ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 2, № 3 (1998) с. 427–432

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 2, No. 3 (1998) p. 427–432

ЗАДАЧА ДВОВИМІРНОГО ПЕРЕНОСУ ВИПРОМІНЮВАННЯ ДЛЯ БАГАТОРІВНЕВИХ АТОМІВ

М. І. Стоділка, Р. Є. Рикалюк
Львівський державний університет імені Івана Франка,
Інформаційно–обчислювальний центр,
вул. Університетська, 1, Львів, 290005, Україна

(Отримано 8 квітня 1997 р.; в остаточному вигляді — 13 липня 1997 р.)

У роботі розглянуто двовимірну задачу переносу випромінювання з урахуванням ефектів відхилення від локальної термодинамічної рівноваги і використанням методу множинних сіток. Застосування множинних сіток дає змогу відфільтровувати довгоперіодичні осциляції розв'язків. На кожній сітці розв'язок шукаємо методом прискореної Λ–ітерації: при цьому використовується метод коротких характеристик для формального розв'язку рівняння переносу, передобумовлення рівнянь статистичної рівноваги, прискорення збіжности. На підставі підходу коротких характеристик запропоновано різні варіянти наближеного Λ–оператора: локальний оператор, квазілокальний оператор. Останній враховує функцію джерела та інтенсивність випромінювання найближчих сусідніх точок.

Ключові слова: перенесення випромінювання, зоряні атмосфери, числові методи.

PACS number(s): 97.10.Ex

I. ВСТУП

Для багатьох астрофізичних об'єктів (акреційний диск, взаємодіючі подвійні зорі і т.д.) не годиться ні плоскопаралельна, ні сферична модель атмосфери. Це стосується і Сонця, коли йде мова про інтерпретацію спектрів з високою просторовою роздільною здатністю. Оскільки сонячна атмосфера — це сукупність різних неоднорідностей (наприклад, плями, факели), то вплив їх на перенесення випромінювання неможливо описати в рамках одновимірної моделі. З другого боку, не можна не враховувати дрібномасштабних утворень, зокрема ґрануляцію, розміри яких відповідають шкалі висот. Тому важко заздалегідь відповісти на запитання: до яких меж можна розглядати атмосферу як сукупність однорідних шарів? Однозначну відповідь дає тільки розв'язок багатовимірної задачі, тобто сумісний розв'язок багатовимірних рівнянь переносу і рівнянь статистичної рівноваги.

Поставлену задачу можна розв'язувати, використавши скінченнорізницевий запис рівнянь переносу в диференціяльній формі. Є дві схеми розв'язку задачі: Фотріє та Райбікі [1,2]. Але методи, що використовують ці схеми, погано працюють при розв'язуванні багаторівневої, навіть одновимірної задачі, бо потрібно обертати матриці великої розмірности.

Метод еквівалентного дворівневого атома оперує матрицями невеликої розмірности, але погано збігається. Це ж стосується і прямих інтеґральних методів. У таких випадках доцільно застосовувати ітеративні методи, що використовують наближені оператори, але дають точні розв'язки. Потреби в пам'яті і машинному часі суттєво зменшуються. Такий підхід був запропонований у [3] і розвинений у роботах [4, 5, 6]. Швидкі ітеративні методи тепер відомі як методи прискореної Λ–ітерації, тобто ALI–методи; в основі їх лежить використання ітераційної схеми Кеннона [3]: похибка, яку вносить біжуча оцінка розв'язку в рівняння з точним оператором, є керуючим членом у рівнянні з наближеним оператором для знаходження нової оцінки розв'язку. Не можна не відзначити того факту, що з усіх методів, які успішно використовувались, тільки швидкі ітеративні алґоритми дозволяють робити реалістичні обчислення багатовимірної задачі. Коротко відзначимо основні роботи, у яких розв'язується багатовимірне рівняння переносу. Стенгольм [7] у 1977 р. розробив алґоритм двовимірної задачі для дворівневого атома; використано метод насичення ядра в його найпростішій формі. Нордлунд [8, 9] розробив ALI–стратегію для дворівневого атома з континуумом у тривимірному середовищі, правда, для сильних ліній виникали проблеми зі збіжністю. Штайнер запропонував метод множинних сіток [10]. Його суть полягає в тому, що задача переносу розв'язується ALI–методами, але почергово для різних сіток. Це приводить до суттєвого покращення збіжности. На жаль, усі співвідношення у [10] обмежуються дворівневим атомом. Ауер та інші [11] розробили комплексний підхід до багаторівневої тривимірної задачі; методику апробовано на моделях атомів Ca^+ та H; вивчається проблема збіжности, горизонтальні ефекти; профілі ліній не отримано. Вес [12] запропонував методику тривимірної задачі, але обчислення вимагають застосування багатопроцесорних комп'ютерів.

