

ПРИСКОРЕННЯ ЧАСТИНОК НА УДАРНИХ ХВИЛЯХ. СТАЦІОНАРНІ РОЗВ'ЯЗКИ КІНЕТИЧНОГО РІВНЯННЯ

О. Петрук

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С Підстригача,
вул. Наукова, 3б, Львів, 79060*

(Отримано 29 січня 2014 р.; в остаточному вигляді — 06 травня 2014 р.)

В огляді наведено методи розв'язання кінетичного рівняння, яке описує прискорення частинок в околі сильних ударних хвиль. Продано стаціонарні розв'язки одновимірного рівняння для ізотропної функції розподілу та паралельної ударної хвилі. Суттєвою особливістю наведених результатів є їх нелінійність: вони описують взаємний вплив прискорених частинок та течії.

Ключові слова: прискорення частинок, ударні хвилі, кінетичне рівняння.

PACS number(s): 96.50.Pw, 52.35.Tc

ВСТУП

Прискорення заряджених частинок нерелятивістськими ударними хвилями до значних енергій — важлива задача астрофізики високих енергій. Уперше можливість трансформації енергії рухомих магнітних неоднорідностей в енергію заряджених частинок продемонстрував Е. Фермі в середині ХХ століття [1, 2]. Модель, яку він розвинув, нині називається прискоренням Фермі другого роду, оскільки відносний приріст енергії $\Delta E/E$ пропорційний до другого степеня швидкості групового руху розсіювальних центрів. Згодом виявилось, що перспективнішою моделлю є прискорення частинок в околі фронтів ударних хвиль (УХ) [3–6], оскільки можливості реалізації цього механізму у Всесвіті значно ширші. Приріст енергії в цьому випадку пропорційний лише першому степеню середньої швидкості магнітних неоднорідностей, тому його називають механізмом прискорення Фермі першого роду.

Під час руху в околі УХ частинки по чергово розсіюються за фронтом та перед фронтом УХ. Середні швидкості руху неоднорідностей є різними по обидва боки УХ, більша — перед фронтом. Відтак у середньому збільшення енергії частинок унаслідок лобових зіткнень перед фронтом переважають над втратами енергії в навздогінних зіткненнях за фронтом УХ. Набір енергії за одиницю часу є відносно малим, проте впродовж тривалого часу частинки можуть здобути значних енергій. До прикладу, на УХ у залишках наднових зір протони можуть прискорюватися від енергій близько 10^3 eV до 10^{15} eV за ~ 1000 років.

Першим етапом дослідження прискорення частинок на УХ було знаходження розв'язків кінетичного рівняння на “фонової” гідродинамічній картині течії, коли частинки вважалися “тестовими”, тобто такими, що не впливають на властивості потоку. Такий підхід дозволив пояснити основну властивість спектра прискорених частинок, отриману експериментально. А саме, розподіл космічних променів за моментом p упродовж багатьох порядків за p є степеневим.

Грунтовними оглядами відповідних результатів є [7–11]. Проте розв'язки, одержані в “границі тестової частинки”, мають обмежене застосування.

У моделях походження космічних променів важливою є вимога того, щоб енергія прискорених на УХ частинок становила кількадесят відсотків кінетичної енергії потоку, який перегинає УХ. Такі втрати енергії повинні модифікувати течії з ударними хвилями, що суперечить самій ідеї “тестової частинки”. Згодом, з'явилися роботи з дослідженнями такого “ефективного” прискорення частинок на УХ. В огляді [12] підсумовано результати, отримані в цьому напрямку до 2001 року. Ці результати виявляли певні ефекти та властивості, проте аналітичного розв'язку цієї проблеми отримати не вдавалося тривалий час. Уперше описав ідею та одержав самоузгоджений аналітичний розв'язок нелінійного кінетичного рівняння П. Блазі 2002 року [13]. Відтоді він та його група завдяки новому підходу розв'язали ряд задач теорії прискорення частинок на паралельних УХ, які також чекали на своє розв'язання. Ці нові результати і є предметом нашого огляду.

І. УДАРНІ ХВИЛІ

Ударні хвилі — розриви в просторових розподілах гідродинамічних параметрів — досить поширене явище в земній фізиці та у Всесвіті. Нещодавно вийшов ґрунтовний огляд досліджень, пов'язаних із вивченням різних аспектів УХ [14].

Вишиємо основні співвідношення, що є корисними для цього огляду. Без обмеження загальності зорієнтуймо систему відліку так, щоб вісь x була паралельною до нормалі до поверхні ударної хвилі. Фронт УХ є в початку відліку. Плазма рухається в напрямку від $-\infty$ до $+\infty$. Індекс “1” стосується точки безпосередньо перед фронтом УХ ($x = -0$). Індекс “2” позначає точку відразу за фронтом УХ ($x = +0$). Індексом “o” позначатимемо значення на фронті УХ ($x = 0$), а “0” на $x = -\infty$.

На розривах у політропному газі виконуються умови [15]

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{(\gamma + 1)\mathcal{M}_1^2}{(\gamma - 1)\mathcal{M}_1^2 + 2} \quad (1)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma\mathcal{M}_1^2}{\gamma + 1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad (2)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{[2\gamma\mathcal{M}_1^2 - (\gamma - 1)] [2 + (\gamma - 1)\mathcal{M}_1^2]}{(\gamma + 1)^2\mathcal{M}_1^2}, \quad (3)$$

де $\mathcal{M} = u/c_a$ — число Маха, u — швидкість течії відносно фронту УХ, $c_a = (\gamma P/\rho)^{1/2}$ — швидкість звуку, ρ , P і T — густина, тиск і температура газу, γ — адіабатичний індекс. Між $\mathcal{M}_1 = u_1/c_{a1}$ і $\mathcal{M}_2 = u_2/c_{a2}$ існує симетричне співвідношення:

$$\mathcal{M}_2 = \frac{2 + (\gamma - 1)\mathcal{M}_1^2}{2\gamma\mathcal{M}_1^2 - (\gamma - 1)}. \quad (4)$$

Тиски та густини пов'язані так [15]:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{(\gamma - 1)\rho_1 - (\gamma + 1)\rho_2}{(\gamma - 1)\rho_2 - (\gamma + 1)\rho_1}. \quad (5)$$

А оскільки

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\rho_1 P_2}{\rho_2 P_1}, \quad (6)$$

то

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{(\gamma + 1) - (\gamma - 1)\rho_1/\rho_2}{(\gamma + 1) - (\gamma - 1)\rho_2/\rho_1}. \quad (7)$$

Важливою характеристикою УХ є стрибок густини, або фактор компресії,

$$\sigma \equiv \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad (8)$$

який дорівнює

$$\sigma = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1 + 2\mathcal{M}^{-2}}. \quad (9)$$

Для сильної УХ ($\mathcal{M} \gg 1$) це — універсальне число, яке визначається лише адаіабатичним індексом γ :

$$\sigma = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}. \quad (10)$$

Для сильної УХ спрощуються також інші співвідношення:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)} \quad (11)$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma\mathcal{M}_1^2}{\gamma + 1} \quad (12)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{P_2}{P_1} \quad (13)$$

Із двох останніх рівностей, означення числа Маха і рівняння стану газу $P = nkT$, випливає, що

$$T_2 = \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} \frac{\mu m_p}{k} u_1^2, \quad (14)$$

де μ — відносна маса однієї частинки, виражена в масах протона ($\rho = \mu m_p n$, n — концентрація); у чисто протонному газі, який тут розглядається, $\mu = 1$.

УХ за присутності магнітного поля з напруженістю B характеризує також альфвенівське число Маха $\mathcal{M}_A = u/v_A$, швидкість $v_A = B/\sqrt{4\pi\rho}$ називають альфвенівською. Високе альфвенівське число Маха означає, що густина теплової енергії газу є значно більшою за густину енергії магнітного поля.

Будемо розглядати взаємодію УХ із зарядженими елементарними частинками, а саме, прискорення протонів. Термін “наближення тестової частинки” позначає умови, коли прискорені частинки не впливають на систему, в якій еволюціонують. Якщо ж тиск прискорених частинок P_{cr} збільшується до такої міри, що починає впливати на течію перед фронтом (тиск P_1 перед фронтом УХ є не високим), тоді модифікується просторовий розподіл $u(x)$ перед фронтом УХ, що своєю чергою впливає на властивості прискорених частинок. Прискорення за таких умов називається нелінійним. Зазначимо, що за фронтом УХ тиск течії завжди суттєво вищий за тиск релятивістських частинок, тому вони не можуть модифікувати розподілу $u(x)$ за фронтом УХ доти, доки УХ є достатньо сильною, щоб забезпечити $P_2 \gg P_1$.

II. КІНЕТИЧНЕ РІВНЯННЯ

Розподіл частинок описується функцією $f(x, p)$, де x — просторова координата, p — імпульс частинки. У випадку ізотропії f частини вживається величина $N(x, p) = 4\pi p^2 f(x, p)$, яка задає концентрацію частинок з імпульсом p в точці з координатою x . Інтеграл

$$n_{cr}(x) = \int 4\pi p^2 f(x, p) dp \quad (15)$$

визначає концентрацію частинок з імпульсами в діапазоні інтегрування. Тиск та енергію частинок розраховуємо відповідно виразами:

$$P_{cr} = \int \frac{4\pi}{3} p^3 v(p) f(p) dp, \quad (16)$$

$$E_{cr} = \int 4\pi p^2 T(p) f(p) dp, \quad (17)$$

де v — швидкість частинки, T — її кінетична енергія. Адаіабатичний індекс релятивістських частинок обчислюємо як

$$\gamma_{cr} = 1 + P_{cr}/E_{cr}. \quad (18)$$

Детальне виведення кінетичного рівняння, яке описує поведінку функції розподілу f , подано в роботі [16] і в огляді [9]. Суттєво, що це рівняння отримано також кількома відмінними методами. Так, досить оригінально й наочно — у роботах [17,18]. Суттєво відмінний, “динамічний”, метод подано у [19]. Докладний розгляд взаємодії частинок і неоднорідностей поля використано для виведення рівняння в [20], а кінетична теорія дифузії — у [21].

