ПІДСУМКИ

Якщо $\mathcal{G}_r$ — r–параметрична група симетрії класичної механічної системи, що описується лаґранжіяном $L = L(t, x, v)$, то калібрувальної інваріянтности досягаємо введенням r додаткових змінних λ^α, $\alpha = 1, \ldots, r$, які можна інтерпретувати як канонічні координати групи $\mathcal{G}_r$. При цьому для побудови калібрувально–інваріянтного лаґранжевого опису досить замінити в лаґранжіяні $L = L(t, x, v)$ швидкості v^i на "коваріянтні похідні" V^i, означені формулою (3.17), а у випадку, коли розглянуті перетворення міняють t — результат домножити на вираз (3.16). Додаткові змінні λ^α входять у лаґранжіян лише через квазішвидкості $\omega^\alpha = \kappa^\alpha_\beta\dot{\lambda}^\beta$, де матриця κ^α_β визначається законом композиції групи $\mathcal{G}_r$. Рівняння Ойлера–Лаґранжа для змінних λ^α є наслідками рівнянь руху для змінних x^i, так що часова еволюція калібрувальних величин $\lambda^\alpha = \lambda^\alpha(t)$ лишається повністю невизначеною. У результаті приходимо до виродженої лаґранжевої системи [24], канонічний опис якої, як і наступне квантування, можуть будуватися на основі діракового гамільтонового формалізму з в'язями [25, 26]. Розглянуті приклади, в яких у ролі $\mathcal{G}_r$ виступають деякі підгрупи групи просторово–часових симетрій, дають змогу, зокрема, у дещо іншому світлі побачити добре відомі класичні результати. Викликає інтерес розгляд у цьому контексті групи Лоренца, особливо з погляду вивчення ефектів адіябатичної циклічної еволюції [27] у русі релятивістичної частинки [28].

Автор вдячний проф. Р. Ґайді та Ю. Ключковському за їхній сталий інтерес до цієї роботи, що значною мірою зумовило її написання.

[1] W. Drechsler, M. E. Mayer, *Fibre Bundle Techniques in Gauge Theories* (Springer, Berlin e.a., 1977).
[2] A. Trautman, Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. sci. phys. et astron. **27**, 7 (1979).
[3] А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей* (Наука, Москва, 1978).
[4] D. G. B. Edelen, Int. J. Theor. Phys. **24**, 659 (1985).
[5] Ж. Поммаре, *Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли* (Мир, Москва, 1983).
[6] Ю. И. Манин, Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики **11**, 5 (1978).
[7] E. C. G. Sudarshan, N. Mukunda, *Classical Dynamics: A Modern Perspective* (Wiley, N.Y. e.a., 1974).
[8] Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений* (Наука, Москва, 1978).
[9] Е. Гурса, *Інтегрування рівнянь з частинними похідними першого порядку* (Радянська школа, Київ, 1941).
[10] М. М. Постников, *Группы и алгебры Ли* (Наука, Москва, 1982).
[11] В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт, Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Фундаментальные направления **3**, 5 (1985).
[12] Я. А. Схоутен, *Тензорный анализ для физиков* (Наука, Москва, 1965).
[13] P. Havas, Rev. Mod. Phys. **36**, 938 (1964).
[14] В. Паули, *Теория относительности* (Наука, Москва, 1983).
[15] P. Havas, in *Problems in the Foundations of Physics* (Springer, Berlin e.a., 1971), p. 31.
[16] H. P. Künzle, Gen. Relativ. Gravit. **7**, 445 (1976).
[17] R. De Pietri, L. Lusanna, M. Pauri, Class. Quantum Grav. **12**, 219, 255 (1995).
[18] Р. П. Гайда, Ю. Б. Ключковський, В. І. Третяк, Доп. Акад. Наук УРСР. Сер. А, № 5, 6 (1982).
[19] В. И. Третяк, препринт ИТФ–82–88Р, Киев, 1982.
[20] Р. П. Гайда, Ю. Б. Ключковский, В. И. Третяк, Теор. мат. физ. **55**, 88 (1983).
[21] P. A. M. Dirac, Rev. Mod. Phys. **21**, 392 (1949).
[22] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика* (Наука, Москва, 1973).
[23] R. J. Finkelstein, *Nonrelativistic Mechanics* (Benjamin, London e.a., 1973).
[24] P. A. M. Dirac, Can. J. Phys. **2**, 129 (1950).
[25] П. Дирак, *Лекции по квантовой механике* (Мир, Москва, 1968).
[26] M. J. Gotay, J. M. Nester, Ann. Inst. Henri Poincaré, A **30**, 129 (1979); **32**, 1 (1980).
[27] M. Berry, Proc. R. Soc. London, Ser. A **392**, 45 (1984).
[28] I. Bialynicki–Birula, Z. Bialynicka–Birula, Phys. Rev. D **35**, 2383 (1987).

ON THE GAUGE TRANSFORMATIONS IN CLASSICAL MECHANICS

V. I. Tretyak
Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine,
1 Svientsitskii Str., Lviv, UA–290011, Ukraine

A rule for constructing the Lagrangian which ensures gauge invariance under an arbitrary Lie group is proposed for the classical mechanical system with n degrees of freedom.