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

A. Формальний розв'язок рівнянь переносу

Розглянемо двовимірну плоскопаралельну модель атмосфери, усі параметри якої залежать від двох координат x (горизонталь) і z (вертикаль) та задані у вузлах двовимірної сітки. При заданій моделі атмосфери і відомих населеностях енерґетичних рівнів атома легко знайти інтенсивність випромінювання, використавши рівняння переносу, яке для випадку ізотропного коефіцієнта поглинання матиме вигляд

$$\frac{dI_\nu(\mathbf{r},\mathbf{e})}{d\tau_\nu} = I_\nu(\mathbf{r},\mathbf{e}) - S_\nu(\mathbf{r}). \tag{1}$$

Тут $I_\nu(\mathbf{r},\mathbf{e})$ — інтенсивність випромінювання в точці, що задається вектором $\mathbf{r}$; $\mathbf{e}$ — одиничний вектор, що задає напрям поширення випромінювання; $S_\nu(\mathbf{r})$ — функція джерела, τ_ν — оптична глибина за даним напрямком, ν — частота.

У рівнянні (1) функція джерела S_ν не залежить від $\mathbf{e}$, тому що коефіцієнт поглинання ізотропний.

При відомих S_ν розв'язок (1) дуже спрощується (такий розв'язок називається формальним) і має вигляд

$$I_\nu(\mathbf{r},\mathbf{e}) = I_{\nu 0}(\mathbf{r_0},\mathbf{e})\exp(-\tau_\nu(\mathbf{r_0},\mathbf{e})) + \int_0^l \chi_\nu(\mathbf{r}')S_\nu(\mathbf{r}')\exp(-\tau_\nu(\mathbf{r}',\mathbf{r}))dl', \tag{2}$$

де $I_{\nu 0}(\mathbf{r_0},\mathbf{e})$ — відома інтенсивність у точці $\mathbf{r_0}$, причому $\mathbf{r_0} = \mathbf{r} - \mathbf{e}l$; l — відстань від $\mathbf{r}$ до $\mathbf{r_0}$ уздовж $(-\mathbf{e})$; χ_ν — коефіцієнт поглинання; $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{e}l'$ — положення біжучої точки, а $\tau_\nu(\mathbf{r}',\mathbf{e})$ — оптична глибина між точками $\mathbf{r}'$ та $\mathbf{r}$.

Уведемо позначення:

$$\tau_\nu(\mathbf{r_0},\mathbf{r}) = \Delta\tau_\nu, \quad \tau_\nu(\mathbf{r}',\mathbf{r}) = \Delta\tau'_\nu.$$

Тоді (2) матиме вигляд

$$I_\nu(\mathbf{r},\mathbf{e}) = I_{\nu 0}\exp(-\Delta\tau_\nu) + \int_0^{\Delta\tau_\nu} S_\nu(\mathbf{r}')\exp(-\Delta\tau'_\nu)d\Delta\tau'_\nu. \tag{3}$$

