ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 8, № 3 (2004) с. 211–222

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 8, No. 3 (2004) p. 211–222

КЛАСИФІКАЦІЯ РІВНЯНЬ РАРІТИ–ШВІНҐЕРА В РІМАНОВОМУ ПРОСТОРІ

Ю. М. Кудря
Астрономічна обсерваторія Київського національного університету імені Тараса Шевченка
вул. Обсерваторна, 3, Київ, 04053, Україна

(Отримано 2 липня 2004 р.; в остаточному вигляді — 29 жовтня 2004 р.)

Проблему сумісности в рімановому просторі рівнянь для пробного незарядженого масивного поля спіну 3/2 розглянуто у два-спінорному формалізмі з погляду точних сукупностей (за Пенроузом) спінорних полів. Рівняння Раріти–Швінґера узагальнено шляхом побудови всіх можливих лінійних диференціяльних співвідношень між двома частинами вектор-спінора Раріти–Швінґера. Проведено класифікацію узагальнених рівнянь, яка природно виникає при побудові точних сукупностей. Для тих випадків, коли це можливо, шляхом розгляду повного набору умов інтеґровности побудовано точні сукупності спінорних полів спінів 3/2 та 1/2. Розглянуто приклади різних форм рівнянь для масивного поля спіну 3/2, що трапляються в літературі. Доведено калібрувальну еквівалентність у просторах Айнштайна точних сукупностей на основі рівнянь Дірака–Фірца–Паулі та точних сукупностей на основі узагальнених рівнянь Раріти–Швінґера, незалежно від їх класу.

Ключові слова: рівняння Раріти–Швінґера, точні сукупності спінорних полів.

PACS number(s): 03.65.Pm

I. ВСТУП

Перше формулювання релятивістської теорії масивних полів довільного спіну дав Дірак [1] у термінах незвідних двовимірних спінорів. Узагальнення теорії Дірака в зовнішньому електромагнетному полі приводить, як це показали Фірц та Паулі [2], до виникнення умов сумісности, які взаємно обмежують структури поля Максвелла та поля великого спіну. Для досягнення сумісности, а також для можливости виведення рівнянь з варіяційного принципу Фірц та Паулі ввели, зокрема при розгляді полів спіну 3/2, додаткові поля спіну 1/2. Включення ґравітаційної взаємодії спричиняє подальші проблеми. Несумісність рівнянь Дірака–Фірца–Паулі у викривленому просторі-часі (ПЧ) загальної теорії відносности (ЗТВ) показав Бухдал [3]. Для сумісности рівнянь Бухдал також уводить додаткові поля менших спінів [4].

На сьогодні до опису полів спіну 3/2 загальноприйнятим є підхід Раріти–Швінґера [5]. У ньому використовується вектор-спінор, який є звідним представленням $(1,1)\otimes[(1/2,0)\oplus(0,1/2)]$ групи Лоренца та, отже, містить, крім незвідних полів спіну 3/2, також поля спіну 1/2.

На основі підходу Раріти–Швінґера розроблено декілька варіянтів лаґранжевих теорій поля спіну 3/2 та відповідних рівнянь Раріти–Швінґера (РРШ), що, зокрема, викликано неоднозначністю у виборі лаґранжіяна (див., наприклад, [6–10]). При цьому додаткові поля спіну 1/2 здебільшого вважають нефізичними і рівняння для вектор-спінора формулюють так, щоб позбутися їх. (Зауважимо, що в ориґінальному формулюванні [5] поля спіну 1/2 вилучаються додатковими умовами.) З іншого боку, є свідчення того, що для опису баріонних резонансів спіну 3/2 $\Delta\,(1232)$ та інших додаткові ступені вільности спіну 1/2 мають фізичний сенс [11,12]. Несумісність РРШ (принаймні найуживанішої їхньої версії [7]) у зовнішньому електромагнетному полі в ПЧ, що не є простором Айнштайна, спричиняє, як показано в роботі [13], аномальну поведінку розв'язків (відомі явища Джонсона–Судершана [14] та Вело–Цванціґера [7]).

За таких обставин постає питання про можливе розширення кола версій РРШ для отримання їхньої сумісної системи як у плоскому, так і в загальному викривленому ПЧ, у якій суттєву роль відігравали б поля спіну 1/2.

У нашій статті проблему сумісности рівнянь для масивних незаряджених полів спіну 3/2 розглянуто з погляду можливости побудови точних сукупностей (ТС, exact set) незвідних спінорних полів, які виникають при використанні вектор-спінора Раріти–Швінґера. Поняття ТС сформулював Пенроуз [15] для опису взаємодіючих спінорних полів. Концепція ТС безпосередньо пов'язана з два-спінорним формалізмом, але не поширилась належно внаслідок активнішого використання чотирикомпонентних спінорів Дірака. Побудова ТС є потрібною для однозначного подання розв'язків спінорних рівнянь методом коваріянтних рядів Тейлора та формулювання задачі з початковими даними на ізотропному конусі [15]. Приклади ТС можна знайти у книзі [15], а також у [16,17].

Ми не обмежуємося певною версією РРШ, а узагальнюємо їх на основі всіх можливих диференціяльних співвідношень між триндексними два-спінорами, які є частинами вектор-спінора Раріти–Швінґера. Відомі версії РРШ можна отримати як часткові випадки узагальнених РРШ.

У другому розділі роботи введено потрібні позначення, визначено ТС спінорних полів, подано умови інтеґровности (УІ) спінорних рівнянь у термінах незвідних квазідиференціяльних операторів для довільного поля у формі, зручній для аналізу ТС. (Докладніше див. у [18]). Обґрунтовано найзагальнішу форму РРШ у два-спінорному формалізмі у третьому розділі, де також наведено необхідні для подальшого УІ для полів спіну 3/2 та спіну 1/2. У четвертому розділі зроблено класифікацію узагальнених РРШ, яка природно з'являється при побудові ТС у довільному викривленому ПЧ ЗТВ. У тих випадках, коли це можливо, ТС побудовано. Приклади рівнянь для масивних полів спіну 3/2, які наявні в літературі, проаналізовано за побудованою класифікацією в п'ятому розділі. У шостому розділі показано калібрувальну еквівалентність підходів Дірака–Фірца–Паулі та Раріти–Швінґера до опису незаряджених полів у просторах Айнштайна ЗТВ. У висновках обговорено отримані результати.

II. ТОЧНІ СУКУПНОСТІ СПІНОРНИХ ПОЛІВ

Нехай у ПЧ $\{M, g\}$ ЗТВ існує незвідне (симетричне за нештрихованими та штрихованими індексами) спінорне поле $\xi_{A_1 \ldots A_m B'_1 \ldots B'_n}$ типу (m, n) спіну $s = (m+n)/2$ та спіральности $h = (n-m)/2$. Коваріянтна похідна від нього $\nabla_{EF'} \xi_{A_1 \ldots A_m B'_1 \ldots B'_n}$ є звідним спінорним полем типу $(m,n) \otimes (1,1)$. У загальному випадку вона розкладається на чотири незвідні складові:

$$(A\xi)_{A_1 \ldots A_m E B'_1 \ldots B'_n F'} = \nabla_{(F'|(E} \xi_{A_1 \ldots A_m)|B'_1 \ldots B'_n)},$$

$$(B\xi)_{A_2 \ldots A_m B'_1 \ldots B'_n E'} = \nabla^{X}_{(F'|} \xi_{X A_2 \ldots A_m | B'_1 \ldots B'_n)},$$

$$(C\xi)_{A_1 \ldots A_m E B'_2 \ldots B'_n} = \nabla^{X'}_{(E} \xi_{A_1 \ldots A_m) X' B'_2 \ldots B'_n},$$

$$(D\xi)_{A_2 \ldots A_m B'_2 \ldots B'_m} = \nabla^{XX'} \xi_{X A_2 \ldots A_m X' B'_2 \ldots B'_n}$$

типу $(m+1, n+1)$, $(m-1, n+1)$, $(m+1, n-1)$ та $(m-1, n-1)$ відповідно. (Індекси в дужках симетризовані, за винятком тих, що обмежені вертикальними рисками.) Оператор коваріянтного диференціювання визначає, отже, сукупність чотирьох квазідиференціяльних операторів $\{A, B, C, D\}$, і навпаки — за результатами дії цих операторів на деяке спінорне поле відновлюється його коваріянтна похідна. Дія A визначена при будь-яких m, n; B — при $m \geq 1$, C — при $n \geq 1$, D — при $m, n \geq 1$. У термінах незвідних операторів спінорні рівності є простішими, їхній сенс стає прозорішим. Для спрощення формул уводимо позначення $\langle \xi, \eta \rangle_{i,j}$ для згортки спінора ξ типу (m,n) зі спінором η типу (p,q) за i нештрихованими та j штрихованими індексами, $(i \leq min\{m, p\}, \quad j \leq min\{n, q\})$. При цьому приймаємо, що решта індексів симетризована та індекси підсумовування підняті у другого множника у згортці. Зокрема вираз $\langle \xi, \eta \rangle_{0,0}$ означає симетризований тензорний добуток спінорів ξ та η.

Нехай $\Sigma = \{\xi, \eta, \ldots\}$ є сукупністю спінорних полів різних спінів та спіральностей, які задовольняють деякі диференціяльні рівняння першого порядку з коваріянтними похідними. Сукупність Σ є точною сукупністю (ТС) спінорних полів за Пенроузом, якщо виконуються дві умови:

a) усі симетризовані незвідні похідні

$$\xi^{(k)} \equiv A^k \xi, \quad \eta^{(k)} \equiv A^k \eta, \ldots, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{2.1}$$

можуть бути довільно задані в будь-якій точці $p \in M$;
b) усі інші незвідні похідні всіх порядків визначаються за спінорами (2.1).