Для одновимірного випадку, тобто коли розв’язок залежить лише від однієї просторової координати x , рівняння для ізотропної функції розподілу має вигляд:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D \frac{\partial f}{\partial x} \right] + \frac{1}{3} \frac{du}{dx} p \frac{\partial f}{\partial p} + Q. \quad (19)$$

Перший член рівняння описує еволюцію в часі, другий — перенос, третій — дифузію з коефіцієнтом дифузії D , четвертий член власне відповідає за прискорення Фермі першого роду, зумовлене змінами характеристик течії, п’ятий член описує джерела частинок, які прискорюються. Рівняння записане в системі відліку фронту УХ. Власними швидкостями розсіювальних центрів відносно елемента потоку нехтується, бо вони є порядку альфвенівської швидкості, яка для сильних УХ із великим альфвенівським числом Маха суттєво менша за швидкість потоку u .

Надалі нас цікавитимуть лише стаціонарні розв’язки цього рівняння, тобто такі, на які виходить система при $t \rightarrow \infty$. Тому умовою 1 на рівняння (19) є

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (20)$$

Інші умови, які будуть використані для отримання розв’язків, такі.

Умова 2. Інжекція частинок відбувається лише на фронті ударної хвилі (у точці $x = 0$):

$$Q = Q_o(p)\delta(x); \quad (21)$$

на додачу приймається, що інжекція моноенергетична (усі частинки, які починають прискорення, мають однаковий початковий імпульс p_i) та ізотропна:

$$Q_o(p) = \frac{\eta n_1 u_1}{4\pi p_i^2} \delta(p - p_i), \quad (22)$$

параметр η називається ефективністю інжекції, він задає відношення концентрації частинок, які будуть прискорені, до концентрації всіх, що перетинають фронт УХ у потоці $n_1 u_1$; типово це число від 10^{-5} до 10^{-3} .

Умова 3. Оскільки частинки під час прискорення розсіюються по чергово перед та за фронтом УХ, а сама УХ ніяк не змінює імпульсу частинок (перетинаючи УХ, вони продовжують обертатися довкола ліній магнітного поля, яке є паралельним до нормалі до УХ), то функція розподілу повинна бути неперервною при переході через фронт:

$$f_1 = f_2. \quad (23)$$

Умова 4. Функція розподілу є однорідною за фронтом УХ (на масштабах, які задіяні в процесі прискорення; а вони суттєво менші за масштаби неоднорідності потоку плазми за фронтом):

$$f(x) = \text{const}, \quad x > 0. \quad (24)$$

Умова 5. Граничні умови на великих відстанях перед УХ (куди не досягають частинки, прискорені на УХ) фіксують відсутність там деінде прискорених частинок:

$$f(-\infty) = 0, \quad (25)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{-\infty} = 0. \quad (26)$$

Зміни в розв’язку, зумовлені наявністю таких частинок, будуть розглянуті в розділі VII.

Умова 6. Умова однорідності течії за фронтом є природною (знову ж на масштабах, де відбувається дифузійне прискорення):

$$u(x) = \text{const}, \quad x > 0. \quad (27)$$

А от однорідність перед фронтом,

$$u(x) = \text{const}, \quad x < 0, \quad (28)$$

є основою для отримання розв’язку рівняння (19) в наближенні “тестової частинки”. Якщо ж прискорення є настільки ефективним, що тиск прискорених частинок $P_{cr1} \sim P_1$, тоді просторовий розподіл $u(x)$ перед фронтом УХ уже не буде однорідним, а це впливатиме на $f(x, p)$ — процес прискорення стає нелінійним. Далі розглядатимуться розв’язки як у наближенні тестової частинки, так і нелінійні розв’язки.

Запишемо тут також умову, яка разом з (27) і (28) визначає наближення “тестової частинки” (рис. 1):

$$\frac{du}{dx} = (u_2 - u_1)\delta(x). \quad (29)$$

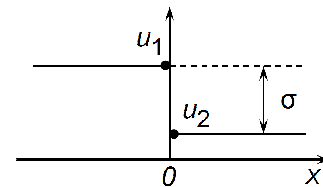


Рис. 1. Структура УХ.

III. РОЗВ’ЯЗОК У НАБЛИЖЕННІ ТЕСТОВОЇ ЧАСТИНКИ

Рівняння (19) спрощується в областях перед фронтом та за фронтом УХ. Там воно набуває вигляду

$$u \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} D \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (30)$$

Цей вираз фіксує відому рівність потоку переносу потокові дифузійному. Розв'язати це рівняння в області перед фронтом УХ можна, проінтегрувавши рівняння від $-\infty$ до якоїсь точки x . Розв'язок, який враховує, зокрема, умови (25) і (26), є таким (напр., [8, 9]):

$$f(x, p) = f_o(p) \exp \left[\int_0^x \frac{u(x') dx'}{D(x', p)} \right], \quad x < 0, \quad (31)$$

а розв'язок за фронтом з умови постійності $f(x)$ за фронтом УХ:

$$f(x, p) = f_o(p), \quad x > 0, \quad (32)$$

де $f_o(p)$ — функція розподілу на фронті УХ. Якщо D не залежить від x , то, оскільки u є також сталою перед фронтом, то

$$\begin{aligned} f(x, p) &= f_o(p) \exp \left(\frac{u_1 x}{D} \right), & x < 0, \\ f(x, p) &= f_o(p), & x > 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Щоб знайти $f_o(p)$, інтегруємо рівняння (19) від $x = -0$ до $x = +0$. Отримаємо:

$$\left[D \frac{\partial f}{\partial x} \right]_1 = \frac{1}{3} p \frac{\partial f_o}{\partial p} (u_2 - u_1) + Q_o(p). \quad (34)$$

Тут явно використано умову наближення "тестової частинки" (29), а також те, що

$$\int_{-0}^{+0} u \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int_{f_1}^{f_2} u df = 0, \quad (35)$$

бо $f_1 = f_2 = f_o$, і

$$\left[D \frac{\partial f}{\partial x} \right]_2 = 0 \quad (36)$$

завдяки умові однорідності $f(x)$ за фронтом УХ.

Вираз для першого члена в рівнянні (34) отримуємо відповідним диференціюванням розв'язку (31) у точці $x = -0$:

$$\left[D \frac{\partial f}{\partial x} \right]_1 = u_1 f_o. \quad (37)$$

Відтак із (34) одержуємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння для функції $f_o(p)$:

$$\frac{df_o}{dp} + \frac{s}{p} f_o = \frac{Q_o}{p} \frac{3}{u_1 - u_2}, \quad (38)$$

де введено позначення

$$s \equiv \frac{3u_1}{u_1 - u_2}. \quad (39)$$

Перш ніж перейти до розв'язку цього рівняння, зауважимо, що відповідне однорідне рівняння можна переписати у вигляді

$$-\frac{d \ln f_o}{d \ln p} = s, \quad (40)$$

тобто $f_o \propto p^{-s}$. Завдяки властивості УХ (8), показник степеня

$$s = \frac{3\sigma}{\sigma - 1} \quad (41)$$

є — у наближенні тестової частинки — універсальним числом.

Розв'язок неоднорідного рівняння (38) знаходимо відомим способом:

$$f_o(p) = \frac{\eta n_1}{4\pi p_1^3} \frac{3\sigma}{\sigma - 1} \left(\frac{p}{p_i} \right)^{-s}; \quad (42)$$

тут використано, зокрема, (22). Функція розподілу є степенною з показником степеня, який залежить лише від значення σ , що визначається адиабатичним індексом γ . А він може бути однаковим для сильних ударних хвиль багатьох масштабів: від УХ у Сонячній системі до УХ, що утворюються при зіткненні галактик. Відповідно спектр космічних променів є дуже близьким до степеневого впродовж багатьох порядків за імпульсами.

IV. ВЗАЄМНИЙ ВПЛИВ ЧАСТИНОК ТА ТЕЧІ. НЕЛІНІЙНИЙ РОЗВ'ЯЗОК

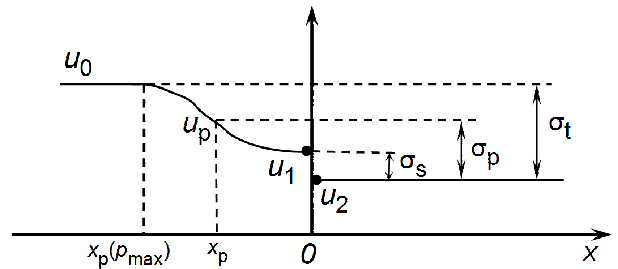


Рис. 2. Структура УХ, модифікованої прискореними частинками.

Коли прискорення достатньо ефективне, тиск прискорених частинок модифікує властивості течії перед фронтом УХ. Область, у якій це відбувається, називають прекурсором. Відстань x_p є оцінкою на максимальну віддаль, якої можуть досягнути частинки з імпульсом p . Відстані, на які переважно здатні дифундувати частинки з різними імпульсами, є різні: $x_p = x_p(p)$. Просторова протяжність прекурсора визначається максимальною відстанню, на яку здатні потрапити релятивістські частинки. Якщо коефіцієнт дифузії є зростаючою функцією моменту частинки, то максимальне значення $|x_p| \sim D/u$ досягається для частинок із моментом p_{max} . До якоїсь відстані $x = x_p(p)$ від УХ можуть потрапити лише частинки з імпульсами, більшими за p . Тому тиск прискорених частинок

$$P_{cr}(x_p) = \int_{p(x_p)}^{p_{max}} \frac{4\pi}{3} p'^3 v(p') f(x_p, p') dp' \quad (43)$$

зменшується з віддаленням від фронту УХ, а вплив частинок на течію зменшується. Так формується структура модифікованої УХ (рис. 2). У такій УХ виділяється тепловий фронт (англійською “subshock”) зі стрибком параметрів та фактором стиску $\sigma_s = u_1/u_2$ та прекурсор із плавною зміною в розподілі характеристик течії. Повний фактор компресії такої УХ $\sigma_t = u_0/u_2$. Доцільно ввести ефективний фактор $\sigma_p = u_p/u_2$, де u_p — величина, близька до швидкості потоку в околі точки x_p . Отже, на відміну від наближення тестової частинки, частинки з різними імпульсами “відчувають” різні фактори компресії УХ. Наголосимо ще раз на нелінійності такої картини: профіль швидкості впливає на спектр прискорених частинок, а вони, власне, і модифікують цей профіль.

З описаної картини можна якісно уявити, як саме може поводитися нелінійний спектр частинок за імпульсами. Якщо в наближенні “тестової частинки” він був степеневим зі сталим показником s , який залежить від величини σ , то в нелінійному випадку можна очікувати, що спектр можна наближено описувати степеневою функцією зі змінним показником $s(p)$. Оскільки частинки з більшим імпульсом здатні віддалятися від УХ на більші віддалі, то вони “відчуватимуть” ефективно вищі значення σ , тому й s зменшуватиметься зі зростом p , — спектр ставатиме пологішим.