Розглянемо випадок, коли точки $\mathbf{r_0}$ та $\mathbf{r}$ близько одна від одної. Тоді у формулі (3) підінтеґральний вираз буде добутком слабкозмінної функції S_ν на функцію $\exp(-\Delta\tau'_\nu)$, яка сильно змінюється. Використавши для S_ν лінійну інтерполяцію

$$S_\nu = S_\nu + k\Delta\tau'_\nu,$$

де $k = \Delta S_\nu/\Delta\tau_\nu$, після аналітичного інтеґрування отримуємо

$$I_\nu(\mathbf{r},\mathbf{e}) = I_{\nu 0}\exp(-\Delta\tau_\nu) + S_\nu(1-\exp(-\Delta\tau_\nu)) + \frac{\Delta S_\nu}{\Delta\tau_\nu}(1-(\Delta\tau_\nu+1)\exp(-\Delta\tau_\nu)). \tag{4}$$

При $\Delta\tau > 1$

$$I \approx S + \frac{\Delta S}{\Delta\tau}$$

— інтенсивність визначається локальною функцією джерела та її ґрадієнтом; при $\Delta\tau < 1$

$$I \approx I_0(1-\Delta\tau) + S_0\Delta\tau$$

— станом сусідньої точки.

Таким чином, маючи I_0 на верхній чи нижній межі та багатократно використовуючи рекурентне співвідношення (4), можна обчислити інтенсивність у будь–якій точці вздовж поширення променя (метод коротких характеристик). Подібне, але дещо складніше співвідношення отримуємо при квадратичній інтерполяції функції джерела.

Рівняння переносу пов'язує інтенсивність випромінювання, що виникає в результаті переходів між двома рівнями, з населеностями цих рівнів. З другого боку, населеності рівнів атома повинні задовольняти певні співвідношення, які називаються рівняннями статистичної рівноваги. Розглянемо їх детальніше.

B. Рівняння статистичної рівноваги

При встановленому процесі для будь–якого атомного рівня i число переходів з цього рівня дорівнює числу переходів на цей рівень (інакше населеність рівня змінювалась би з часом). Беручи до уваги радіятивні та ударні переходи, рівняння статистичної рівноваги для i–го рівня матиме вигляд [1]

$$-\sum_{i''<i} n_{i''}(R_{i''i}+C_{i''i}) + n_i\left[\sum_{i''<i}\left({}^{n_{i''}}\!/_{n_i}\right)^*(R_{ii''}+C_{i''i}) + \sum_{i'>i}^{k}(R_{ii'}+C_{ii'})\right] - \sum_{i'>i}^{k} n_{i'}\left({}^{n_i}\!/_{n_{i'}}\right)^*(R_{i'i}+C_{ii'}) = 0, \tag{5}$$

де n_i — населеність i–го рівня; $R_{ii'}$, $C_{ii'}$ — швидкості радіятивних та ударних переходів.

Рівняння статистичної рівноваги (5) часто зручно записувати через розбаланси

$$\Delta_{ij}^{(R)} = n_i R_{ij} - n_j R_{ji},$$

$$\Delta_{ij}^{(C)} = n_i C_{ij} - n_j C_{ji} = C_{ij}(n_i - n_j(n_i/n_j)^*)$$

(причому $i < j$). Тоді рівняння (5) матиме вигляд

$$\sum_{j=i+1}^{k} \Delta_{ij} - \sum_{j=1}^{i-1} \Delta_{ji} = 0, i = (\overline{1, k-1}). \tag{6}$$

У співвідношенні (6)

$$\Delta_{ij} = \Delta_{ij}^{(R)} + \Delta_{ij}^{(C)}.$$

Рівняння (5) для континууму є сумою аналогічних рівнянь для нижчих рівнів, тому часто використовують рівняння збереження числа частинок

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = \varepsilon n_H, \tag{7}$$

де ε — хемічний уміст відносно числа атомів водню.