Сукупність $B = \left\{\xi^{(k)}, \eta^{(k)}, \ldots, k = 0, 1, \ldots\right\}$ утворює спінорний базис ТС Σ. З означення ТС випливає, що коваріянтні похідні $\nabla^k \xi, \nabla^k \eta, \ldots, k = 0, 1, \ldots$, можна визначити в термінах базису B. В аналітичному випадку це означає можливість обчислення спінтензорних коефіцієнтів коваріянтного розкладу Тейлора для полів із Σ в околі деякої точки $p \in M$, якщо базисні спінори фіксовані в цій точці.

Для побудови ТС нам потрібні будуть УІ спінорних рівнянь у формі комутаційних співвідношень між операторами A, B, C, D. Для їх отримання ми використовуємо спінорні тотожности Річі для довільного спін-вектора ζ^A у вигляді:

$$\Box_{EF} \zeta_A = \Psi_{AEFX} \zeta^X + 2\Lambda \varepsilon_{A(E} \xi_{F)};$$

$$\Box_{EF} \zeta_{A'} = \Phi_{EFA'X'} \zeta^{X'}, \tag{2.2}$$

де $\Box_{EF} = \nabla_{X'(E} \nabla^{X'}_{F)}$, $\quad \Psi_{ABCD}$ та $\Phi_{ABA'B'}$ — спінори Вейля та Річі відповідно, 24Λ — скалярна кривина. Тотожності Річі, що застосовані для довільного спінтензора ξ типу $(m,\ n)$, дають шість незвідних умов, які ми поділяємо на дві групи. Умовами першої групи є [18]:

$$B\xi^{(1)} = \frac{m}{m+1} AB\xi - n\langle \bar{\Psi}, \xi \rangle_{0,1} - m\langle \Phi, \xi \rangle_{1,0}, \tag{2.3}$$

$$C\xi^{(1)} = \frac{n}{n+1} AC\xi - m\langle \Psi, \xi \rangle_{1,0} - n\langle \Phi, \xi \rangle_{0,1}, \tag{2.4}$$

$$D\xi^{(1)} = \frac{n(n+2)(m+1)}{(n+1)(m-n)} BC\xi - \frac{m(m+2)(n+1)}{(m+1)(m-n)} CB\xi$$
$$+ \frac{m(m-1)(n+2)}{(m-n)} \langle \Psi, \xi \rangle_{2,0} - \frac{n(n-1)(m+2)}{(m-n)} \langle \bar{\Psi}, \xi \rangle_{0,2}$$
$$- mn\langle \Phi, \xi \rangle_{1,1} - (m+2)(n+2)\Lambda\xi. \tag{2.5}$$

Вони дають змогу обчислити B-, C- та D-компоненти похідних $\xi^{(1)} \equiv A\xi$ через поле ξ, спінори кривини та незвідні похідні від полів $B\xi, C\xi$, якщо останні є заданими. (Зауважимо, що умову (2.5) ми записали у зручному для нас вигляді при $m \neq n$; але існують форми цієї умови при $m = n$.) Аналогічні умови можна записати для базисного спінора $\xi^{(k)} \equiv A^k \xi$; тоді ці формули являтимуть собою формули диференціювання базисних спін-тензорів. Послідовне застосування формул диференціювання базисних спінорів дає змогу обчислити коваріянтні похідні спінорного поля, якщо відомі похідні першого порядку $B\xi, C\xi$.

Умовами другої групи є [18]:

$$DB\xi - \frac{n}{n+1}BD\xi + (m-2)\,\langle\Psi,\xi\rangle_{3,0} + n\langle\Phi,\xi\rangle_{2,1} = 0, \quad m \geq 2, \tag{2.6}$$

$$DC\xi - \frac{m}{m+1}CD\xi + (n-2)\,\langle\bar{\Psi},\xi\rangle_{0,3} + m\langle\Phi,\xi\rangle_{1,2} = 0, \quad n \geq 2, \tag{2.7}$$

$$CB\xi - BC\xi + (m-n)\left\{\frac{AD\xi}{(m+1)\,(n+1)} + \langle\Phi,\xi\rangle_{1,1} + \Lambda\xi\right\}$$

$$+\,(n-1)\,\langle\bar{\Psi},\xi\rangle_{0,2} - (m-1)\,\langle\Psi,\xi\rangle_{2,0} = 0, \quad m,n \geq 1. \tag{2.8}$$

Вони є диференціяльними обмеженнями для незвідних похідних $B\xi, C\xi, D\xi$ та виникають лише за вказаних умов на m та n.

Аналіз повної серії УІ (2.3-2.8) дає змогу побачити, що сукупність спінорних полів Σ=$\{\xi,\eta,\,\dots\}$ утворює ТС тоді та лише тоді, коли всі незвідні B-, C-, D-компоненти коваріянтних похідних $\nabla\xi, \nabla\eta, \dots$ визначено через самі поля з Σ і, можливо, їхні A-похідні, та коли УІ другої групи (2.6)–(2.8), що записані для кожного з полів із Σ, стають тотожностями з урахуванням указаних вище незвідних похідних [18]. Аналогічний підхід для дослідження ТС розроблено у праці [16].

Спінорні тотожності Біанкі в наших позначеннях мають вигляд:

$$a)\quad B\Psi = C\Phi; \qquad b)\quad D\Phi = -3A\Lambda. \tag{2.9}$$

Далі ми припускаємо, що поля спіну 3/2 та 1/2 є пробними та незарядженими, а фоновий викривлений ПЧ визначається полями спінорів кривини, що задовольняють тотожності Біанкі (2.9).

III. УЗАГАЛЬНЕНІ РІВНЯННЯ РАРІТИ–ШВІНҐЕРА

Нехай S є модулем спін-векторних полів на $\{M, g\}$ та S_* є модулем комплексно-спряжених полів. Розгляньмо такі два модулі спін-тензорних полів:

$$\mathrm{H} = S \otimes S \otimes S_*, \qquad \Theta = S \otimes S_* \otimes S_*. \tag{3.1}$$

У формулюванні Раріти–Швінґера масивне поле спіну 3/2 описується вектор-спінором ψ_α. У дваспінорному формалізмі він еквівалентний двом спінтензорам:

$$\psi_\alpha = \begin{pmatrix} \hat{\eta}_{AA'B} \\ \hat{\vartheta}_{AA'B'} \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Спінори $\hat{\eta}_{AA'B} \in \mathrm{H}$ та $\hat{\vartheta}_{AA'B'} \in \Theta$ у загальному випадку є звідними. Ми приймаємо такий їхній розклад на незвідні складові:

$$\hat{\eta}_{AA'B} = \eta_{ABA'} + \varepsilon_{AB}\rho_{A'}, \tag{3.3}$$

$$\hat{\vartheta}_{AA'B'} = \vartheta_{AA'B'} + \gamma_A\varepsilon_{A'B'}. \tag{3.4}$$

За допомогою оператора коваріянтного диференціювання та згортки зі спінорною метрикою можна визначити взаємні лінійні відображення модулів (3.1). Унаслідок звідности спінорів $\hat{\eta}_{AA'B}$ та $\hat{\vartheta}_{AA'B'}$ такі відображення неоднозначні. Далі ми запишемо найзагальнішу їхню форму, розглядаючи їх як диференціяльні співвідношення для незвідних компонент $\eta_{ABA'}, \vartheta_{AA'B'}$ спіну 3/2 та компонент $\rho_{A'}, \gamma_A$ спіну 1/2 полів $\hat{\eta}_{AA'B}$ и $\hat{\vartheta}_{AA'B'}$.

Відображення $\mathrm{H} \to \Theta$. Є шість варіянтів конструювання спін-тензора $\hat{\vartheta}_{AA'B'} \in \Theta$ з коваріантної похідної $\nabla_{AA'}\hat{\eta}_{BB'C}$ (беручи до уваги перестановку штрихованих індексів) шляхом згортки з контраваріянтною нештрихованою спінорною метрикою. Відповідні незвідні диференціяльні співвідношення мають вигляд:

$$a)\quad k_0 B\eta + k_1 A\rho = \vartheta, \quad b)\quad k_2 D\eta + k_3 C\rho = 2\gamma, \tag{3.5}$$

де коефіцієнти $k_i, i = 0, ..., 3$ для кожного з варіянтів згорток визначаються таблицею 1.

n	Згортка	k_0	k_1	k_2	k_3
1	$\nabla^X{}_{B'}\hat{\eta}_{AA'X}$	1	-1	1	-1
2	$\nabla^X{}_{A'}\hat{\eta}_{AB'X}$	1	-1	-1	1
3	$\nabla^X{}_{B'}\hat{\eta}_{XA'A}$	1	1	1	1
4	$\nabla^X{}_{A'}\hat{\eta}_{XB'A}$	1	1	-1	-1
5	$\nabla_{AB'}\hat{\eta}_{X A'}{}^X$	0	2	0	2
6	$\nabla_{AA'}\hat{\eta}_{X B'}{}^X$	0	2	0	-2

Таблиця 1. Коефіцієнти залежностей (3.5).