А. Функція $f(x, p)$

Стационарний розв’язок $f(x, p)$ рівняння (19) складніший, ніж (31) у попередньому розділі, бо $u(x)$ вже не є сталою перед фронтом УХ. Скористаймося ідеєю, запропованою у [22]: проінтегруймо основне рівняння від $-\infty$ до якоїсь точки $x < 0$.

$$D \frac{\partial f}{\partial x} - \left[D \frac{\partial f}{\partial x} \right]_0 + \frac{1}{3} \int_{-\infty}^x \frac{du}{dx} p \frac{\partial f}{\partial p} dx + \int_{-\infty}^x Q_o(p) \delta(x) dx - \int_{-\infty}^x u \frac{\partial f}{\partial x} dx = 0. \quad (44)$$

Другий, унаслідок (26), і четвертий члени дорівнюють нулеві. Останній член ліворуч після інтегрування за частинками перетворюється на

$$- \int_{-\infty}^x u \frac{\partial f}{\partial x} dx = -u(x)f(x) + u_0 f_0 + \int_{-\infty}^x f \frac{du}{dx} dx. \quad (45)$$

Тут доданок $u_0 f_0 = 0$, а останній об’єднаємо з третім доданком у (44). Таким чином, отримаємо, замість (30), рівняння для $f(x, p)$:

$$uf - D \frac{\partial f}{\partial x} = Z, \quad (46)$$

де

$$Z(x, p) = \int_{-\infty}^x \frac{du(x')}{dx'} \left[f(x', p) + \frac{p}{3} \frac{\partial f(x', p)}{\partial p} \right] dx'. \quad (47)$$

Розв’язок цього лінійного неоднорідного рівняння для $x < 0$, замість (31), є (напр., [23, 25])

$$f(x, p) = f_o(p) \exp \left[\int_0^x \frac{u(x') dx'}{D(x', p)} \right] \times \left(1 + \int_x^0 \frac{dx'}{D(x', p)} \exp \left[\int_{x'}^0 \frac{u(x'') dx''}{D(x'', p)} \right] \frac{Z(x', p)}{f_o(p)} \right). \quad (48)$$

Для тестової частинки $du(x)/dx = 0$, тому $Z = 0$, і вираз (48) переходить у розв’язок (31).

У праці [22] запропоновано простішу формулу, яка апроксимує цей розв’язок для сталого в просторі коефіцієнта дифузії. Узагальнення цієї формули [23–25]

$$f(x, p) = f_o(p) \exp \left[\frac{s(p)}{3} \frac{(\sigma_s - 1)}{\sigma_s} \int_0^x \frac{u(x') dx'}{D(x', p)} \right] \quad (49)$$

де $s(p) = -d \ln f_o / d \ln p$ — локальний показник степеня функції $f_o(p)$, досить точно наближує розв’язок для довільної залежності D від x . Звертає на себе увагу простота виразу та значна подібність до випадку тестової частинки (31). Цю границю одразу отримуємо з апроксимації (49) підстановкою $\sigma_s = \sigma$.

В. Функція $f_o(p)$

Функцію $f_o(p)$ обчислюємо таким способом [13, 26]. Перший крок у пошуку функції $f_o(p)$ подібний до пошуку розв’язку в розділі III: інтегруємо основне рівняння від -0 до $+0$. Отримаємо знову рівняння (34), проте різниця $u_2 - u_1$ береться лише на стрибку. Наступним кроком інтегруємо рівняння (19) від $-\infty$ до -0 :

$$\left[D \frac{\partial f}{\partial x} \right]_1 - \left[D \frac{\partial f}{\partial x} \right]_0 + \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{-0} \frac{du}{dx} p \frac{\partial f}{\partial p} dx + \int_{-\infty}^{-0} Q_o(p) \delta(x) dx - \int_{-\infty}^{-0} u \frac{\partial f}{\partial x} dx = 0. \quad (50)$$

Другий і четвертий члени дорівнюють нулеві. Останній член ліворуч, після інтегрування за частинками:

$$- \int_{-\infty}^{-0} u \frac{\partial f}{\partial x} dx = -u_1 f_o + u_0 f_0 + \int_{-\infty}^{-0} f \frac{du}{dx} dx = -u_p f_o, \quad (51)$$

де використано $f_0 = 0$ та введено позначення

$$u_p = u_1 - \frac{1}{f_o} \int_{-\infty}^{-0} f(x, p) \frac{du}{dx} dx. \quad (52)$$

Помічаємо, що якщо у третьому члені $p \partial / \partial p$ винести за знак інтеграла, матимемо інтеграл, який є в означенні u_p (52). Тому цей доданок перетвориться в

$$\frac{p}{3} \frac{\partial}{\partial p} \int_{-\infty}^{-0} f \frac{du}{dx} dx = \frac{p}{3} \frac{\partial}{\partial p} [f_o(u_1 - u_p)] = \frac{p}{3} (u_1 - u_p) \frac{\partial f_o}{\partial p} - \frac{p}{3} f_o \frac{\partial u_p}{\partial p}. \quad (53)$$

Відтак, підставляючи (34), (51) і (53) в (50), одержуємо рівняння для функції $f_o(p)$ у випадку нелінійного прискорення (замість (38) у наближенні тестової частинки):

$$\frac{df_o}{dp} + \frac{s_p}{p} f_o = \frac{Q_o}{p} \frac{3}{u_p - u_2}, \quad (54)$$

де введено позначення

$$s_p \equiv \frac{3}{u_p - u_2} \left(u_p + \frac{p}{3} \frac{\partial u_p}{\partial p} \right). \quad (55)$$

За аналогією з виразом (40), однорідне рівняння, відповідне до (54), показує, що s_p є локальним показником степеня $f_o(p) \propto p^{-s_p}$. Проте тепер цей індекс змінюється з p та залежить від просторового профілю $u(x)$ перед фронтом УХ. Зручно подати його також у вигляді

$$s_p \equiv \frac{3\sigma_p}{\sigma_p - 1} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\partial \ln \sigma_p}{\partial \ln p} \right). \quad (56)$$

Розв'язок неоднорідного рівняння (54),

$$f_o(p) = \int_{p_i}^p \frac{dp''}{p''} \frac{3Q_o(p'')}{u_{p''} - u_2} \exp \left[- \int_{p''}^p s_{p'} \frac{dp'}{p'} \right] \quad (57)$$

після деяких перетворень матиме вигляд [13]:

$$f_o(p) = \frac{\eta n_1}{4\pi p_i^3} \frac{3\sigma_s}{\sigma_p - 1} \exp \left[- \int_{p_i}^p \frac{3\sigma_{p'}}{\sigma_{p'} - 1} \frac{dp'}{p'} \right]. \quad (58)$$

Суттєво, що розв'язок не залежить від коефіцієнта дифузії. Для незмінного $\sigma_p = \sigma_s = \sigma$ з цього розв'язку отримуємо розв'язок у наближенні тестової частинки (42).

V. ДОДАТКОВІ РІВНЯННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ

Незважаючи на те, що розв'язок кінетичного рівняння записано у вигляді формули (58), цей вираз не дозволяє розрахувати ані спектра прискорених частинок $f_o(p)$, ані профілю швидкості плазми $u(x)$, ані загального розв'язку $f(x, p)$. Річ у тому, що $f_o(p)$ і $u(x)$ взаємно залежать одне від одного. Необхідні додаткові рівняння, аби розв'язати таку задачу. Кінетичне рівняння слід доповнити рівняннями, які описують течію.

A. Наближена поведінка $f(x, p)$ та $P_{cr}(x)$

Із виразу (52) можна побачити, що величини x_p і u_p є не точними значеннями координати і швидкості потоку для частинок з імпульсом p , а лише наближеними оцінками. Річ у тому, що просторовий розподіл частинок із певним імпульсом не є функцією з різким обриванням на якійсь віддалі, а задається розподілом (49). Розрахунки показують, що x_p є певним

масштабом у розподілі $f(x)$: для більших віддалей від УХ, $x < x_p$, експоненційний член починає домінувати і $f(x)$ різко зменшується, а для менших віддалей експоненційний множник є близько одиниці. Тому наближено можна вважати, що $f(x, p) \sim f_o(p)$ аж до x_p (іншими словами: частинки з імпульсом p здебільшого знаходяться до цієї віддалі).

Тоді вираз (52) переписемо так [27]:

$$u_p \sim u_1 - \int_{x_p}^{-0} \frac{du}{dx} dx = u_1 - (u_1 - u(x_p)) = u(x_p). \quad (59)$$

Ця формула показує фізичний зміст величини u_p , але слід пам'ятати, що це — лише наближення.

Подібно можна одержати відносно просту формулу для тиску прискорених частинок у точці x . Точно тиск визначаємо формулою

$$P_{cr}(x) = \frac{4\pi}{3} \int_{p_i}^{p_{\max}} p'^3 v(p') f(x, p') dp', \quad (60)$$

де $f(x, p)$ задається виразом (49) (чи складнішим, але точнішим виразом (48)). Проте, якщо врахувати, що функція $f(x, p) \approx f_o(p)$ до відстані x_p , а далі різко спадає, то наближено можна замінити експоненційний член у $f(x, p)$ функцією Хевісайда (вона дорівнює 0 для від'ємного аргументу і 1 — для додатного):

$$\exp \left[\frac{s(p)}{3} \frac{(\sigma_s - 1)}{\sigma_s} \int_0^{x_p} \frac{u(x) dx}{D(x, p')} \right] \approx H(p' - p). \quad (61)$$

Тоді матимемо, що

$$P_{cr}(x_p) \approx \frac{4\pi}{3} \int_p^{p_{\max}} p'^3 v(p') f_o(p') dp'. \quad (62)$$

Тобто переважно лише частинки з імпульсами, більшими за p , можуть досягти точки $x > x_p$.