Співвідношення (5,7) можна подати в матричному вигляді

$$\mathbf{An} = \mathbf{b}, \tag{8}$$

де $\mathbf{b}$ — вектор, у якому всі елементи, крім останнього, дорівнюють нулеві.

Радіятивні члени в рівнянні (5) залежать від інтенсивности випромінювання, яка своєю чергою визначається населеностями рівнів. Тому система рівнянь (8) — це нелінійна система стосовно $\mathbf{n}$. Розглянемо ефективний метод сумісного розв'язку рівнянь переносу та статистичної рівноваги.

C. Метод прискореної Λ–ітерації

Формальний розв'язок рівняння переносу (3) можна записати у вигляді

$$J_\nu = \Lambda_\nu S_\nu. \tag{9}$$

Знаючи S_ν, легко порахувати J_ν, а за J_ν — $\mathbf{n}$ і т.д. Такий ітераційний процес називається простою Λ–ітерацією. Ця ітерація погано збігається (якщо збігається взагалі), а отже, необхідне число ітерацій дуже велике [1]. Це особливо стосується тих випадків, коли є значне число розсіянь фотонів у ядрі лінії. Для того щоб вдосконалити обчислювальний процес, Λ–оператор запишемо у вигляді комбінації точного і наближеного операторів [3–5]

$$\Lambda_\nu = \Lambda_\nu^* + (\Lambda_\nu - \Lambda_\nu^*). \tag{10}$$

Таким чином Λ–оператор є сумою наближеного оператора Λ^* і поправки, яка обчислюється на попередній ітерації. Як правило, Λ^* вибирають таким чином, що різниця $(\Lambda_\nu - \Lambda_\nu^*)$ швидко зменшується зі збільшенням оптичної глибини τ_ν, тобто

$$(\Lambda_\nu - \Lambda_\nu^*) S_\nu \ll \Lambda_\nu^* S_\nu$$

при $\tau_\nu \gg 1$.

Отже, якщо використовувати (10), фотони в ядрах лінії вибувають з переносу і розв'язок збігається швидше (прискорена Λ– ітерація — ALI).

У випадку багаторівневого атома відбувається взаємодія переходів; при цьому порушується лінійний зв'язок між J і S. Часто, послідовно розв'язуючи рівняння (8)–(10), можна шляхом проведення ітерацій враховувати таку взаємодію (еквівалентний дворівневий атом). Проте у випадку сильної взаємодії використовують дещо інший підхід: рівняння переносу вносять у рівняння статистичної рівноваги. При певному виборі наближеного оператора в системі нелінійних (відносно $\mathbf{n}$) рівнянь (8) аналітично скорочуються великі члени, а рівняння стають лінійними. Таку процедуру називають передобумовленням рівнянь статистичної рівноваги [11]. Розглянемо її детальніше.

D. Передобумовлення рівнянь статистичної рівноваги

У багатовимірній задачі в ролі Λ^* доцільно брати локальний оператор, оскільки внаслідок вибору нелокального оператора рівняння (8), які записані для довільного вузла сітки, стають взаємозв'язаними, що суттєво ускладнює задачу. Виявляється, що з класу локальних операторів оптимальним є $\Lambda^* = \mathrm{diag}\Lambda$, тобто

$$\Lambda_\nu^* S_\nu(\tau_\nu) = a_\nu(\tau_\nu) S_\nu(\tau_\nu).$$

Для найпростішого локального оператора [6]

$$a_\nu(\tau_\nu) = \begin{cases} 0, \tau_\nu < \tau^* \\ 1, \tau_\nu \geq \tau^* \end{cases},$$

де $\tau^* \approx 1$, заданий параметр.