Загальне лінійне відображення Н $\to \Theta$ ми отримуємо заміною $k_i \to k_i = \sum_{j=1}^{6} k_i^j l_j$ у (3.5) з довільними (комплексними в загальному випадку) коефіцієнтами l_j . З урахуванням двох спінорних тотожностей (третій рядок у таблиці 1 є сумою першого та п'ятого, четвертий — другого та шостого) загальне відображення Н $\to \Theta$ є чотирипараметричним. Координатами такого відображення є в нашому випадку коефіцієнти k_i.

Візьмемо до уваги також можливість так званих контактних перетворень вектор-спінора Раріти–Швінґера (див., наприклад, [10]):

$$\psi_\alpha \to \psi_\alpha + d\gamma_\alpha\gamma_\beta\psi^\beta \tag{3.6}$$

з деяким параметром d. (Тут γ_α — гамма-матриці Дірака.) Ці перетворення при незмінності $\eta_{ABA'}, \vartheta_{AA'B'}$ означають рескалювання спін-векторів $\rho_{A'}$ та γ_A, що еквівалентно ототожненню лінійних комбінацій згорток з таблиці 1 не зі спінором $\hat\vartheta_{AA'B'}$, а зі спінором $\hat\vartheta_{AA'B'} + a\varepsilon_{A'B'}\hat\vartheta_{AX'}{}^{X'} \equiv (1+a)\,\hat\vartheta_{AA'B'} - a\hat\vartheta_{AB'A'}$, де параметр a зв'язаний з d (точний вигляд зв'язку залежить від два-спінорної форми матриць Дірака γ_α). Тоді найзагальніше відображення Н $\to \Theta$ є таким:

$$a)\ k_0 B\eta + k_1 A\rho = \vartheta, \quad b)\ k_2 D\eta + k_3 C\rho = k_4\gamma, \tag{3.7}$$

де $k_4 = 2\,(2a+1)$. (Для повноти розгляду ми не відкидаємо синґулярний випадок $a = -\frac{1}{2}$.) Співвідношення (3.7.b) відрізняється від загальної залежности трьох спін-векторних полів $D\eta, C\rho, \gamma$ завдяки сталим коефіцієнтам.

Відображення $\Theta \to$ Н приймаємо спряженим до Н $\to \Theta$. Тоді, роблячи у (3.7) заміну полів та операторів $\eta \leftrightarrow \vartheta, \quad \rho \leftrightarrow \gamma, \quad B \leftrightarrow C$ та комплексне спряження коефіцієнтів k_i, маємо загальне відображення $\Theta \to$ Н:

$$a)\ \bar k_0 C\vartheta + \bar k_1 A\gamma = \eta, \quad b)\ \bar k_2 D\vartheta + \bar k_3 B\gamma = \bar k_4\rho. \tag{3.8}$$

Унітарний множник комплексного числа k_0 завжди можна внести у спінори $\hat\eta_{AA'B}$ та $\hat\vartheta_{AA'B'}$, тоді k_0 можна вважати дійсним.

Співвідношення (3.7) та (3.8) (з дійсним k_0) ми називаємо узагальненими РРШ. Приклади їхніх окремих випадків буде наведено в розділі 5.

Далі, базуючись на рівняннях (3.7), (3.8), шляхом дослідження їхніх УІ ми будемо конструювати ТС полів, які міститимуть насамперед чотири незвідні складові $\eta_{ABA'}, \vartheta_{AA'B'}, \rho_{A'}, \gamma_A$ вектор-спінора Раріти–Швінґера та ще два поля спіну 3/2 $\zeta_{ABC}, \xi_{A'B'C'}$, що визначаються незвідними похідними полів $\eta_{ABA'}, \vartheta_{AA'B'}$:

$$a) \quad C\eta = \zeta, \quad b) \quad B\vartheta = \xi. \tag{3.9}$$

Для зручности ми також уводимо до розгляду поля спіну 1/2: диверґенції $\alpha_A, \mu_{A'}$ полів спіну 3/2

$$a) \quad D\eta = \alpha, \quad b) \quad D\vartheta = \mu \tag{3.10}$$

та ротори $\beta_A, \nu_{A'}$ полів спіну 1/2

$$a) \quad C\rho = \beta, \quad b) \quad B\gamma = \nu. \tag{3.11}$$

Рівняння (3.7.b) та (3.8.b) встановлюють лінійні залежності зі сталими коефіцієнтами між трьома полями $\alpha_A, \beta_A, \gamma_A$ спіральности $-1/2$ та трьома полями $\mu_{A'}, \nu_{A'}, \rho_{A'}$ спіральности 1/2. Побудовані нижче ТС міститимуть щонайбільше чотири поля спіну 3/2 та чотири з шести незалежні поля спіну 1/2. Побудова ТС означає визначення дванадцяти незвідних B-, C-, D-похідних

$$B\zeta, C\eta, D\eta, B\eta, C\vartheta, D\vartheta, B\vartheta, C\xi, B\beta, B\gamma, C\nu, C\rho \tag{3.12}$$

від восьми полів

$$\{\zeta_{ABC}, \eta_{ABA'}, \vartheta_{AA'B'}, \xi_{A'B'C'}, \beta_A, \gamma_A, \nu_{A'}, \rho_{A'}\},$$

якщо за незалежні прийняти поля β_A, γ_A та $\nu_{A'}, \rho_{A'}$. Далі за незалежні в деяких випадках ми будемо приймати також інші поля спіну 1/2, а саме, поля α_A, γ_A та $\mu_{A'}, \rho_{A'}$. Тоді у списку (3.12) слід замінити $B\beta$ на $B\alpha$ та $C\nu$ на $C\mu$.

Вихідні співвідношення (3.7)–(3.11) визначають щонайбільше вісім похідних

$$C\eta, D\eta, B\eta, C\vartheta, D\vartheta, B\vartheta, B\gamma, C\rho$$

зі списку (3.12). Решту похідних ми отримаємо з УІ вихідних рівнянь. Для чотирьох полів спіну 3/2 повний набір УІ другої групи (умов зв'язку) вигляду (2.6)–(2.8) складають такі шість умов:

$$DB\zeta + \langle\Psi, \zeta\rangle_{3,0} = 0; \tag{3.13}$$

$$CB\eta - BC\eta + \frac{1}{6}AD\eta - \langle\Psi, \eta\rangle_{2,0}$$

$$+\langle\Phi, \eta\rangle_{1,1} + \Lambda\eta = 0; \tag{3.14}$$

$$DB\eta - \frac{1}{2}BD\eta + \langle\Phi, \eta\rangle_{2,1} = 0; \tag{3.15}$$

$$BC\vartheta - CB\vartheta + \frac{1}{6}AD\vartheta - \langle\bar\Psi, \vartheta\rangle_{0,2}$$

$$+\langle\Phi, \vartheta\rangle_{1,1} + \Lambda\vartheta = 0; \tag{3.16}$$

$$DC\vartheta - \frac{1}{2}CD\vartheta + \langle\Phi, \vartheta\rangle_{1,2} = 0; \tag{3.17}$$

$$DC\xi + \langle\bar\Psi, \xi\rangle_{0,3} = 0. \tag{3.18}$$

Поля спіну $1/2$ умов зв'язку не дають. Для них повний набір УІ вичерпується умовами першої групи (2.3)–(2.5). Для спінорів $\alpha_A, \mu_{A'}$ спіральности $-1/2$ та $1/2$ вони мають відповідно вигляд:

$$
\begin{aligned}
&a) \quad BA\alpha = \frac{1}{2}AB\alpha - \langle\Phi, \alpha\rangle_{1,0};\\
&b) \quad CA\alpha = -\langle\Psi, \alpha\rangle_{1,0};\\
&c) \quad DA\alpha = -\frac{3}{2}CB\alpha - 6\Lambda\alpha; \qquad (3.19)\\
&a) \quad CA\mu = \frac{1}{2}AC\mu - \langle\Phi, \mu\rangle_{0,1};\\
&b) \quad BA\mu = -\langle\bar{\Psi}, \mu\rangle_{0,1};\\
&c) \quad DA\mu = -\frac{3}{2}BC\mu - 6\Lambda\mu. \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

Для інших полів спіну $1/2$ маємо аналогічні умови.

IV. КЛАСИФІКАЦІЯ РІВНЯНЬ РАРІТИ–ШВІНҐЕРА

Розгляньмо можливості побудови ТС, ґрунтуючись на узагальнених РРШ (3.7), (3.8). Похідні $B\eta, C\vartheta$ визначаються з (3.7.a) та (3.8.a), якщо $k_0 \neq 0$. У цьому випадку

$$a) \quad B\eta = m\vartheta + kA\rho, \quad b) \quad C\vartheta = m\eta + \bar{k}A\gamma, \qquad (4.1)$$

де позначено $m = k_0^{-1}$, $k = -k_1 k_0^{-1}$. Якщо до того ж $k_2 \neq 0$, то з (3.7.b) та (3.8.b) можна визначити похідні

$$a)\ D\eta = p\beta + q\gamma\,(\equiv \alpha)\,, \quad b)\ D\vartheta = \bar{p}\nu + \bar{q}\rho\,(\equiv \mu)\,, \quad (4.2)$$

де $p = -k_3 k_2^{-1}$, $q = k_4 k_2^{-1}$.