B. Рівняння для u

Одне з основних рівнянь отримуємо так [13,26]. Розглянемо рівняння неперервності та збереження імпульсу для точки, куди не досягають прискорені частинки, $x = -\infty$, та якоюсь точкою в прекурсорі $x < 0$:

$$\rho_0 u_0 = \rho u, \quad (63)$$

$$\rho_0 u_0^2 + P_0 = \rho u^2 + P + P_{cr}. \quad (64)$$

Поділімо останнє рівняння почленно на $\rho_0 u_0^2$

$$1 + \frac{P_0}{\rho_0 u_0^2} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{u^2}{u_0^2} + \frac{P}{\rho_0 u_0^2} + \frac{P_{cr}}{\rho_0 u_0^2}. \quad (65)$$

Другий доданок ліворуч, за означенням числа Маха, дорівнює $(\gamma M_0^2)^{-1}$. Перший праворуч, за використання рівняння неперервності, перетворюється на u/u_0 .

Для перетворення другого доданка праворуч приймімо, що потік еволюціонує адіабатично перед фронтом УХ:

$$P = P_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma. \quad (66)$$

Тоді цей член, із застосуванням означення числа Маха і закону неперервності, переписуємо так:

$$\tilde{P}_g \equiv \frac{P}{\rho_0 u_0^2} = \frac{1}{\gamma \mathcal{M}_0^2} \left(\frac{u_0}{u} \right)^\gamma. \quad (67)$$

Для тиску частинок використаємо наближений вираз (62):

$$\tilde{P}_{cr}(x_p) \equiv \frac{P_{cr}}{\rho_0 u_0^2} \approx \frac{4\pi}{3\rho_0 u_0^2} \int_p^{p_{max}} p'^3 v(p') f_o(p') dp'. \quad (68)$$

Уведемо позначення $U(p) \equiv u_p/u_0$. Тоді (65) запишемо як

$$1 + \frac{1}{\gamma \mathcal{M}_0^2} = U + \tilde{P}_g + \tilde{P}_{cr}. \quad (69)$$

Підставивши сюди \tilde{P}_g і продиференціювавши за p , отримуємо

$$\frac{dU}{dp} \left[1 - \frac{U^{-(\gamma+1)}}{\mathcal{M}_0^2} \right] + \frac{d\tilde{P}_{cr}}{dp} = 0. \quad (70)$$

І, взявши похідну від \tilde{P}_{cr} та домноживши на p , матимемо інтегро-диференціальне рівняння для функції $U(p)$ [13, 26]:

$$p \frac{dU}{dp} \left[1 - \frac{U^{-(\gamma+1)}}{\mathcal{M}_0^2} \right] = \frac{4\pi}{3\rho_0 u_0^2} p^4 v(p) f_o(p), \quad (71)$$

де замість $f_o(p)$ підставляємо розв'язок (58) кінетичного рівняння (19), яке перепишемо у зручному для цього місця вигляді ($\sigma_p = U\sigma_t$, $n_1 = n_0\sigma_t/\sigma_s$)

$$f_o(p) = \frac{\eta n_0}{4\pi p_i^3} \frac{3\sigma_t}{\sigma_t U(p) - 1} \exp \left[- \int_{p_i}^p \frac{3\sigma_t U(p')}{\sigma_t U(p') - 1} \frac{dp'}{p'} \right]. \quad (72)$$

Знайшовши $U(p)$ з (71)-(72), з (72) можна знайти спектр частинок $f_o(p)$.

Це рівняння можна розв'язати чисельно, використавши очевидні граничні умови:

$$U(p_i) = \sigma_s/\sigma_t, \quad U(p_{max}) = 1. \quad (73)$$

Розв'язуємо так: приймаємо якесь початкове значення σ_s , за ним визначаємо значення σ_t , відтак з рівняння (71)-(72) шукаємо функцію $U(p)$ та перевіряємо значення $U(p_{max})$. Якщо воно не дорівнює 1, процедуру повторюємо із новим початковим значенням σ_s доти, поки не знайдемо таку $U(p)$, що забезпечить $U(p_{max}) = 1$. Це і є шуканий розв'язок.

Аби здійснити цю процедуру, слід знати, як пов'язані між собою σ_s і σ_t .

С. Рівняння зв'язку між σ_s і σ_t

Вираз зв'язку між σ_s і σ_t знайдено в [13, 26]. На розриві виконуємо співвідношення

$$\sigma_s = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1 + 2\mathcal{M}_1^{-2}}. \quad (74)$$

З означення числа Маха можна записати співвідношення між тиском, густиною та швидкістю газу відносно фронту УХ:

$$P = \frac{\rho u^2}{\gamma \mathcal{M}^2}. \quad (75)$$

Якщо газ еволюціонує адіабатично в області перед УХ (це те саме припущення, що використовувалося для (67)), то

$$P_1 = P_0 \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \right)^\gamma. \quad (76)$$

Підставивши сюди (75) та використавши закон неперервності потоку $\rho_1 u_1 = \rho_0 u_0$, матимемо

$$\mathcal{M}_1^2 = \mathcal{M}_0^2 \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_t} \right)^{\gamma+1}. \quad (77)$$

Підстановка (77) в (74) дає шуканий вираз зв'язку між факторами стиску [13, 26]:

$$\sigma_t^{\gamma+1} = \frac{\mathcal{M}_0^2 \sigma_s^\gamma}{2} [\gamma + 1 - \sigma_s(\gamma - 1)]. \quad (78)$$

Д. Додатковий зв'язок між параметрами

Розв'язок $U(p)$ рівняння (71)-(72) та функція $f_o(p)$, що задається (72), залежать від кількох параметрів: число Маха \mathcal{M}_0 , концентрація середовища, у якому поширюється УХ, n_0 , швидкість УХ, яка дорівнює швидкості потоку відносно фронту u_0 , максимальний і початковий імпульси p_{max} і p_i та η . Зауважимо, що $U(p)$ не залежить від густини. \mathcal{M}_0 , n_0 , u_0 — це параметри, які задаються властивостями середовища, у якому поширюється УХ, та властивостями самої УХ. Значення інших величин: p_{max} , p_i та η могли б бути вільними параметрами задачі.

Виявляється, що рівняння може мати не лише один розв'язок. Детально розглянуто цю проблему в [26]. Цю властивість демонструє рис. 3. Розв'язками є лише точки перетину кривих з лінією $U = 1$. Для малих чисел Маха існує лише один розв'язок, який наближається до лінійного розв'язку в границі тестової частинки ($\sigma_t = 4$). Зі збільшенням числа Маха для певного діапазону значень \mathcal{M}_0 існує три розв'язки, один з яких збігається з лінійним випадком, а два інші відповідають достатньо високим значенням σ_t , що вказує на сильну модифікацію УХ прискореними частинками. При подальшому збільшенні \mathcal{M}_0 залишається лише лінійний розв'язок. Подібну тенденцію

спостерігаємо при збільшенні η : зростання цього параметра приводить до кількох розв'язків, а при великих η розв'язок знову один, але він відповідає суттєво модифікованій УХ. У випадку кількох розв'язків слід було б аналізувати їх стабільність; фізичний розв'язок повинен бути стійким до незначних збурень. У [26] використано інший підхід: увести в модель додаткові процеси саморегуляції, які обмежуватимуть появу кількох розв'язків. А саме, запропоновано додаткове співвідношення: простий зв'язок між параметрами η , σ_s і p_i .

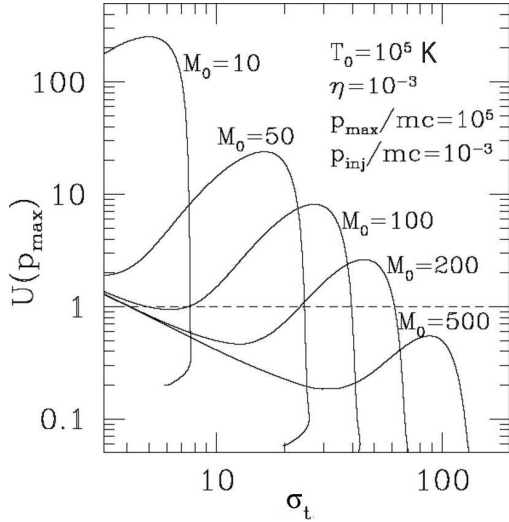


Рис. 3. $U(p_{\max})$ залежно від σ_t [26]. Розв'язки — точки кривих, які відповідають $U(p_{\max}) = 1$.

Прийнято, що

$$p_i = \xi p_{\text{th}}, \quad (79)$$

де p_{th} — момент у максимумі Максвеллівського розподілу $f_M(p)$ плазми, нагрітої УХ до температури T_2 , ξ — коефіцієнт, близький до 3.6. Це значення визначається умовою, що всі частинки з хвоста Максвеллівського розподілу з $p \geq p_i$ будуть інжектвані (розпочнуть прискорення), а їх частка повинна дорівнювати $\eta \sim 10^{-5} - 10^{-3}$:

$$\eta = n_2^{-1} \int_{\xi p_{\text{th}}}^{\infty} 4\pi p^2 f_M(p) dp. \quad (80)$$

Усі інжектвані частинки, коли вони будуть прискорені, утворять розподіл $f_o(p)$, тому

$$\eta = n_2^{-1} \int_{p_i}^{p_{\max}} 4\pi p^2 f_o(p) dp. \quad (81)$$

Прирівнявши (80) і (81) та продиференціювавши $d\eta/dp_i$, отримаємо умову неперервності функції розподілу

$$f_M(p_i) = f_o(p_i), \quad (82)$$

з якої й впливає очікуваний зв'язок. А саме: для функцій розподілу в змінних $y = p/p_{\text{th}}$, записаних для $y = \xi$, це буде:

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \xi^2 \exp(-\xi^2) = \frac{\eta}{\xi} \frac{3}{\sigma_s - 1}. \quad (83)$$

А отже, шуканий вираз [26]:

$$\eta = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (\sigma_s - 1) \xi^3 \exp(-\xi^2). \quad (84)$$

Умова (84), попри свою простоту, якісно правильно здійснює саморегуляцію між вільними параметрами задачі. Так, при сильній модифікації УХ прискореніми частинками $\sigma_s \rightarrow 1$. Тоді, як видно з (84), η зменшується, обмежуючи кількість частинок, що прискорюватимуться, їх тиск, а тому й подальшу модифікацію УХ. Детальне дослідження простору параметрів на можливість появи кількох розв'язків [26] показує, що область простору параметрів, які допускають кілька розв'язків, суттєво звужується за наявності такої “саморегуляції” (рис. 8 у цитованій праці).