Щоб побудувати точніший наближений оператор (від якости Λ^* залежить швидкість збіжности), скористаємось співвідношенням (3). Використавши лінійну інтерполяцію функції джерела, отримуємо

$$I_\nu(\mathbf{r},\mathbf{n}) = I_{\nu 0}(1-a_\nu) + a_\nu S_\nu + b_\nu \Delta S_\nu,$$

де

$$a_\nu = 1 - \exp(-\Delta\tau_\nu),$$

$$b_\nu = (1 - (\Delta\tau_\nu + 1)\exp(-\Delta\tau_\nu))/\Delta\tau_\nu\,.$$

Усереднюючи цей вираз за всіма напрямками, маємо

$$J_\nu(\mathbf{r},\mathbf{n}) = \overline{I_{\nu 0}(1-a_\nu)}$$

$$+\overline{(a_\nu - b_\nu)}S_\nu + \overline{b_\nu S_{\nu 0}} = \Lambda^*_\nu S_\nu. \tag{11}$$

Рівняння (11) подає квазілокальний оператор, оскільки враховано не тільки локальні властивості, а й стан сусідніх точок, тому якість його зі зменшенням розміру сітки погіршується не настільки, як для локального. Аналогічно можна отримати вираз для локального оператора

$$\Lambda^*_\nu S_\nu = a_\nu S_\nu.$$

Враховуючи співвідношення (10), розв'язок запишемо у вигляді

$$J_\nu^{(n)} = J_\nu^{(n-1/2)} + \Lambda^*_\nu S_\nu^{(n)} - \Lambda^*_\nu S_\nu^{(n-1)}, \tag{12}$$

де

$$J_\nu^{(n-1/2)} = \Lambda_\nu S_\nu^{(n-1)},$$

n — номер ітерації.

Як бачимо, новий розв'язок — це старий точний розв'язок плюс коректуючий член, а при великих n $\Lambda^* S^{(n)} - \Lambda^* S^{(n-1)} \to 0$.

Функцію джерела запишемо через функції джерела лінії і континууму (випадок повного перерозподілу за частотами):

$$S_\nu = r_\nu S_L + (1-r_\nu)S_C\,,$$

де

$$r_\nu = \chi^l_\nu/(\chi^l_\nu + \chi^c_\nu)\,, \quad S_L = \beta G n_j/(n_i - G n_j),$$

$$G = g_i/g_j\,, \quad \beta = 2hc^2/\lambda^5\,.$$

Якщо λ і r рахувати за старими населеностями, а першим доданком у (11) нехтувати (вклад його в ядро лінії незначний), то вираз (12) значно спрощується і ми отримуємо

$$J_\nu^{(n)} = J_\nu^{(n-1/2)} + \overline{r_{\nu 0}^{(n-1)} b_\nu^{(n-1)} (S_{L0}^{(n)} - S_{L0}^{(n-1)})}$$

$$-\overline{(a_\nu^{(n-1)} - b_\nu^{(n-1)})} r_\nu^{(n-1)} S_L^{(n-1)}$$

$$+\overline{(a_\nu^{(n-1)} - b_\nu^{(n-1)})} r_\nu^{(n-1)} S_L^{(n)}.$$

Підставивши цей вираз у формулу для радіятивного розбалансу, маємо

$$\Delta_{ij}^{(R)} = \frac{4\pi}{hc}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\lambda)\alpha_{ij}\lambda_{ij}\left[(n_i - G n_j) J_\nu^{ef}\right. \tag{13}$$

$$\left. +\ n_j G\beta(\overline{(a_\nu^{(n-1)} - b_\nu^{(n-1)})} r_\nu^{(n-1)} - 1)\right],$$