Підстановка похідних $B\eta$, $D\eta$, $C\vartheta$, $D\vartheta$ з (4.1), (4.2) в умови зв'язку (3.14) і (3.16) та врахування (3.19.a), (3.20.a) приводить до рівнянь для додаткових полів спіну $3/2$, що визначені у (3.9):

$$
\begin{aligned}
B\zeta = {}& (m^2 + \Lambda)\eta + \frac{1}{6}A\lambda - k\langle\Phi, \rho\rangle_{0,1}\\
&- \langle\Psi, \eta\rangle_{2,0} + \langle\Phi, \eta\rangle_{1,1}, \qquad (4.3.a)\\
C\xi = {}& (m^2 + \Lambda)\vartheta + \frac{1}{6}A\omega - \bar{k}\langle\Phi, \gamma\rangle_{1,0}\\
&- \langle\bar{\Psi}, \eta\rangle_{0,2} + \langle\Phi, \vartheta\rangle_{1,1}. \qquad (4.3.b)
\end{aligned}
$$

Тут уведено позначення для полів:

$$a) \quad \lambda \equiv \Delta_1\beta + \Delta_2\gamma, \qquad b) \quad \omega \equiv \bar{\Delta}_1\nu + \bar{\Delta}_2\rho, \qquad (4.4)$$

де також позначено сталі:

$$\Delta_1 \equiv p + 3k, \qquad \Delta_2 \equiv q + 6m\bar{k}. \qquad (4.5)$$

Підстановка похідних $B\eta$, $D\eta$, $C\vartheta$, $D\vartheta$ з (4.1), (4.2) в умови зв'язку (3.15) і (3.17) та врахування (3.19.c), (3.20.c) після деяких обчислень дають відповідно такі рівняння:

$$\Delta_1 B\beta = (2m\bar{p} - q)\,\nu + 2m\bar{q}\rho + 2K_1, \qquad (4.6.a)$$

$$\bar{\Delta}_1 C\nu = (2mp - \bar{q})\,\beta + 2mq\gamma + 2K_2, \qquad (4.6.b)$$

де через K_1 та K_2 позначено комітанти спінора Річі, скалярної кривини та незвідних складових векторспінора Раріти–Швінґера:

$$
\begin{aligned}
&a) \quad K_1 \equiv \langle\Phi, \eta\rangle_{2,1} - 6k\Lambda\rho,\\
&b) \quad K_2 \equiv \langle\Phi, \vartheta\rangle_{1,2} - 6\bar{k}\Lambda\gamma. \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

Решта умов зв'язку, а саме (3.13) та (3.18), стають тотожностями після підставляння похідних $B\zeta, C\xi$ з (4.3).

Випадок 1 (загальний). Таким чином, якщо $\Delta_1 \neq 0$, то дванадцять незвідних рівнянь (4.1), (4.2), (3.9), (3.11), (4.3), (4.6) із урахуванням позначень (4.4), (4.5) та (4.7) визначають усі дванадцять похідних списку (3.12) і, отже, вісім полів $\Sigma_1 = \{\zeta_{ABC}, \eta_{ABA'}, \vartheta_{AA'B'}, \xi_{A'B'C'}, \beta_A, \gamma_A, \nu_{A'}, \rho_{A'}\}$ утворюють ТС.

Випадок 2. Якщо $\Delta_1 = 0$, то рівняння (4.6) не визначають похідних $B\beta, C\nu$, а набирають вигляду:

$$a)\ \Delta_2\nu = 2m\bar{q}\rho + 2K_1, \quad b)\ \bar{\Delta}_2\beta = 2mq\gamma + 2K_2. \quad (4.8)$$

Якщо $\Delta_2 \neq 0$, то замість диференціяльних рівнянь для $\beta^A, \nu^{A'}$, як у випадку 1, (4.8) дають алґебраїчні вирази для цих полів через інші поля, і, отже, ці поля вилучаються зі сукупности полів. Замість (3.11) маємо рівняння:

$$
\begin{aligned}
&a) \quad B\gamma = 2\Delta_2^{-1}\,(m\bar{q}\rho + K_1)\,,\\
&b) \quad C\rho = 2\bar{\Delta}_2^{-1}\,(mq\gamma + K_2)\,, \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

а рівняння (4.2) набирають вигляду:

$$
\begin{aligned}
&a) \quad D\eta = \bar{\Delta}_2^{-1}(q\bar{q}\gamma - 6kK_2),\\
&b) \quad D\vartheta = {\Delta_2}^{-1}(q\bar{q}\rho - 6\bar{k}K_1). \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

У цьому випадку шість полів

$$\Sigma_2 = \{\zeta_{ABC}, \eta_{ABA'}, \vartheta_{AA'B'}, \xi_{A'B'C'}, \gamma_A, \rho_{A'}\}$$

утворюють ТС. Десять похідних

$$B\zeta, C\eta, D\eta, B\eta, C\vartheta, D\vartheta, B\vartheta, C\xi, B\gamma, C\rho$$

визначаються десятьма рівняннями (4.1), (3.9), (4.3) (з урахуванням позначень (4.4) при $\Delta_1 = 0$), (4.9), (4.10) (з урахуванням позначень (4.7)).

Випадок 3. Якщо на додаток до $\Delta_1 = 0$ покласти $\Delta_2 = 0$, то умови (4.8) перетворюються на алґебраїчні умови сумісности (умови Бухдала), які з урахуванням (4.7) можна записати так:

$$a)\quad 6\left(m^2+\Lambda\right)k\rho = \langle\Phi,\eta\rangle_{2,1}\,,$$

$$b)\quad 6\left(m^2+\Lambda\right)\bar{k}\gamma = \langle\Phi,\vartheta\rangle_{1,2}\,. \qquad (4.11)$$

Умови (4.11) є взаємними обмеженнями незвідних складових поля Раріти–Швінґера та спінорів кривини. Якщо ПЧ не є Айнштайновим, $\Phi \neq 0$, так само, як і $k \neq 0$, то (4.11) дають змогу алґебраїчно виразити поля $\gamma_A, \rho_{A'}$ спіну $1/2$ через поля $\eta_{ABA'}, \vartheta_{AA'B'}$, та, таким чином, виключити поля спіну $1/2$ зі сукупности полів, що розглядаються. Але побудова ТС у цьому разі є проблематичною або навіть неможливою. Справді, підстановка $\gamma_A, \rho_{A'}$ з (4.11) у вихідні РРШ (4.1) та (4.2) приводить до ситуації, коли похідні $B\eta, D\eta, C\vartheta, D\vartheta$, які спочатку були в лівих частинах рівнянь, з'являються після незвідних диференціювань комітантів $\langle\Phi,\eta\rangle_{2,1}$ та $\langle\Phi,\vartheta\rangle_{1,2}$ також у правих частинах рівнянь у вигляді згорток зі спінором Річі. Можливість алґебраїчного розв'язання цих рівнянь стосовно похідних $B\eta, D\eta, C\vartheta, D\vartheta$ та прийняття за незалежні A-похідні полів спіну $3/2$ залежить від алґебраїчної структури спінора Річі та має бути досліджена додатково. Це, однак, виходить за межі нашої роботи.

При $k = 0$ або $m^2 + \Lambda = 0$ (скалярна кривина при цьому мусить бути сталою) умови (4.11) набирають вигляду:

$$a)\quad \langle\Phi,\eta\rangle_{2,1} = 0, \qquad b)\quad \langle\Phi,\vartheta\rangle_{1,2} = 0. \qquad (4.12)$$

Тоді в загальних просторах ($\Phi \neq 0$) задовольнити умови Бухдала вибором полів $\gamma_A, \rho_{A'}$ неможливо, так само неможливо й побудувати ТС.

У ПЧ Айнштайна ($\Phi = 0$) є три можливості задовольнити умови Бухдала (4.11).

1) Якщо $m^2 + \Lambda = 0$ (у ПЧ Айнштайна скалярна кривина $R \equiv 24\Lambda$ є сталою), то поля $\gamma^A, \rho^{A'}$ можуть бути відмінними від нуля. Тоді маємо сукупність восьми полів $\{\zeta_{ABC}, \eta_{ABA'}, \vartheta_{AA'B'}, \xi_{A'B'C'}, \beta_A, \gamma_A, \nu_{A'}, \rho_{A'}\}$ з рівняннями:

$$a)\quad B\zeta = -\langle\Psi,\eta\rangle_{2,0}, \quad b)\quad C\eta = \zeta,$$

$$c)\quad D\eta = -3(k\beta + 2m\bar{k}\gamma), \quad d)\quad B\eta = m\vartheta + kA\rho,$$

$$e)\quad B\vartheta = m\eta + \bar{k}A\gamma, \quad f)\quad D\vartheta = -3(\bar{k}\nu + 2mk\rho),$$

$$g)\quad B\vartheta = \xi, \quad h)\quad C\xi = -\langle\bar{\Psi},\vartheta\rangle_{0,2},$$

$$i)\quad B\gamma = \nu, \qquad j)\quad C\rho = \beta. \qquad (4.13)$$

Рівняння (4.13) у цьому випадку є повним набором рівнянь, що містять вихідні рівняння та повну серію їхніх УІ. Але після врахування всіх УІ похідні $B\beta$ та $C\nu$ лишаються довільними, і, отже, сукупність полів $\{\zeta_{ABC}, \eta_{ABA'}, \vartheta_{AA'B'}, \xi_{A'B'C'}, \beta_A, \gamma_A, \nu_{A'}, \rho_{A'}\}$ не є ТС. Рівняння для полів $\beta^A, \nu^{A'}$, тобто вирази для похідних $B\beta$ та $C\nu$, або вирази для самих полів $\beta^A, \nu^{A'}$ можуть бути для отримання ТС заданими довільно. Наприклад, можна покласти $\beta_A = 0, \nu_{A'} = 0$, тобто вважати $\gamma^A, \rho^{A'}$ розв'язками рівнянь Вейля, тоді сукупність $\{\zeta_{ABC}, \eta_{ABA'}, \vartheta_{AA'B'}, \xi_{A'B'C'}, \gamma_A, \rho_{A'}\}$ стає ТС.