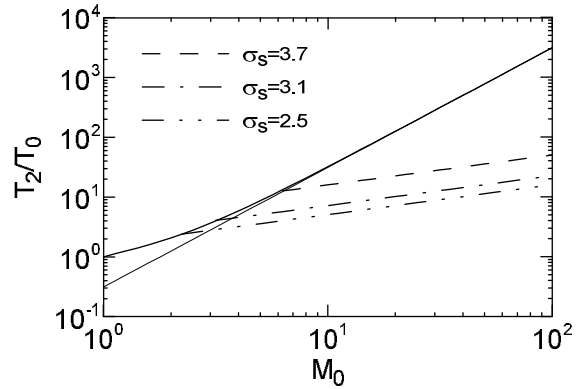


Рис. 4. Відношення температур T_2/T_0 . Товста суцільна лінія — розраховане для немодифікованої УХ з (3). Тонка суцільна лінія — те саме, але в границі сильної УХ, за (12) і (13). Пунктирні криві — для УХ зі зворотним впливом прискорених частинок, вираз (86), для трьох значень σ_s .

Певне значення ξ фіксує початковий момент p_i згідно з (79). Момент $p_{\text{th}} = (2mkT_2)^{1/2}$. Якщо газ у прекурсорі еволюціонує адіабтично $P \propto \rho^\gamma$, то

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{P_1 \rho_0}{P_0 \rho_1} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{\sigma_t}{\sigma_s}\right)^{\gamma-1}. \quad (85)$$

Відношення T_2/T_1 на стрибку задається виразом (7). Тому значення температури за фронтом УХ, яке необхідне для розрахунку p_i ,

$$T_2 = T_0 \left(\frac{\sigma_t}{\sigma_s}\right)^{\gamma-1} \frac{(\gamma+1) - (\gamma-1)\sigma_s^{-1}}{(\gamma+1) - (\gamma-1)\sigma_s}. \quad (86)$$

Відношення T_2/T_0 , розраховане за цією формулою, зображено на рис. 4 для кількох значень σ_s . Для порівняння показано також стандартну залежність для немодифікованої УХ. Бачимо, що позаду УХ, на яку вплинули прискорені частинки, температура газу є значно нижчою, ніж у звичайній УХ. Ці відмінності зростають зі збільшенням числа Маха та ступенем модифікації УХ (зменшенням фактора стиску σ_s). Причиною є те, що значна частина кінетичної енергії потоку передається прискореним частинкам, а тому їй бракує для нагріву газу.

VI. ЧИСЕЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ

Отже, $U(p)$ та $f_o(p)$ визначаємо лише п'ятьма параметрами: $M_0, u_0, n_0, p_{\max}, \xi$. Температуру зовнішнього середовища T_0 , яка потрібна для встановлення p_i , однозначно визначаємо з M_0, u_0 . Для розрахунків деколи зручно задати саме її як вхідний параметр. Тоді з означення числа Маха та $P_0 = n_0 k T_0$:

$$u_0^2 = \frac{M_0^2 \gamma k T_0}{\mu m}. \quad (87)$$

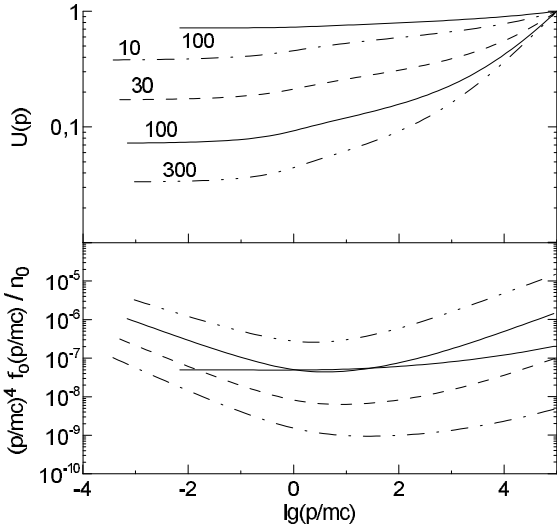


Рис. 5. $U(p)$ і $f_o(p)$ для кількох значень M_0 , які вказано числами біля відповідних кривих. Розрахунки проведено для $\xi = 3.6, p_{\max} = 10^5 mc, T_0 = 10^4$ К. Тонкі суцільні лінії відповідають випадку $\xi = 4$ і $M_0 = 100$.

На рис. 5 показано функцію розподілу $f_o(p)$, розраховану за описаною методикою, для кількох випадків. Відповідні характеристики наведено в таблиці.

Розподіл $U(p)$ відрізняється від однорідного, що є наслідком впливу прискорених частинок. Такий розподіл впливає відповідно на форму $f_o(p)$. Степеневий розподіл у границі тестової частинки $f_o(p) \propto p^{-4}$ був би горизонтальною лінією на нижньому графіку. Бачимо, що нелінійний спектр $f_o(p)$ відрізняється від такої залежності. На високих енергіях локальний показник спектра s_p є меншим за 4 (спектр пологіший), що є наслідком великих значень σ_p . Натомість на малих p спектр є крутіший, $s_p > 4$, унаслідок малих значень фактора компресії, який "відчувають" частинки з малими імпульсами. Цей ефект узгоджується з формулою (56).

Зі збільшенням M_0 роль нелінійних ефектів зростає. Це помітно в сильнішому відхиленні $U(p)$ від однорідності, у "вигині" спектра $f_o(p)$, у відповідному зменшенні σ_s і зростанні σ_t й відтак у зростанні амплітуди $f_o \propto \sigma_t \eta p_i / (\sigma_s - 1)$. Повний фактор стиску УХ σ_t може досягати в розрахунках досить високих значень, аж до 100, що означає надзвичайно сильну модифікацію УХ прискореними частинками. Тиск прискорених частинок при високих числах Маха може майже досягати значення динамічного тиску набігаючого газу

(таблиця), а тому й майже нівелювати його, руйнуючи УХ як таку ($\sigma_s \rightarrow 1$).

Проте такі значних нелінійних ефектів практично не очікуємо й не спостерігаємо в реальних фізичних об'єктах. Тому розв'язок виведених вище рівнянь можна назвати "екстремальною нелінійною границею". Причина такої ситуації в тому, що в описаному підході враховано не всі ефекти (на них ми зупинимося в розділах X і XI). Проте він наочно показує ідею взаємного впливу частинок і УХ та ідеологію пошуку розв'язку, запропоновану вперше в роботі [13].

На рис. 5 для порівняння наведено тонкі суцільні криві, які показують розподіли для низької ефективності інжекції ($\xi = 4$ і тому $\eta \sim 10^{-5}$). Частинок, які прискорюються, досить мало, тому тиск, створений ними, змінює течію не настільки суттєво (верхній графік і остання колонка в таблиці). Відповідно й профіль спектра $f_o(p)$ мало відрізняється від степеневого (нижній графік).

M_0	10	30	100	300	100
u_0 , км/с	117	352	1170	3520	1170
T_2 , 10^5 К	0.6	1	2	4	160
$p_i/(mc)$, 10^{-4}	3.7	5.0	6.9	9.5	69
σ_s	2.86	2.93	3.01	3.11	3.99
σ_t	7.5	17	41	93	5.6
η , 10^{-4}	2.9	3.0	3.1	3.3	0.16
$n_{cr}(0)/n_0$	0.002	0.005	0.01	0.03	0.00009
$P_{cr}(0)/(\rho_0 u_0^2)$	0.60	0.82	0.92	0.97	0.28

Таблиця. Характеристики УХ і прискорених протонів відповідно до рис. 5.

VII. НАЯВНІСТЬ ЧАСТИНОК, ПРИСКОРЕНИХ ДЕІНДЕ

Як зміниться рівняння і розв'язок $f_o(p)$ за наявності в середовищі частинок, прискорених в інших джерелах? Така задача була предметом розгляду в роботі [27].

Розгляньмо граничну умову, відмінну від умови 5 розділу II. У зовнішньому середовищі, досить далеко від УХ, наявні деінде прискорені частинки зі спектром $f_o(p)$:

$$f(-\infty) = f_0, \quad (88)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{-\infty} = 0. \quad (89)$$

Схема пошуку $f_o(p)$ така ж, як і в розділі IV В. Інтегрування рівняння (19) від -0 до $+0$ приводить до рівняння (34). Інтегрування (19) від $-\infty$ до -0 дає (50), де один із членів перетворюватиметься інакше. Там, замість першого члена, підставмо (34). Другий і

четвертий члени — нуль. Третій доданок перетворюється так само, як і в (53). Останній у лівій частині рівняння, замість (51):

$$- \int_{-\infty}^{-0} u \frac{\partial f}{\partial x} dx = -u_p f_o + u_0 f_0. \quad (90)$$

Відтак, замість (54), отримаємо таке рівняння для функції розподілу на УХ $f_o(p)$:

$$\frac{df_o}{dp} + \frac{s_p}{p} f_o = \frac{Q_o + u_0 f_0}{p} \frac{3}{u_p - u_2}. \quad (91)$$

Розв'язок цього рівняння

$$f_o(p) = \int_{p_i}^p \frac{dp''}{p''} \frac{3 [Q_o(p'') + u_0 f_0(p'')]}{u_{p''} - u_2} \times \exp \left[- \int_{p''}^p s_{p'} \frac{dp'}{p'} \right] \quad (92)$$

після перетворень матиме вигляд $f_o(p) = f_o^{\text{in}}(p) + f_o^{\text{ra}}(p)$, де $f_o^{\text{in}}(p)$ задається виразом (58) та описує прискорення інжектіваних на УХ теплових частинок, а $f_o^{\text{ra}}(p)$ описує переприскорення релятивістських частинок зі зовнішнього середовища [27]:

$$f_o^{\text{ra}}(p) = \frac{3\sigma_t}{\sigma_p - 1} \int_{p_o}^p \frac{dp''}{p''} f_o(p'') \times \exp \left[- \int_{p''}^p \frac{3\sigma_{p'}}{\sigma_{p'} - 1} \frac{dp'}{p'} \right]. \quad (93)$$

Наявність прискорених деінде частинок вплине також на рівняння для U . Так, рівняння збереження імпульсу

$$\rho_0 u_0^2 + P_0 + P_{\text{cr}0} = \rho u^2 + P + P_{\text{cr}}, \quad (94)$$

де

$$P_{\text{cr}0} = \int_{p_{\text{min}}}^{p_{\text{max}}} \frac{4\pi}{3} p^3 v(p') f_o(p') dp', \quad (95)$$

p_{min} і p_{max} стосуються розподілу $f_o(p')$, для спрощення можна прийняти $p_{\text{min}} = p_i$, і p_{max} такий, як і у прискорених на УХ частинок. Тиск релятивістських частинок у якійсь точці x є сумою тиску “зовнішніх” частинок, що адіабатично проеволюювали від точки $-\infty$, та тиску прискорених і переприскорених частинок [27]

$$P_{\text{cr}}(x) = P_{\text{cr}0} U(x)^{-\gamma_{\text{cr}}} + \int_p^{p_{\text{max}}} \frac{4\pi}{3} p^3 v(p') f_o(p') dp', \quad (96)$$

де $\gamma_{\text{cr}} = 4/3$. Звідси, замість (71), матимемо рівняння для $U(p)$ у вигляді [27]

$$p \frac{dU}{dp} \left[1 - \frac{U^{-(\gamma+1)}}{M_0^2} - \frac{\gamma_{\text{cr}} \xi_0 U^{-(\gamma_{\text{cr}}+1)}}{\gamma M_0^2} \right] = \frac{4\pi}{3\rho_0 u_0^2} p^4 v(p) [f_o^{\text{in}}(p) + f_o^{\text{ra}}(p)], \quad (97)$$

де $\xi_0 = P_{\text{cr}0}/P_0$ — параметр, що фіксує відношення тиску прискорених деінде частинок до газового тиску в зовнішньому середовищі.