де

$$J_\nu^{ef} = J_\nu^{(n-1/2)} + \overline{b_\nu^{(n-1)} r_{\nu 0}^{(n-1)} (S_{L0}^{(n)} - S_{L0}^{(n-1)})}$$

$$-\overline{(a_\nu^{(n-1)} - b_\nu^{(n-1)})} r_\nu^{(n-1)} S_L^{(n-1)}.$$

Отже, на відміну від звичайної Λ–ітерації, у вираз (13) входить J_ν^{ef} замість J_ν, а коефіцієнт спонтанного випромінювання множиться на величину $(\overline{(a_\nu - b_\nu)} r_\nu - 1)$, усереднену за профілем коефіцієнта поглинання, тобто багато розсіянь у ядрі лінії, які описуються локальною частиною Λ–оператора, скорочується аналітично [10]. Підставимо останнє співвідношення в (6); після перегрупування доданків отримуємо систему лінійних рівнянь

$$\mathbf{A}^*\mathbf{n} = \mathbf{b}. \tag{14}$$

Передобумовлені рівняння статистичної рівноваги (14) дають додатні розв'язки, чого не можна сказати про (8). Система лінійних рівнянь (14) ітераційно уточнюється, тобто коли пораховані населеності рівнів у кожному вузлі сітки, можна за (9) отримати нові інтенсивності випромінювання, а вже потім, використовуючи (13), порахувати матрицю $\mathbf{A}^*$ і отримати нові населеності рівнів. Але оскільки система (14) лінійна, то збіжність буде такою ж (лінійна збіжність не залежить від початкових значень); у таких випадках потрібно багато ітерацій.

Їхнє число можна зменшити, якщо скористуватись відповідною методикою прискорення збіжности.

E. Прискорення збіжности

Існує багато методик прискорення збіжности ітераційного процесу [12, 10]. Розглянемо деякі з них, які непогано працюють у рамках поставленої задачі.

1. Якщо у (13) замість $a_\nu^{(n-1)}$ використовувати $a_\nu^{(n)}$, тобто коефіцієнти оператора Λ^* виражати через локальні населеності рівнів $\mathbf{n}^{(n)}$, то рівняння статистичної рівноваги стають нелінійними. Розв'язок рівнянь (14) при цьому дещо ускладнюється, проте збіжність буде близькою до квадратичної. Таку процедуру можна використовувати, коли біжучий розв'язок буде близьким до справжнього, тобто після достатнього числа лінійних ітерацій.

2. Адитивна корекція. Нехай після L ітерацій для (14) маємо розв'язок $\mathbf{n}^{(n)}$ на кожному вузлі сітки, $\mathbf{n}$ — точний розв'язок, який задовольняє систему (8). Введемо вектор похибки $\boldsymbol{\epsilon}^{(n)} = \mathbf{n}^{(n)} - \mathbf{n}$ і вектор нев'язки $\mathbf{r}^{(n)} = \mathbf{A}\mathbf{n}^{(n)} - \mathbf{b}$. Легко бачити, що $\mathbf{A}\epsilon^{(n)} = \mathbf{r}^{(n)}$. Розв'язуючи цю систему, отримуємо скоректований розв'язок: $\mathbf{n}^{'} = \mathbf{n}^{(n)} - \boldsymbol{\epsilon}^{(n)}$.

3. Ng–методика [11, 13]. Розглянемо розв'язки, отримані на L останніх ітераціях (9, 13, 14). Уточнений розв'язок будемо шукати у вигляді лінійної комбінації

$$\mathbf{J}^{'} = \sum_{i=1}^{L} c_i \mathbf{J}_i,$$

де: $\mathbf{J_1} = \mathbf{J^{(n-L)}}, ..., \mathbf{J_L} = \mathbf{J^{(n)}}$.

Підставивши його в рівняння (9), отримуємо систему рівнянь, що легко записується у матричному зображенні:

$$\mathbf{B}\mathbf{c} = \mathbf{b}. \tag{15}$$

Оскільки при достатньому числі ітерацій біжучий розв'язок прямує до точного, то $\mathbf{J}^{'} \approx \mathbf{J}_1 \approx ... \approx \mathbf{J}_L$. Звідси випливає єдина умова, яку повинні задовольняти коефіцієнти c_i:

$$\sum_{i=1}^{L} c_i = 1. \tag{16}$$

Отже, ми отримали систему K (число вузлів) рівнянь з L невідомими (як правило $L < K$) з додатковою умовою (16).