2) Якщо $k = 0$, то поля $\gamma^A, \rho^{A'}$, узагалі кажучи, відмінні від нуля, як і в попередньому випадку, але вони не входять у рівняння для чотирьох полів спіну $3/2$, тобто в цьому разі відокремлюється точна підсукупність $\Sigma_{3,0} = \{\zeta_{ABC}, \eta_{ABA'}, \vartheta_{AA'B'}, \xi_{A'B'C'}\}$ лише полів спіну $3/2$ з рівняннями:

$$a)\quad B\zeta = (m^2+\Lambda)\eta - \langle\Psi,\eta\rangle_{2,0}, \quad b)\quad C\eta = \zeta,$$

$$c)\quad D\eta = 0, \quad d)\quad B\eta = m\vartheta,$$

$$e)\quad B\vartheta = m\eta, \quad f)\quad D\vartheta = 0,$$

$$g)\quad B\vartheta = \xi, \quad h)\quad C\xi = (m^2+\Lambda)\vartheta - \langle\bar{\Psi},\vartheta\rangle_{0,2}. \quad (4.14)$$

При цьому поля спіну $1/2$ не утворюють ТС. Система рівнянь для них не визначена, вона складається лише з означень (3.11) полів $\beta_A, \nu_{A'}$.

3) Якщо $\gamma_A = 0, \quad \rho_{A'} = 0$, то тоді у просторах Айнштайна маємо ТС $\Sigma_{3,0}$ з рівняннями (4.14).

Випадок 4. Якщо $k_2 = 0,\ k_3 \neq 0$, то визначити з рівнянь (3.7.b), (3.8.b) похідні $D\eta \equiv \alpha$ та $D\vartheta \equiv \mu$ через інші поля спіну $1/2$ неможливо. У цьому разі ми вважаємо поля $\alpha_A, \mu_{A'}$ незалежними. Рівняння (3.7.b) та (3.8.b) тоді є лінійними залежностями між β_A, γ_A та $\nu_{A'}, \rho_{A'}$ або, що еквівалентно, дають рівняння:

$$a)\quad B\gamma = \bar{h}\rho, \quad b)\quad C\rho = h\gamma, \qquad (4.15)$$

де $h = k_4/k_3$. Поля $\beta_A, \nu_{A'}$ виключаються зі сукупности. УІ (3.14), (3.16) дають рівняння для $\zeta_{ABC}, \xi_{A'B'C'}$ у формі (4.3), але з іншими виразами для $\lambda_A, \omega_{A'}$:

$$a)\quad \lambda = \alpha + 3(2m\bar{k} + hk)\gamma,$$

$$b)\quad \omega = \mu + 3(2mk + \bar{h}\bar{k})\rho. \qquad (4.16)$$

УІ (3.15) та (3.17) набирають вигляду рівнянь для α_A та $\mu_{A'}$:

$$a)\quad B\alpha = 2m\mu - 3kh\bar{h}\rho + 2K_1,$$

$$b)\quad C\mu = 2m\alpha - 3\bar{k}h\bar{h}\gamma + 2K_2. \qquad (4.17)$$

Дванадцять незвідних рівнянь (4.1), (3.9), (3.10), (4.15), (4.17) та (4.3) з урахуванням (4.16) визначають усі дванадцять похідних від полів сукупности $\Sigma_4 = \{\zeta_{ABC}, \eta_{ABA'}, \vartheta_{AA'B'}, \xi_{A'B'C'}, \alpha_A, \gamma_A, \mu_{A'}, \rho_{A'}\}$, яка, таким чином, є ТС.

Випадок 5. Якщо $k_2 = 0$ та $k_3 = 0$, але $k_4 \neq 0$, то $\rho_{A'} = 0, \gamma_A = 0$, за незалежні приймаємо поля $\alpha_A, \mu_{A'}$ та приходимо до ТС шести полів $\Sigma_5 = \{\zeta_{ABC}, \eta_{ABA'}, \vartheta_{AA'B'}, \xi_{A'B'C'}, \alpha_A, \mu_{A'}\}$ із системою рівнянь, які отримуємо зі системи рівнянь випадку 4 при $k = 0$ та виключенням рівнянь (4.15).

Випадок 6. Якщо $k_2 = k_3 = k_4 = 0$, то за вихідні маємо лише рівняння (4.1). Відсутність будь-якої залежности між полями спіну 1/2 не дає змоги розділити похідні $B\alpha, B\beta$ та $C\mu, C\nu$ в УІ (3.15) та (3.17), які набирають форми:

$$a)\quad B(\alpha + k\beta) = 2m\mu + 2K_1,$$

$$b)\quad C(\mu + \bar{k}\nu) = 2m\alpha + 2K_2. \qquad (4.18)$$

З УІ (3.14) та (3.16) випливають рівняння (4.3) з

$$a)\quad \lambda = \alpha + 3k\beta + 6m\bar{k}\gamma,$$

$$b)\quad \omega = \mu + 3\bar{k}\nu + 6mk\rho. \qquad (4.19)$$

Отже, ми маємо дванадцять рівнянь (4.1), (3.9), (3.10), (3.11), (4.18), (4.3) з урахуванням (4.19), які визначають дванадцять із чотирнадцяти B-, C-, D-похідних для десяти полів $\{\zeta_{ABC}, \eta_{ABA'}, \vartheta_{AA'B'}, \xi_{A'B'C'},\ \alpha_A, \beta_A, \gamma_A, \mu_{A'}, \nu_{A'}, \rho_{A'}\}$. ТС можна отримати після накладання додаткових умов, які б розділили похідні $B\alpha, B\beta$ та $C\mu, C\nu$ у (4.18).

Якщо $k = 0$, то відокремлюється ТС $\{\zeta_{ABC}, \eta_{ABA'}, \vartheta_{AA'B'}, \xi_{A'B'C'}, \alpha_A, \mu_{A'}\}$ випадку 5, а система рівнянь для решти полів зводиться до визначень (3.11).

Для повноти розгляду ми беремо до уваги можливість виконати умову $k_0 = 0$, яка означає вилучення полів спіну 3/2 зі сукупности, оскільки з (3.7.a) та (3.8.a) маємо:

$$a)\quad \eta = \bar{k}_1 A\gamma \qquad b)\quad \vartheta = k_1 A\rho. \qquad (4.20)$$

УІ зв'язку (3.13)–(3.18) для цього випадку стають тотожностями з урахуванням УІ (3.19) та (3.20) для полів спіну 1/2. Підстановкою (4.20) у (3.7.b) та (3.8.b) отримуємо:

$$a)\quad 3\bar{k}_1 k_2 C\nu = 2k_3\beta - 2\left(k_4 + 6\bar{k}_1 k_2\Lambda\right)\gamma,$$

$$b)\quad 3k_1\bar{k}_2 B\beta = 2\bar{k}_3\nu - 2\left(\bar{k}_4 + 6k_1\bar{k}_2\Lambda\right)\rho. \qquad (4.21)$$

Випадок 7. Якщо $k_1 k_2 \neq 0$, то система (4.21) дає вираз для $C\nu, B\beta$. Разом з (3.11) ми маємо вирази для всіх чотирьох похідних $B\beta, B\gamma, C\nu, C\rho$ та, таким чином, сукупність $\{\beta_A, \gamma_A, \nu_{A'}, \rho_{A'}\}$ є ТС.

Випадок 8. Якщо $k_0 = 0$ та $k_1 k_2 = 0$, але $k_3 \neq 0$, то (4.21) дає змогу алґебраїчно визначити ν, β через ρ, γ. Тоді маємо рівняння вигляду (4.15) при $h = k_4/k_3$ та ТС двох полів$\{\gamma_A, \rho_{A'}\}$. Перевизначенням $\{\gamma_A, \rho_{A'}\}$ множник h можна зробити дійсним, тоді рівняння (4.15) є рівняннями Дірака.

Випадок 9. Якщо $k_0 = 0$, $k_1 k_2 = 0$, $k_3 = 0$, то або всі поля перетворюються в нуль, або для них не виникає ніяких рівнянь.

V. ПРИКЛАДИ СУКУПНОСТЕЙ РАРІТИ–ШВІНҐЕРА

У цьому розділі ми розглянемо з погляду побудованої класифікації версії рівнянь для масивних пробних незаряджених полів спіну 3/2, які трапляються в літературі.

5.1 У підході Дірака–Фірца–Паулі [1,2] масивне поле спіну 3/2 описується незвідними спінорами. У наших позначеннях - це спінори $\eta_{ABA'}, \vartheta_{AA'B'}$ з рівняннями:

$$a)\quad \nabla_{BA'}\eta^{B}{}_{AB'} = -m\vartheta_{AA'B'},$$

$$b)\quad \nabla_{AB'}\vartheta^{B'}{}_{BA'} = -m\eta_{ABA'}. \qquad (5.1)$$

Ці рівняння мають незвідну форму (4.1), (4.2) при

$$k = 0, \quad p = 0, \quad q = 0. \qquad (5.2)$$

У цьому разі $\Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0$ і отримуємо випадок 3 з обмеженнями Бухдала (4.12). У ПЧ Айнштайна — ТС $\Sigma_{3,0}$.