VIII. ГРАНИЧНА УМОВА ВІЛЬНОЇ ВТЕЧІ ЧАСТИНОК

A. Наближення тестової частинки

Розв'язок кінетичного рівняння у границі тестової частинки (42) нічим не обмежений на високих p . Формально він простягається до $p \rightarrow \infty$. Значення p_{max} є вільним параметром для цього розв'язку та може фіксуватися певним значенням енергії прискорених частинок E_{cr} як верхня межа інтеграла (17). Причиною цього є гранична умова 5 розділу II, а саме те, що розподіл $f(x, p)$ та його градієнт $\partial f/\partial x$ дорівнюють нулеві на нескінченності $x = -\infty$.

Що зміниться, якщо покласти, що розподіл перетворюється в нуль на певній віддалі від УХ? Розв'язкові за граничної умови

$$f(x_b) = 0 \quad (98)$$

присвячена праця [28]. Така гранична умова “вільної втечі частинок” полягає в тому, що частинки, які перетнули межу, розташовану в точці $x = x_b$, вільно поширюються в зовнішньому середовищі та втрачаються для подальшого прискорення. Важливо відзначити, що градієнт $f(x, p)$ не перетворюється в нуль у точці x_b . Очевидно також, що обидві частини умови 5 розділу II справджуються автоматично в цьому випадку.

Розв'язок рівняння (30) в області $x < 0$ шукаємо інтегруванням від $-\infty$ до x . Для D , незалежного від x , це

$$f(x, p) = \tilde{f}_o(p) \exp\left(\frac{u_1 x}{D(p)}\right) + \tilde{f}(p). \quad (99)$$

Функцію $\tilde{f}(p)$ обчислюємо з умови $f(x_b, p) = 0$, а $\tilde{f}_o(p)$ — з умови $f(0, p) = f_o$. Тому розв'язок є таким:

$$f(x, p) = \frac{f_o(p)}{1 - \exp\left(\frac{u_1 x_b}{D(p)}\right)} \times \left[\exp\left(\frac{u_1 x}{D(p)}\right) - \exp\left(\frac{u_1 x_b}{D(p)}\right) \right]. \quad (100)$$

Хід пошуку $f_o(p)$ такий самий, як і в розділі III, з тією відмінністю, що похідна

$$\left[D \frac{\partial f}{\partial x} \right]_1 = u_1 f_o \left[1 - \exp\left(\frac{u_1 x_b}{D(p)}\right) \right]^{-1}. \quad (101)$$

Відтак для $f_o(p)$ матимемо таке ж рівняння, як (38), але з іншим показником

$$s = \frac{3\sigma}{\sigma - 1} \left[1 - \exp\left(\frac{u_1 x_b}{D(p)}\right) \right]^{-1}, \quad (102)$$

який тепер залежить від коефіцієнта дифузії і через нього від p . Розв'язок рівняння матиме такий вигляд:

$$f_o(p) = \frac{\eta n_1}{4\pi p_1^3} \frac{3\sigma}{\sigma - 1} \quad (103)$$

$$\times \exp\left(-\frac{3\sigma}{\sigma - 1} \int_{p_1}^p \frac{dp'}{p'} \left[1 - \exp\left(\frac{u_1 x_b}{D(p')}\right)\right]^{-1}\right).$$

При $x_b = -\infty$ отримуємо класичний вираз (42).

Вираз у квадратних дужках для бомівського коефіцієнта дифузії $D(p) = D_* p$ перепишемо так:

$$1 - \exp\left(\frac{u_1 x_b}{D(p)}\right) = 1 - \exp\left(-\frac{p_*}{p}\right), \quad (104)$$

де $p_* = |x_b| u_1 / D_*$. Звідси видно, що для $p \ll p_*$ розв'язок (103) перетворюється в степеневий $f \propto (p/p_*)^{-3\sigma/(\sigma-1)}$. Для $p \gg p_*$ маємо $f \propto \exp(-p/p_{\max})$, тобто природно з'являється максимальний момент прискорених частинок $p_{\max} = p_*(\sigma - 1)/3\sigma$ (Рис. 6).

Отже, у стаціонарному випадку гранична умова вільної втечі частинок на деякій скінченній відстані зумовлює появу максимального моменту прискорених частинок [28].

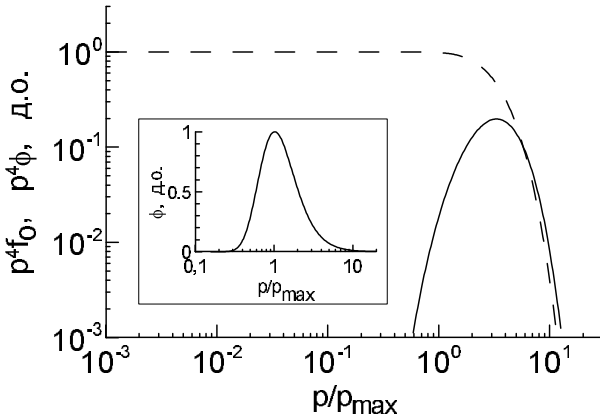


Рис. 6. Функції розподілу $f_o(p)/n_o$ (пунктирна крива) і $\phi(p)/(n_o u_1)$ (суцільні криві), розраховані для $\sigma = 4$ та Бомівського коефіцієнта дифузії. Наближення тестової частинки, гранична умова вільної втечі. Вертикальні осі — у довільних одиницях.

Для орієнтації в масштабах величин: значення $x_b = 0.16$ пк для $p_{\max} = 10^4 m_p c$, $u_1 = 5000$ км/с, $B = 5$ мкГс та коефіцієнта дифузії $D = r_L c/3 = pc^2/(3qB)$, де

r_L — ларморовський радіус, q — заряд протона, c — швидкість світла.

Потік частинок на границі визначаємо ненульовим членом $D\partial f/\partial x$:

$$\phi(x_b, p) = u_1 f(x_b, p) - D(p) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_b}$$

$$= -\frac{u_1 f_o(p)}{1 - \exp\left(\frac{u_1 x_b}{D(p)}\right)} \exp\left(\frac{u_1 x_b}{D(p)}\right). \quad (105)$$

Як видно, цей потік від'ємний. Це означає, що частинки залишають систему в напрямку $-\infty$, тобто рухаються від УХ у зовнішнє середовище. Також важливо, що потік $\phi(x_b, p)$ є значущим лише для частинок із моментами в околі p_{\max} (Рис. 6). Інакше кажучи, систему можуть залишити лише частинки з моментами $p \sim p_{\max}$.

Потік енергії, пов'язаний із частинками, що залишають систему, розраховуємо за формулою

$$F_{\text{esc}} = \int_{p_1}^{\infty} 4\pi p^2 T(p) \phi(p) dp. \quad (106)$$

В. Нелінійний розв'язок

Знайдемо нелінійний розв'язок рівняння (19) з умовою (98). Таку задачу розв'язано у [25].

Проінтегруймо рівняння від x_b до x , так само, як це зроблено в розділі IV А. Отримуємо рівняння, подібне до (46), а саме:

$$uf - D \frac{\partial f}{\partial x} = Z + \phi, \quad (107)$$

де

$$\phi(p) = -\left[D(x, p) \frac{\partial f(x, p)}{\partial x}\right]_{x_b} \quad (108)$$

— це потік частинок у точці x_b , $Z(x, p)$ задається такою ж формулою, як і в (47), але з нижньою межею інтеграла x_b замість $-\infty$. Розв'язок цього рівняння для $x < 0$:

$$f(x, p) = f_o(p) \exp\left[\int_0^x \frac{u(x') dx'}{D(x', p)}\right] \left(1 + \int_x^0 \frac{dx'}{D(x', p)} \exp\left[\int_{x'}^0 \frac{u(x'') dx''}{D(x'', p)}\right] \frac{[Z(x', p) + \phi(p)]}{f_o(p)}\right). \quad (109)$$

Границю тестової частинки отримуємо з цього виразу так. Найперше покладімо $D(x) = \text{const}$, $u(x) = \text{const}$, $du(x)/dx = 0$, й тому $Z = 0$. Отримуємо, що

$$f(x, p) = f_o \exp\left(\frac{ux}{D}\right) - \frac{\phi}{u} \exp\left(\frac{ux}{D}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{ux}{D}\right)\right]. \quad (110)$$

Використавши це в означенні (108) та перетворивши отриманий вираз, одержимо формулу (105) для ϕ . Підставивши її в (110), матимемо шукану границю (100).