Маючи скоректований розв'язок $\mathbf{J'}$, можна знову приступати до ітерацій (9, 13, 14). Хоча цей алґоритм дещо складний, реалізувати його досить просто.

Часто використовують ще й методику спряжених векторів — *Orthomin* методику [11]. Результати використання обох методик майже однакові, тому *Orthomin* розглядати не будемо.

4. Перетворення Ейткена. Нехай $\mathbf{n}^{(n)}$ — послідовність розв'язків, отриманих методом ALI, на цій сітці. Якщо збіжність лінійна, то

$$n_i^{(n+1)} - n_i = (K + \sigma^{(n)})(n_i^{(n)} - n_i), \tag{17}$$

де $|K| < 1$, $\sigma^{(n)} \to 0$, $\mathbf{n}_i$ — межа послідовности розв'язків.

Використавши дві послідовні рівності (17) (поклавши $\sigma = 0$), отримуємо скоректований розв'язок [14]

$$n_i = n_i^{(n+2)} - \frac{(n_i^{(n+2)} - n_i^{(n+1)})^2}{n_i^{(n+2)} - 2n_i^{(n+1)} + n_i^{(n)}}. \tag{18}$$

Для лінійно збіжної послідовности перетворення (19) часто не дає точного значення межі, тому його використовують для побудови нової послідовности, для якої за (19) шукають межу, тобто скоректований розв'язок. Таке перетворення називається δ^2–перетворенням Ейткена. Застосування його до послідовностей з квадратичною збіжністю не приводить до прискорення [14].

F. Множинні сітки

Використання методу ALI навіть з передобумовленими рівняннями статистичної рівноваги і прискоренням збіжности, часто приводить до розв'язку, який не відповідає істинному; це особливо стосується тривимірної задачі [12]. Проблема зникає, а збіжність ітераційної процедури суттєво покращується, якщо використовувати множинні сітки, тому що у цьому випадку відфільтровуються довгоперіодичні осциляції розв'язку. Застосування множинних сіток висвітлено в [10]. Автори вибрали метод Федоренка — метод ітераційного розв'язку різницевих еліптичних рівнянь, який він назвав релаксаційним [15]. Використовуючи підхід Федоренка, відзначимо основні моменти методу стосовно нашої задачі:

а) на початковій сітці знаходимо нульове наближення; робимо Λ–ітерацію для обчислення інтенсивностей;

б) укрупнюємо сітку, доходимо до найгрубшої, а потім поступово (з використанням лінійної інтерполяції) повертаємось до вихідної сітки (найдрібнішої); на кожній сітці розв'язуємо задачу (9), (13), (14), (17) — ALI ітерація з прискоренням;

в) на початковій сітці, використовуючи звичайну Λ–ітерацію, обчислюємо профілі ліній.

Є дещо видозмінені схеми методу множинних сіток, зокрема так званий W–цикл [10].

III. ВИСНОВКИ

У роботі детально розглянута багаторівнева двовимірна задача переносу випромінювання. Використано сучасний потужний інструментарій:

а) точний метод коротких характеристик для звичайної Λ – ітерації;

б) передобумовлення рівнянь статистичної рівноваги;
в) наближений квазілокальний оператор, який складається з локальної частини і доданка, що враховує стан сусідніх точок;
г) прискорення збіжности;
д) використання множинних сіток.

Методика дає змогу вивчати неоднорідну астрофізичну плазму. На її базі розроблено програму, яка дозволяє розраховувати профілі ліній багаторівневих атомів для двовимірної атмосфери. Ми виконали обчислення профілів ліній для п'ятирівневої моделі MgI. Отримані результати зіставили з аналогічними, отриманими раніше методом лінеаризації. Профілі b–ліній та λ 457.4 н/м в обох випадках відрізняються не більше ніж на 1.5 %. Звичайно, збіжність процедури лінеаризації краща. Але методи, що базуються на лінеаризації, погано працюють при обчисленнях багатовимірних моделей атмосфер.