5.2. Симетризація індексів у лівих частинах рівнянь (5.1) дає змогу уникнути обмежень Бухдала (4.12). У такій формі рівняння використовували багато авторів (див., наприклад, [17]). Відповідні незвідні рівняння мають форму (4.1) з $k = 0$, рівняння (4.2) при цьому не з'являються. Маємо ТС випадку 5. Рівняння для цієї ТС автор раніше отримав у роботі [18].

5.3. У праці [19] лінеаризовані рівняння суперґравітації для поля спіну 3/2 записано в ПЧ Айнштайна в такій два-спінорній формі:

$$\nabla_{XA'}\hat{\eta}_{AB'}^{X} - \nabla_{AB'}\hat{\eta}_{XA'}^{X}$$
$$= ig\left[2\left(\hat{\eta}_{B'AA'}\right)^{*} - \left(\hat{\eta}_{A'AB'}\right)^{*}\right], \quad g^2 = -\Lambda, \qquad (5.3)$$

(зірочка тут означає комплексне спряження, яке також у простіших формулах позначається рискою).

Опис зроблено в термінах спінора Майорани у вигляді (3.2) з умовою:

$$\hat{\vartheta}_{AA'B'} = -i(\hat{\eta}_{AA'B})^{*}. \tag{5.4}$$

Незвідна форма рівняння (5.3):

$$a)\quad B\eta = -A\rho - ig\bar{\eta}; \qquad b)\quad D\eta = 3C\rho - 6ig\bar{\rho}. \tag{5.5}$$

Якщо відмовитися від умови (5.4), що означає заміну в (5.5) $-i\bar{\eta}, -i\bar{\rho}$ на ϑ, γ відповідно, то приходимо до рівнянь (4.1), (4.2) з параметрами:

$$m = g, \quad k = -1, \quad p = 3, \quad q = 6m. \tag{5.6}$$

Тоді $\Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0$ і ми маємо частковий випадок 3 зі сумісною системою рівнянь (4.13) для восьми полів, яку необхідно доповнювати для побудови ТС.

5.4 В ориґінальному формулюванні РРШ мають вигляд [5]:

$$\left(\gamma^{\alpha}\nabla_{\alpha} + m'\right)\psi_{\beta} = 0. \tag{5.7}$$

з додатковою умовою

$$\gamma^{\alpha}\psi_{\alpha} = 0. \tag{5.8}$$

Ми приймаємо для матриць Дірака такий два-спінорний запис [15]:

$$\gamma_{\varepsilon} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{EA}\varepsilon_{E'}{}^{B'} \\ \varepsilon_{E'A'}\varepsilon_{E}{}^{B} & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.9}$$

(при цьому $\gamma^{(\alpha}\gamma^{\beta)} = -g^{\alpha\beta}I$) та отримуємо два-спінорну форму рівнянь (5.7):

$$a)\quad \nabla_{BB'}\hat{\eta}_{AA'}^{\ \ B} = \frac{m'}{\sqrt{2}}\hat{\vartheta}_{AA'B'},$$

$$b)\quad \hat{\nabla}_{BB'}\hat{\vartheta}_{AA'}^{\ \ B'} = \frac{m'}{\sqrt{2}}\hat{\eta}_{AA'B}. \tag{5.10}$$

(Тут і далі ми перетворюємо різні записи РРШ у два-спінорний, використовуючи зображення гамма-матриць Дірака у просторі Мінковського, а потім узагальнюємо рівняння шляхом заміни часткової похідної коваріянтною.)

Рівняння (5.10) мають незвідну форму (4.1), (4.2) з параметрами:

$$m = -\frac{m'}{\sqrt{2}}, \quad k = 1, \qquad p = 1, \quad q = 2m. \tag{5.11}$$

При цьому $\Delta_1 \equiv p + 3k = 4 \neq 0$, і ми одержуємо перший випадок рівнянь та ТС $\Sigma_1 = \{\zeta_{ABC}, \eta_{ABA'}, \vartheta_{AA'B'}, \xi_{A'B'C'}, \beta_A, \gamma_A, \nu_{A'}, \rho_{A'}\}$ з двома парами полів спіну $1/2$.

Додаткові умови (5.8) означають $\gamma_A = 0, \quad \rho_{A'} = 0$, звідси також $\beta_A = 0, \quad \nu_{A'} = 0$. Тоді з (4.6) у загальних ПЧ отримуємо обмеження Бухдала (4.12). У ПЧ Айнштайна маємо ТС чотирьох полів спіну $3/2$ $\Sigma_{3,0} = \{\zeta_{ABC}, \eta_{ABA'}, \vartheta_{AA'B'}, \xi_{A'B'C'}\}$ з рівняннями (4.14). Зокрема звідси випливає, що формулювання Дірака–Фірца–Паулі, описане у розділі (5.1), є еквівалентним формулюванню Раріти–Швінґера з рівняннями (5.7) та (5.8), якщо врахувати повний набір УІ. Додаткові умови (5.8), крім того, що вони приводять до появи умов Бухдала та порушення точности сукупности полів, зазнають критики також з інших міркувань [20].

5.5. Ґ. Вело та Д. Цванціґер [7] використовували РРШ у такому вигляді (ми розглядаємо лише "незаряджений" варіант рівнянь):

$$\left(i\gamma_5\varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}\gamma^{\beta}\nabla_{\gamma} + m'\gamma_{\alpha}{}^{\ \delta}\right)\psi_{\delta} = 0, \tag{5.12}$$

де $\gamma^{[\alpha}\gamma^{\beta]} = \gamma^{\alpha\beta}$. Приймаючи для γ-матриць два-спінорну форму, як у (5.9), але з додатковим множенням правої частини на уявну одиницю i для забезпечення співвідношення $\gamma^{(\alpha}\gamma^{\beta)} = g^{\alpha\beta}I$, прийнятого в статті [7], та для γ_5 форму [15]:

$$i\gamma_5 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{A}{}^{B} & 0 \\ 0 & -\varepsilon_{A'}{}^{B'} \end{pmatrix},$$

ми отримуємо два-спінорний запис рівнянь (5.12):

$$\nabla_{BA'}\hat{\eta}_{AB'}^{\ \ B} - \nabla_{AB'}\hat{\eta}_{BA'}^{\ \ B} = \frac{m'}{\sqrt{2}}\left(\hat{\vartheta}_{AA'B'} - 2\hat{\vartheta}_{AB'A'}\right); \tag{5.13.a}$$

$$\nabla_{AB'}\hat{\vartheta}_{BA'}^{\ \ B'} - \nabla_{BA'}\hat{\vartheta}_{AB'}^{\ \ B'} = \frac{m'}{\sqrt{2}}\left(\hat{\eta}_{AA'B} - 2\hat{\eta}_{BA'A}\right). \tag{5.13.b}$$

Параметри незвідних рівнянь (4.1), (4.2) в цьому випадку такі:

$$m = \frac{m'}{\sqrt{2}}, \quad k = -1, \quad p = 3, \quad q = 6m. \tag{5.14}$$

Маємо $\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 0$ та належність до випадку 3 з обмеженнями Бухдала. Значення параметрів (5.14) такі, як у (5.6) прикладу (5.3), але тут немає додаткових умов $m^2 + \Lambda = 0$ та $\Phi = 0$.

Зауважимо, що в роботі Фрауендінера [13] помилково з (5.12) отримано два-спінорну форму, відмінну від (5.13) та не еквівалентну до (5.13). Але незвідні рівняння (4.1), (4.2) записані правильно, вони відповідають параметрам (5.14). Тому основний висновок роботи [13] про необхідність взяти до уваги умови Бухдала (4.11) (які для незаряджених полів збігаються з умовою (23) у [13]) раніше всіх інших розглядів є правильним.

5.6. Бухдал у праці [4] описує метод узагальнення рівнянь Фірца–Паулі для масивного поля довільного спіну шляхом уведення додаткових членів для забезпечення сумісности рівнянь у довільному ПЧ ЗТВ. Для спіну 3/2, узагальнюючи рівняння (5.1), він приходить до таких рівнянь (у наших позначеннях):

$$\nabla_{BA'}\eta^{B}{}_{AB'} = -m\vartheta_{AA'B'} + 2\nabla_{AB'}\rho_{A'} - \nabla_{AA'}\rho_{B'} + 3m\varepsilon_{A'B'}\gamma_A, \tag{5.15.a}$$

$$\nabla_{AB'}\vartheta_{BA'}^{\ \ B'} = -m\eta_{ABA'} + 2\nabla_{BA'}\gamma_A - \nabla_{AA'}\gamma_B + 3m\varepsilon_{AB}\rho_{A'}. \tag{5.15.b}$$

Ці рівняння еквівалентні до рівнянь (5.13), їх отримуємо з (5.13)з урахуванням розкладу на незвідні складові (3.3) та (3.4). Незвідна форма має параметри, як у (5.14). Зауважимо, що вирази для полів спіну 1/2, які подав Бухдал у рівнянні (4.3), еквівалентні обмеженням (23) Фрауендінера [13] та нашим виразам (4.11).