Формулу потоку в точці x_b для модифікованої УХ одержимо з означення (108), розв'язку (109) і властивості $Z(x_b, p) = 0$:

$$\phi = -\frac{f_o \left(1 + \int_{x_b}^0 \frac{dx'}{D(x', p)} \frac{Z(x', p)}{f_o(p)} \exp \left[\int_{x'}^0 \frac{u(x'') dx''}{D(x'', p)} \right] \right)}{\int_{x_b}^0 \frac{dx'}{D(x', p)} \exp \left[\int_{x'}^0 \frac{u(x'') dx''}{D(x'', p)} \right]}. \quad (111)$$

У границі тестової частинки ця формула перетворюється на (105), бо $Z = 0$ і інтеграл у знаменнику

$$\int_{x_b}^0 \frac{dx'}{D(x', p)} \exp \left[\int_{x'}^0 \frac{u(x'') dx''}{D(x'', p)} \right] = \frac{1 - \exp \left(\frac{u_1 x}{D} \right)}{u_1 \exp \left(\frac{u_1 x}{D} \right)}. \quad (112)$$

Рівняння для функції розподілу f_o знаходимо способом, описаним у розділі IV В: інтегрування основного рівняння від -0 до $+0$ і від x_b до -0 . Воно матиме такий же вигляд, як і (54), з іншим спектральним індексом

$$s_p \equiv \frac{3}{u_p - u_2} \left(u_p + \frac{p}{3} \frac{\partial u_p}{\partial p} + u_0 \varphi \right), \quad (113)$$

де $\varphi = \phi / (u_0 f_o)$. Розв'язок:

$$f_o(p) = \frac{\eta m_1}{4\pi p_i^3} \frac{3\sigma_s}{\sigma_p - 1} \exp \left[- \int_{p_i}^p \frac{3(\sigma_{p'} + \sigma_t \varphi)}{\sigma_{p'} - 1} \frac{dp'}{p'} \right]. \quad (114)$$

Рівняння для U за граничної умови вільної втечі частинок не змінюється.

Для практичних застосувань важливими є апроксимації розв'язку та формули потоку, отримані у [25]. У позначеннях

$$\mathcal{K}(x, p) = \int_x^0 \frac{dx'}{D(x', p)} \frac{Z(x', p)}{f_o(p)} \exp \left[\int_{x'}^0 \frac{u(x'') dx''}{D(x'', p)} \right], \quad (115)$$

$$\mathcal{W}(x, p) = u_0 \int_x^0 \frac{dx'}{D(x', p)} \exp \left[\int_{x'}^0 \frac{u(x'') dx''}{D(x'', p)} \right] \quad (116)$$

ці функції запишемо так:

$$f(x, p) = f_o(p) \exp \left[\int_0^x \frac{u(x') dx'}{D(x', p)} \right] \times \left(1 + \mathcal{K}(x, p) - \frac{\mathcal{W}(x, p)}{\mathcal{W}_b(p)} (1 + \mathcal{K}_b(p)) \right), \quad (117)$$

$$\phi(p) = -u_0 f_o(p) \frac{1 + \mathcal{K}_b(p)}{\mathcal{W}_b(p)}, \quad (118)$$

де індекс "b" відповідає значенню в точці x_b . Основою для наближення є властивість $\mathcal{K} \ll 1$, справедлива для будь-яких x [25]. Тому апроксимації

$$f(x, p) = f_o(p) \exp \left[\int_0^x \frac{u(x') dx'}{D(x', p)} \right] \left(1 - \frac{\mathcal{W}(x, p)}{\mathcal{W}_b(p)} \right), \quad (119)$$

$$\phi(p) = -\frac{u_0 f_o(p)}{\mathcal{W}_b(p)} \quad (120)$$

є достатньо точними: точні та наближені значення на графіках (рис. 1 і 2 в [25]) практично збігаються.

**ІХ. ТОЧНА ФОРМУЛА ДЛЯ $P_{cr}(x)$ ТА
УЗАГАЛЬНЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ДЛЯ
БУДЬ-ЯКОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ $D(p)$**

Під час виведення рівняння для $U(p)$ в розділі VВ використано наближений вираз для тиску прискорених частинок (68) у точці x ; його виведення міститься в розділі VА. Ця апроксимація дала змогу одержати відносно просте рівняння (71)-(72) для профілю швидкості $U(p)$. Основою наближення було припущення про "достатньо швидку" залежність D від p , яка б забезпечувала те, що відстань $|x_b(p)| \propto D(p)/u_p(p)$ зростає зі збільшенням моменту частинки (тобто функція $D(p)$ мала б зростати швидше за $u_p(p)$). Як зміниться методика пошуку розв'язку нелінійної задачі, якщо уникнути використання наближення для $P_{cr}(x)$? Яким мав би бути підхід, аби дозволити використання коефіцієнта дифузії з будь-якою залежністю від p ? Таку задачу розв'язано в роботі [23].

Отож, замість (68), слід уживати

$$\tilde{P}_{cr}(x) = \frac{4\pi}{3\rho_0 u_0^2} \int_{p_i}^{p_{max}} dp p^3 v(p) f_o(p) \exp \left[\int_0^x \frac{U(x') dx'}{x_p(x', p)} \right]. \quad (121)$$

Тут уведено позначення: $U(x) = u(x)/u_0$ і

$$x_p(x, p) = \frac{3D(x, p)\sigma_s}{s(p)u_0(\sigma_s - 1)}, \quad (122)$$

а для $f(x, p)$ використано простіший вираз (49), хоча можна використати й повний розв'язок (48). Ці дві можливості буде порівняно далі. Продиференціювавши (121) за x , отримуємо:

$$\frac{d\tilde{P}_{cr}(x)}{dx} = \tilde{P}_{cr}(x)\lambda(x)U(x), \quad (123)$$

де

$$\lambda(x) = \left\langle \frac{1}{x_p} \right\rangle_{\tilde{P}_{cr}} = \frac{\int_{p_i}^{p_{max}} dp x_p(x, p)^{-1} p^3 v(p) f_o(p) \exp \left[\int_0^x \frac{U(x') dx'}{x_p(x', p)} \right]}{\int_{p_i}^{p_{max}} dp p^3 v(p) f_o(p) \exp \left[\int_0^x \frac{U(x') dx'}{x_p(x', p)} \right]}. \quad (124)$$

Базове рівняння (69) й тут задає $U(x)$ як функцію від $P_{cr}(x)$:

$$1 + \frac{1}{\gamma \mathcal{M}_0^2} = U(x) + \tilde{P}_g(x) + \tilde{P}_{cr}(x). \quad (125)$$

Зв'язок між $U(p)$ і $U(x)$ знайдемо інтегруванням за частинами означення u_p (52):

$$U(p) = \int_{-\infty}^0 dx \frac{U(x)^2}{x_p(x, p)} \exp \left[- \int_x^0 dx' \frac{U(x')^2}{x_p(x', p)} \right]. \quad (126)$$

Цей вираз дозволяє за відомим профілем $U(x)$ знайти $f_o(p)$, використовуючи формулу (72), яка потребує знання $U(p)$.

Функцію ж $U(x)$ обчислюємо з рівнянь (123) і (125). Ітераційна схема численого пошуку розв'язку $U(x)$ є такою [23, 24]. Приймаємо якесь значення σ_s , за ним шукаємо значення σ_t , відтак знаходиться значення $U(0) = \sigma_s/\sigma_t$ на УХ. Далі з (125) знаходиться $\tilde{P}_{cr}(0)$. Це значення використовуємо як граничну умову для рівняння (123), у якому значення функцій $U(x)$ і $\lambda(x)$ на k -тій ітерації беремо з ітерації $(k-1)$. Таким чином, розв'язок рівняння (123) на кроці k є

$$\tilde{P}_{cr}(x)^{(k)} = \tilde{P}_{cr}(0) \times \exp \left[- \int_x^0 dx' \lambda^{(k-1)}(x') U^{(k-1)}(x') \right]. \quad (127)$$

На кожному ітераційному кроці функції $U(x)$, $U(p)$, $f_o(p)$, $\lambda(x)$ перераховуємо за значенням $P_{cr}(x)$ та формулами (125), (126), (72), (124) відповідно доти, поки не досягнемо збіжності. Знайдений таким способом розв'язок ще не обов'язково шуканий. Фізичним розв'язком він буде лише тоді, коли збіжаться значення тисків $P_{cr}(x)$, розрахованих за (125) і (121) за використання кінцевої функції $f_o(p)$. Таке станеться лише для певного початкового значення σ_s , яке й визначить розв'язок нелінійної задачі.

Описаний у цьому розділі підхід дозволяє використовувати будь-який коефіцієнт дифузії $D(x, p)$, а методика розділу VВ застосовна лише для $D(p)$, який змінюється досить швидко з p (швидше, ніж u_p), тобто так, щоб частинки з більшим моментом могли дифундувати далі від УХ ($x_p \sim D(p)/u_p$). Таким коефіцієнтом дифузії є, зокрема, Бомівський, $D \propto p$.

Результати розрахунків показано на рис. 7. Із розподілів $f(x, p)$ видно, що частинки з малими p й справді не досягають певних відстаней, але ідея про те, що точку x_p можна вважати різкою границею, має все ж наближений характер. Точкові лінії, що відповідають використанню точного виразу (48) для $f(x, p)$, є близькими до розрахунків, проведених за допомогою його наближення (49). Отже, наближення (49) досить добре.

Порівняння розрахунків, проведених за методом розділу VВ, де використано наближену формулу (68)

для $P_{cr}(x)$, з розрахунками за методом цього розділу, з формулою (121) для тиску, що враховує просторовий розподіл $f(x, p)$, проведено в роботі [24]. Рис. 8 порівнює ці два підходи. Бачимо, що простіший із них (розділ VB) досить добре відтворює спектр частинок. Відмінності помітні в розподілі швидкості у прекурсорі в просторовій області, куди досягають частин-

ки з максималними імпульсами. Причиною відмінності є те, що простіший підхід базується на умові $U(p_{max}) = 1$ і передбачає, що просторові розподіли $f(x, p)$ різко спадають на відстанях, більших за $|x_p|$, а складніший підхід (розділ IX) враховує справжній просторовий розподіл $f(x, p)$.