Збіжність ітераційної процедури доволі висока. Так, під час укрупнення сітки для досягнення найбільшої похибки, меншої від 1%, досить 10 ітерацій; при переході до вихідної сітки вистачає трьох–чотирьох ітераційних циклів.

У наступній роботі будуть подані результати (з використанням даної методики) дослідження впливу нескінченної періодичної структури (грануляції) на утворення ліній нейтрального магнію в умовах атмосфери Сонця.

[1] Д. Михалас, *Звездные атмосферы* (Мир, Москва, 1982).
[2] Б. Т. Бабій, М. І. Стоділка, Кінем. фіз. небес. тіл **4**, 3 (1988).
[3] C. I. Cannon, Astrophys. J. **185**, 621 (1973).
[4] G. Scharmer, *Methods in Radiative Transfer*, edited by W. Kalkofen (Cambridge, 1984), p. 173.
[5] B. G. Carlsson, *Computer Program for Solving Multi–Level Non–LTE Radiative Transfer Problems in Moving and Static Atmospheres. Report 33* (Uppsala, Astronomical Observatory, 1986).
[6] K. Werner, D. Husfed, Astron. Astrophys. **148**, 417 (1985).
[7] L. G. Stenholm, Astron. Astrophys. **54**, 577 (1977).
[8] Å. Nordlund, in *Progress in Stellar Spectral Line Formation Theory*, edited by J. E. Beckman, L. Crivellari (Kluwer, Academic Publishers, 1984), p. 215.
[9] Å. Nordlund, in *Stellar Atmospheres Beyond Classical Models*, edited by L. Crivellari, I. Hubeny, D. G. Hummer (Cluwer Academic Publishers, 1991), p. 61.
[10] O. Steiner, Astron. Astrophys. **242**, 290 (1991).
[11] L. Auer, P. Fabiani Bendicho, J. Trujillo Bueno, Astron. Astrophys. **292**, 599 (1994).
[12] H. M. Vath, Astron. Astrophys. **284**, 319 (1994).
[13] Л. Хайгеман, Д. Янг, *Прикладные итерационные методы* (Мир, Москва, 1986).
[14] Дж. Трауб, *Итерационные методы решения уравнений* (Мир, Москва, 1985).
[15] С. К. Годунов, В. С. Рябенький, *Разностные схемы* (Наука, Москва, 1977).

THE PROBLEM OF TWO–DIMENSIONAL RADIATIVE TRANSFER FOR MULTILEVEL ATOMS

M. Stodilka, R. Rykaliuk
The Ivan Franko State University of Lviv, Computer Center,
1 University Str., UA–290005, Lviv, Ukraine

The present paper deals with detailed analyses of radiative transfer and statistical equilibrium equations solution problem. The problem is solved by using multigrid techniques. This approach guarantees convergence to true solution since long periodical oscillations of the solution are being filtered, and the convergence itself becomes essentially improved. On each grid the solution is found by the accelerated Λ–iteration method. For the formal solution of the radiative transfer equation the short characteristics method is used. The method under the linear interpolation of source function gives a simple recurrent relationship for the radiation intensity which is spread in a given direction. For the statistical equilibrium equations the preconditioning procedure is used. Such a procedure ensures positive solutions and the equations themselves linearly depend on level populations which results in linear convergence. The ways of linear convergence improvement are described. Using the short characteristics approach the coefficients for local and quasilocal approximate Λ–operators have been obtained. In the latter the nearest neighbouring points conditions have been taken into account and that improves the operator quality.

Described techniques allow to study inhomogeneous astrophysical plasma.