5.7. У [8] РРШ взято у вигляді:

$$\gamma^{\alpha\beta\gamma}\nabla_\beta\psi_\gamma + m_1\psi^\alpha + m_2\gamma^{\alpha\beta}\psi_\beta = 0. \tag{5.16}$$

де $\gamma^{\alpha\beta\gamma} = \gamma^{[\alpha}\gamma^\beta\gamma^{\gamma]}$. Застосовуючи для гамма-матриць вираз (5.9), отримуємо два-спінорну форму рівнянь (5.16):

$$\nabla_{BA'}\hat{\eta}_{AB'}^{\ \ B} - \nabla_{AB'}\hat{\eta}_{BA'}^{\ \ B} = \frac{m_2 - m_1}{\sqrt{2}}\hat{\vartheta}_{AA'B'} - \frac{2m_2}{\sqrt{2}}\hat{\vartheta}_{AB'A'}, \tag{5.17.a}$$

$$\nabla_{AB'}\hat{\vartheta}_{BA'}^{\ \ B'} - \nabla_{BA'}\hat{\vartheta}_{AB'}^{\ \ B'} = \frac{m_2 - m_1}{\sqrt{2}}\hat{\eta}_{AA'B} - \frac{2m_2}{\sqrt{2}}\hat{\eta}_{AB'A}. \tag{5.17.b}$$

Незвідні рівняння (4.1), (4.2) в цьому разі мають такі параметри:

$$m = \frac{m_1 + m_2}{\sqrt{2}}, \quad k = -1, \quad p = 3, \quad q = \sqrt{2}(3m_2 - m_1). \tag{5.18}$$

Тоді $\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = -4\sqrt{2}m_1$. Якщо $m_1 \neq 0$, то маємо випадок 2 з однією парою полів спіну 1/2. Якщо $m_1 = 0$, то приходимо до випадку 3, еквівалентного формі рівнянь Вело–Цванціґера [7].

5.8. Сучасна теорія масивного поля спіну 3/2 (див.,наприклад, [10]) ґрунтується на однопараметричній сім'ї лаґранжіянів $L = \bar{\psi}^\alpha L_{\alpha\beta}\psi^\beta$, де

$$L^{\alpha\beta} = O^{\alpha\beta}(a)\frac{i}{2}(\gamma_{\beta\gamma}\tilde{\nabla} + \tilde{\nabla}\gamma_{\beta\gamma})O^{\gamma\delta}(a) \tag{5.19}$$

та $\tilde{\nabla} = \gamma^\alpha\left(\nabla_\alpha + \frac{1}{4}im'\gamma_\alpha\right)$, $O_{\alpha\beta}\left(a\right) = g_{\alpha\beta}I + \frac{1}{4}\left(e^a - 1\right)\gamma_\alpha\gamma_\beta$. Польові рівняння

$$\left(\gamma_{\beta\gamma}i\tilde{\nabla} + i\tilde{\nabla}\gamma_{\beta\gamma}\right)O^{\gamma\delta}\left(a\right)\psi_\delta = 0 \tag{5.20}$$

мають такий два-спінорний запис (гамма-матриці вибираємо такими, як і у прикладі 5.5):

$$\nabla_{BA'}\hat{\eta}_{AB'}^{\ \ B} + \left(e^a - 2\right)\nabla_{AB'}\hat{\eta}_{BA'}^{\ \ B} + \frac{1}{2}\left(1 - e^a\right)\nabla_{AA'}\hat{\eta}_{BB'}^{\ \ B} = \frac{m'}{2\sqrt{2}}\left[\left(3e^a - 7\right)\hat{\vartheta}_{AB'A'} - \left(3e^a - 5\right)\hat{\vartheta}_{AA'B'}\right], \tag{5.21.a}$$

$$\nabla_{AB'}\hat{\vartheta}_{BA'}^{\ \ B'} + (e^a - 2)\,\nabla_{BA'}\hat{\vartheta}_{AB'}^{\ \ B'} + \frac{1}{2}\,(1 - e^a)\,\nabla_{AA'}\hat{\vartheta}_{BB'}^{\ \ B'} = \frac{m'}{2\sqrt{2}}\left[(3e^a - 7)\,\hat{\eta}_{BA'A} - (3e^a - 5)\,\hat{\eta}_{AA'B}\right]. \quad (5.21.b)$$

Параметри незвідних рівнянь (4.1) та (4.2):

$$m = -\frac{m'}{\sqrt{2}}, \quad k = e^a - 2, \quad p = -3k, \quad q = -6mk. \quad (5.22)$$

Рівняння належать до випадку 3 при будь-якому a. При $a = 0$ маємо вигляд рівнянь Вело–Цванціґера.

Зазначимо, що варіювання лаґранжіяна $L = \bar{\psi}^\alpha L_{\alpha\beta}\psi^\beta$ з $L_{\alpha\beta}$ у формі (5.22) за спряженим спінором $\bar{\psi}^\alpha$ дає, точно кажучи, не рівняння (5.20), а рівняння, що отримуються з (5.20) множенням зліва на $O^{\alpha\beta}(a)$. Тоді замість (5.21) одержуємо іншу два-спінорну форму рівнянь. При цьому незвідні рівняння (4.1) лишаються тими ж, а рівняння (4.2) будуть помноженими на $k = e^a - 2$. Отже, рівняння Ейлера–Лаґранжа для лаґранжіяна зі спінор-матрицею (5.19) містять також і синґулярний випадок $k = 0$, що еквівалентно прийняттю симетризованих рівнянь Дірака–Фірца–Паулі прикладу (5.2), які дають ТС випадку 5.

5.9. У роботі [9] використано РРШ у вигляді:

$$\left(\tilde{\nabla} + im'\right)\psi_\alpha - \frac{1}{3}\left(\nabla_\alpha\Gamma + \gamma_\alpha\nabla\bullet\psi\right)$$
$$+\frac{1}{3}\gamma_\alpha\left(\tilde{\nabla} - im'\right)\Gamma = 0, \quad (5.23)$$

де $\tilde{\nabla} = \gamma^\alpha\nabla_\alpha$, $\Gamma = \gamma^\alpha\psi_\alpha$, $\nabla\bullet\psi = \nabla^\alpha\psi_\alpha$. Використовуючи для гамма-матриць запис, як у прикладі 5.5, отримуємо два-спінорну форму (5.21) при $e^a = 7/3$.

5.10. Альтернативне до (5.19) подання однопараметричної сім'ї лаґранжіянів запропоновано в [6,12]:

$$L_{\alpha\beta} = \left(i\tilde{\nabla} - m'\right)g_{\alpha\beta} + 2ia\gamma_{(\alpha}\nabla_{\beta)}$$
$$+\ \frac{ib}{2}\gamma_\alpha\tilde{\nabla}\gamma_\beta + cm'\gamma_\alpha\gamma_\beta, \quad (5.24)$$

де a є довільним параметром, $2a + 1 \neq 0$, $b = 3a^2 + 2a + 1$, $c = 3a^2 + 3a + 1$, оператор $\tilde{\nabla}$ такий самий, як у попередньому прикладі 5.9. Два-спінорний запис польових рівнянь при $2a + 1 \neq 0$ має вигляд (5.21) при ототожненні:

$$e^{a_0} - 2 = k = 2a + 1, \quad (5.25)$$

де параметр a_0 є тим же параметром a, що й у прикладі 5.8. Так само, як і у прикладі 5.8, незвідні рівняння (4.2) треба додатково помножити на $k \equiv 2a + 1$, тобто незвідні рівняння містять також синґулярний випадок, який приводить до ТС випадку 5.

VI. КАЛІБРУВАЛЬНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ТС ДІРАКА–ФІРЦА–ПАУЛІ ТА РАРІТИ–ШВІНҐЕРА У ПРОСТОРАХ АЙНШТАЙНА

Неважко побачити, що в ПЧ Айнштайна ($\Phi_{ABA'B'} = 0$) у тих чотирьох випадках 1, 2, 4, 5, коли однозначно будуються ТС, у рівняннях для полів спіну $1/2$ зникають члени, що містять поля спіну $3/2$, тобто відокремлюються точні підсукупності полів спіну $1/2$, які, крім того, внаслідок сталости у ПЧ Айнштайна скалярної кривини, стають інваріянтними (за визначенням Р.Пенроуза) ТС. Для шостого випадку при $\Phi = 0$ з недовизначеної системи рівнянь для полів спіну $1/2$ також зникають члени з полями спіну $3/2$. Крім того, неважко показати, що в усіх цих п'яти випадках при $m^2 + \Lambda \neq 0$ калібрувальними перетвореннями полів спіну $3/2$

$$\eta \to \eta' = \eta + \frac{A\lambda}{6\,(m^2 + \Lambda)},$$
$$\vartheta \to \vartheta' = \vartheta + \frac{A\omega}{6\,(m^2 + \Lambda)} \quad (6.1)$$

та відповідними перетвореннями інших полів з рівнянь для полів спіну $3/2$ можна усунути члени, які містять поля спіну $1/2$. Поля $\lambda_A, \omega_{A'}$ мають вигляд, отриманий у розділі 4 (у випадку 1 вони визначаються рівняннями (4.4); у випадку 2 додатково треба прийняти $\Delta_1 = 0$; у випадку 4 — рівняннями (4.16); у випадку 5 додатково $k = 0$; у випадку 6 — рівняннями (4.19)). (Зауважимо, що наведені в (6.1) вирази для калібруючих спін-векторів відповідають тривіяльним розв'язкам твісторних рівнянь, які виникають у розгляді. Ми тим самим нехтуємо додатковими можливостями одержати роз'язки цих рівнянь у ПЧ Айнштайна типу N за Петровим–Пенроузом та в просторі сталої кривини. Докладніший розгляд калібрувальних перетворень ТС буде проведено в іншій праці.)

Після калібрування ми приходимо до ТС чотирьох полів спіну $3/2$ зі системою рівнянь (4.14), яка відповідає вихідним рівнянням Дірака–Фірца–Паулі (5.1). Отже, у всіх цих п'яти випадках у просторах Айнштайна побудовані ТС є калібрувально еквівалентними прямій сумі двох точних підсукупностей полів спіну 3/2 і полів спіну 1/2. Інакше кажучи, якщо у просторах Айнштайна відомі розв'язки рівнянь Дірака–Фірца–Паулі (5.1), то перетворення (6.1) дають розв'язки узагальнених рівнянь Раріти–Швінґера та відповідних додаткових рівнянь для полів спіну 1/2. У цьому сенсі використання в теорії звідного спінор-вектора Раріти–Швінґера еквівалентне використанню тільки незвідних полів спіну 3/2 у підході Дірака–Фірца–Паулі.

У третьому випадку у ПЧ Айнштайна, внаслідок умов Бухдала, поля спіну 1/2 при $m^2+\Lambda \neq 0$ та $k \neq 0$ перетворюються в нуль. Тобто і в цьому разі ми приходимо до ТС чотирьох полів спіну 3/2 із системою рівнянь (4.14) так само, як і у випадку $k = 0$, коли відокремлюється точна підсистема з рівняннями (4.14).

При $m^2 + \Lambda = 0$ у ПЧ Айнштайна калібрувальної еквівалентности двох підходів до опису масивних полів спіну 3/2 немає, рівняння є коректними для всіх випадків (у третьому випадку умови Бухдала задовольняються), ступені вільности спіну 1/2 є суттєвими.

У ПЧ, які не є просторами Айнштайна, калібрувальної еквівалентности, взагалі кажучи, немає, рівняння для полів спіну 1/2, внаслідок наявности членів зі згортками $\langle \Phi, \eta \rangle_{2,1}$ та $\langle \Phi, \theta \rangle_{1,2}$, не відокремлюються від повної системи рівнянь, і наявність додаткових ступенів вільности спіну 1/2 є суттєвою.

VII. ВИСНОВКИ

Ми отримали, що формальний підхід до конструювання РРШ для масивного незарядженого поля спіну 3/2 та розгляд можливости побудови ТС приводить до шести випадків сукупностей незвідних полів спіну 3/2 та 1/2 та двох випадків сукупностей лише полів спіну 1/2. Усіх їх можна звести в таблиці 2.

1	$k_0 \neq 0$	$k_2 \neq 0$	$\Delta_1 \neq 0$		ТС $\{\zeta, \eta, \vartheta, \xi, \beta, \gamma, \nu, \rho\}$
2			$\Delta_1 = 0$	$\Delta_2 \neq 0$	ТС $\{\zeta, \eta, \vartheta, \xi, \gamma, \rho\}$
3				$\Delta_2 = 0$	Обмеження Бухдала (4.11)
4		$k_2 = 0$	$k_3 \neq 0$		ТС $\{\zeta, \eta, \vartheta, \xi, \alpha, \gamma, \mu, \rho\}$
5			$k_3 = 0$	$k_4 \neq 0$	ТС $\{\zeta, \eta, \vartheta, \xi, \gamma, \rho\}$
6				$k_4 = 0$	Не ТС $\{\zeta, \eta, \vartheta, \xi, \alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu, \rho\}$
7	$k_0 = 0$	$k_1 k_2 \neq 0$			ТС $\{\beta, \gamma, \nu, \rho\}$
8		$k_1 k_2 = 0$	$k_3 \neq 0$		ТС $\{\gamma, \rho\}$
9			$k_3 = 0$		Тривіяльний випадок

Таблиця 2. Класифікація узагальнених РРШ.

Відсутність умов у клітині лівіше від першої умови в рядку означає виконання умов попереднього рядка.

Суттєвими є випадки (1–6), оскільки вони містять незвідні поля спіну 3/2, випадки (7–9) розглянуто для повноти класифікації узагальнених РРШ. У випадках 1, 2, 4, 5 із полями спіну 3/2 дослідження УІ вихідних рівнянь однозначно приводить до побудови ТС у довільному ПЧ. У двох із цих випадків (1 та 4) побудовані ТС містять, крім чотирьох полів спіну 3/2, також по дві пари полів спіну 1/2 різних спіральностей. У двох інших випадках (2 та 5) ТС містять одну пару полів спіну 1/2. РРШ у цих чотирьох випадках є математично коректними. Можливість фізичної інтерпретації цих ТС вимагає додаткового вивчення.

Більшість варіянтів рівнянь Раріти–Швінґера, які використовують у літературі (приклади 5.1, 5.3, 5.5, 5.6, 5.7 (при $m_1 = 0$), 5.8–5.10), належать випадку 3 за нашою класифікацією, коли побудова ТС у загальних ПЧ ЗТВ є проблематичною, якщо взагалі можливою. Така ситуація є наслідком появи умов Бухдала (4.11), які дають змогу в загальному випадку алґебраїчно визначити складові спіну 1/2 вектор-спінора Раріти–Швінґера через складові спіну 3/2 та спінор Річі (безслідову частину тензора Річі). Цим самим додаткові ступені вільности вилучаються зі сукупности полів, але платою за це є некоректність вихідних рівнянь Раріти–Швінґера внаслідок невизначености незвідних похідних полів спіну 3/2. Можливість їх визначення потребує додаткового дослідження залежно від алґебраїчної структури тензора Річі.

У просторах Айнштайна при $m^2 + \Lambda \neq 0$ для всіх шести класів 1–6 узагальнених РРШ з полями спіну 3/2 існує калібрувальна еквівалентність підходів Раріти–Швінґера та Дірака–Фірца–Паулі. Інакше кажучи, додаткові ступені вільности спіну 1/2, що з'являються в підході Раріти–Швінґера, є суттєвими лише в загальних ПЧ, що не є ПЧ Айнштайна. При цьому ті форми РРШ, які частіше використовуються (випадок 3), є математично некоректними. Натомість ми показали, що існують сумісні коректні форми РРШ (випадки 1, 2, 4, 5) з однією та двома парами полів спіну 1/2. Можливість фізичної інтерпретації таких форм РРШ вимагає додаткового вивчення.

Автор висловлює подяку О. М. Александрову за увагу до роботи.

Робота виконана за підтримки ґрантом NN43 Науково-технологічного центру України.

[1] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London **A155**, 447 (1936).
[2] M. Fierz, W. Pauli, Proc. Roy. Soc. London **A173**, 211 (1939).
[3] H. A. Buchdahl, Nuovo Cim. **10**, 96 (1958).
[4] H. A. Buchdahl, J. Phys. A: Math. Gen. **15**, 1057 (1982).
[5] W. Rarita, J. Schwinger, Phys. Rev. **60**, 61 (1941).
[6] P. A. Moldauer, K. M. Case, Phys. Rev. **102**, 279 (1956).
[7] G. Velo, D. Zwanziger, Phys. Rev. **186**, 1337 (1969).
[8] H. van Nieuwenhuizen, Phys. Rep. **68**, 189 (1981).
[9] P. G. Blunden, Y. Okuhara, A. S. Raskin, nucl-th/9710066.
[10] V. Pascalutsa, R. Timmermans, Phys. Rev. C **60**, 042201 (1999) (nucl-th/9905065).
[11] V. Pascalutsa, O. Scholten, Nucl. Phys. A **591**, 658 (1995).
[12] A. E. Kaloshin, V. P. Lomov, hep-ph/0307272.
[13] J. Frauendiener, J. Phys. A **36**, 8433 (2003) (math-ph/0207033).
[14] K. Johnson, E. C. G. Sudershan, Ann. Phys. (N. Y.) **13**, 126 (1961).
[15] Р. Пенроуз, В. Риндлер, *Спиноры и пространство-время. Т.1. Два-спинорное исчисление и релятивистские поля* (Мир, Москва, 1987).
[16] J. Frauendiener, G. A. J. Sparling, Proc. Roy. Soc. London A **443**, 409 (1993).
[17] J. Frauendiener, G. A. J. Sparling, J. Geom. Phys. **30**, 54 (1999) (gr-qc/9511036).
[18] Ю. Н. Кудря, Теор. мат. физ. **102**, 119 (1995).
[19] G. F. Torres del Castillo, J. Math. Phys. **30**, 1323 (1989).
[20] M. Kirchbach, D. V. Ahluwalia, hep-th/0108030.

A CLASSIFICATION OF THE RARITA–SCHWINGER EQUATIONS IN RIEMANNIAN SPACE

Yu. N. Kudrya

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Astronomical observatory
3, Observatorna St., Kyiv, UA–04053, Ukraine

The compatibility problem of the equations for noncharged massive test spin 3/2 fields is considered in two-spinor framework of general relativity from the point of view of exact sets (in concordance with Penrose) of spinorial fields. The Rarita–Schwinger equations are generalized basing on all possible linear differential relations between two parts of the Rarita–Schwinger vector-spinor. The classification of generalized equation that naturally follows from the exactly set construction are performed. In these cases, if it is possible, the exact sets of spin-1/2 and spin-3/2 fields are constructed by way of an investigation of intergability conditions of the initial spin 3/2 equations. Some examples of various form of the Rarita–Schwinger equations are considered with the view of their classification. In Einstein spaces the gauge equivalence of the exact set based on Dirac-Fierz-Pauli equations and the exact sets based on the generalized Rarita–Schwinger equations is shown regardless of their class.