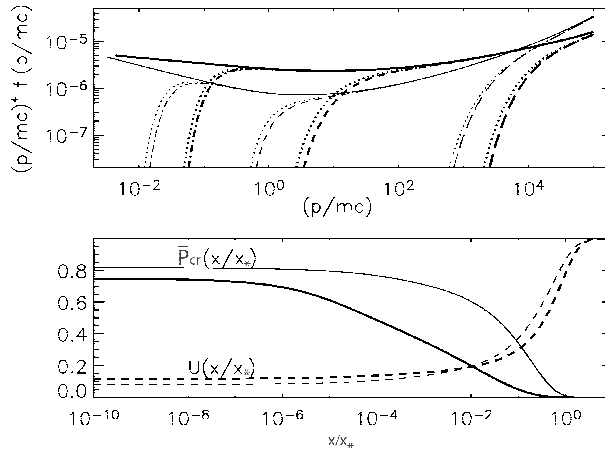


Рис. 7. Розподіли $f(x, p)$, $U(x)$ і $\tilde{P}_{cr}(x)$ [23]. Розрахунки проведено для $M_0 = 100$, $\xi = 3.5$, $p_{max} = 10^5 mc$, $u_0 = 5 \times 10^8$ см/с. Тонкі лінії відповідають незмінному у просторі бомівському коефіцієнту дифузії $D \propto p$, товстіші — його аналогу, який може змінюватися з x , $D(x) \propto p/\rho(x)$. Різні типи ліній відповідають різним відстаням від УХ: $x = 0$ (суцільна), $x = 10^{-7} x_*$ (точка-пунктир), $x = 10^{-4} x_*$ (короткий пунктир), $x = 10^{-1} x_*$ (довгий пунктир). Криві розраховані за використання наближення (49), а точкові лінії поряд відповідають розрахункам із повним розв'язком (48). На нижньому графіку просторова координата в одиницях $x_* = -D(p_{max})/u_0$.

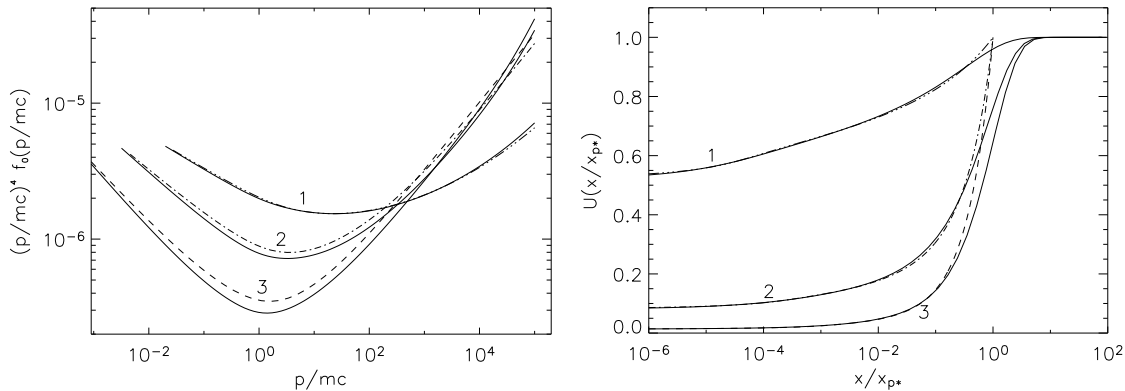


Рис. 8. Спектри прискорених частинок $f_0(p)$ і профілі швидкості у прекурсорі $U(x)$ [24]. Розрахунки зроблено для $M_0 = 10, 100, 1000$ (лінії з номерами 1, 2, 3 відповідно), $\xi = 3.5$, $p_{max} = 10^5 mc$, $u_0 = 5 \times 10^8$ см/с та для бомівського коефіцієнту дифузії. Суцільні лінії — розрахунки з формулою (121) і методом розділу IX, пунктирні — з формулою (68) і методом розділу VB. На правому графіку просторова координата в одиницях $x_{p*} = -D(p_{max})/(u_0 U_p(p_{max}))$.

Формули цього розділу зі змінами, відповідними до граничної умови вільної втечі частинок, наведено в роботі [29].

Х. НЕАДІАБАТИЧНА ЕВОЛЮЦІЯ ГАЗУ ПЕРЕД ФРОНТОМ УХ

У попередніх розділах використано припущення про адиабатичну еволюцію газу перед фронтом УХ. А саме, воно враховано: 1) у (76) для виведення фор-

мули зв'язку між σ_s і σ_t ; 2) у (66) для застосування в (69) з метою виведення рівняння для зв'язку між U і \tilde{P}_{cr} ; 3) у (85) для формули зв'язку між T_2 і T_0 (86).

Адиабатичну еволюцію плазми перед фронтом може модифікувати турбулентне нагрівання [30]. Двома відомими прикладами неадиабатичного нагрівання газу є альфвенівське нагрівання [31] та акустична нестабільність [32, 33]. Обидва ефекти зумовлені градієнтом тиску прискорених частинок у прекурсорі. Обидві моделі мають свої обмеження для застосування в теорії нелінійного прискорення [30, 34] (вони,

зокрема, розроблені за припущення про слабку турбулентність, а прискорені частинки можуть генерувати хвилі значної енергії), проте зумовлюють однаковий ефект: зменшують σ_t , послаблюють роль прекурсора й ефективність прискорення. Тому з метою продемонструвати основні фізичні наслідки цих ефектів у [30] запропоновано використовувати підхід, подібний до описаного у [35] для нагрівання, зумовленого загасанням альфвенівських хвиль.

Введемо параметр $\alpha < 1$, який фіксує відношення темпів загасання та зростання альфвенівських хвиль [34] (див. далі рівняння (146)). Рівняння стану газу, яке враховує альфвенівське нагрівання, [31]

$$\frac{\partial}{\partial x} (P(x)\rho(x)^{-\gamma}) = \alpha(\gamma - 1) \frac{v_A(x)}{u(x)} \rho(x)^{-\gamma} \frac{\partial P_{cr}}{\partial x}, \quad (128)$$

дає відповідну залежність $\tilde{P}_g(x)$. Знайдемо її способом, який описано у [30]. Щоб розв'язати це рівняння, поділімо обидві його частини на $\rho_0 u_0^\gamma$ і проінтегруймо його від $-\infty$ до якоїсь точки x у прекурсорі. Аби проінтегрувати праву частинину, домножимо чисельник і знаменник на $u_0 \rho_0^\gamma$, а також урахуємо просторову залежність альфвенівської швидкості $v(x) = B(x)/\sqrt{4\pi\rho(x)}$. Напруженість фонового магнітного поля B є сталою, оскільки УХ — паралельна. Густина змінюється відповідно до закону неперервності: $\rho(x) = \rho_0 u_0 / u(x) = \rho_0 U(x)^{-1}$. Тому $v_A(x) = v_{A0} U(x)^{1/2}$. Слід також замінити \tilde{P}_{cr} , використовуючи рівняння (69). Отримаємо замість (67)

$$\tilde{P}_g(x) = \frac{U(x)^{-\gamma}}{\gamma \mathcal{M}_0^2} [1 + \Lambda_{TH}(x)], \quad (129)$$

де введено позначення

$$\Lambda_{TH} = \alpha \gamma(\gamma - 1) \frac{\mathcal{M}_0^2}{\mathcal{M}_{A0}} \left[\frac{1 - U(x)^{\gamma+1/2}}{\gamma + 1/2} \right], \quad (130)$$

тут ураховано, що [30]

$$\int_{-\infty}^x U^{\gamma-1/2} \frac{\partial \tilde{P}_g}{\partial x} dx \ll \frac{1 - U^{\gamma+1/2}}{\gamma + 1/2}. \quad (131)$$

Відтак, замість виразів (66) і (76), слід використати:

$$P(x) = P_0 \left(\frac{\rho(x)}{\rho_0} \right)^\gamma [1 + \Lambda_{TH}]. \quad (132)$$

Замість (78) пострібно уживати вираз [13, 30, 35]

$$\sigma_t^{\gamma+1} = \frac{\mathcal{M}_0^2 \sigma_s^\gamma}{2} \left[\frac{\gamma + 1 - \sigma_s(\gamma - 1)}{1 + \Lambda_{TH1}} \right], \quad (133)$$

де Λ_{TH1} — це значення Λ_{TH} безпосередньо перед фронтом УХ, тобто у (130) треба підставити $U(0) = \sigma_s / \sigma_t$. Замість (85) беремо формулу

$$\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{\sigma_t}{\sigma_s} \right)^{\gamma-1} [1 + \Lambda_{TH1}]. \quad (134)$$

Відповідно зміниться й формула (86).

Основним наслідком урахування турбулентного нагрівання плазми перед фронтом УХ є деяке зменшення σ_t . Причина в тому, що більш нагрітий газ менше піддається стиску. Зауважимо, що цим ефектом можна знехтувати, якщо $\mathcal{M}_0^2 \ll \mathcal{M}_{A0}$.

XI. РЕЗОНАНСНЕ ПОСИЛЕННЯ МАГНІТНОГО ПОЛЯ В ПРЕКУРСОРІ

У розділі IX описано методику пошуку нелінійного розв'язку для довільної залежності коефіцієнта дифузії від моменту частинки. Цей підхід дає змогу врахувати роль магнітного поля, яке може турбулентно посилюватися у прекурсорі внаслідок впливу прискорених частинок. Заряджені частинки, змінюючи властивості турбулентного магнітного поля, на якому розсіюються, змінюють відповідно і свій коефіцієнт дифузії.

Посилення магнітного поля потоком релятивістських частинок може бути резонансним [5] або нерезонансним [36, 37], залежно від того, як саме взаємодіють частинки та хвилі. У першому випадку генеруються альфвенівські хвилі, у другому — хвилі іншого типу. Якщо властивості перших добре відомі, то узвичаєної теорії нерезонансної взаємодії немає. Окрім того, для таких хвиль не розроблено й теорії їх поведінки при проходженні фронту УХ. У праці [38] показано, що нерезонансне посилення магнітного поля переважно трапляється на ранніх етапах еволюції УХ, а впродовж більшості часу існування УХ турбулентність генерується резонансною взаємодією магнітних хвиль і частинок. Тому далі йтиметься лише про резонансний випадок.

Зазначимо про два альтернативні сценарії, що можуть приводити до високих значень амплітуди магнітного поля в околі УХ. Великомасштабне магнітне поле може розвиватися внаслідок “firehose” нестабільності [39, 40] в областях, де розподіл прискорених частинок є суттєво анізотропним, тобто переважно у прекурсорі якнайдалі від стрибка параметрів. Поле може збільшуватися також за фронтом унаслідок впливу гідродинамічної турбулентності [41].

Отож, струм прискорених релятивістських частинок зумовлює генерацію альфвенівських хвиль у прекурсорі. Додатковий магнітний тиск робить плазму менш податливою до стиску, відтак цей ефект призводить до зменшення σ_t . Подамо тут набір формул, які дають змогу шукати розв'язок відповідної нелінійної задачі, за роботами [30, 34]. Основу підходу, який слід використовувати, описано в розділі IX. Необхідні зміни подано нижче.

A. Рівняння збереження моменту

Рівняння збереження моменту (125) матиме додатковий член, відповідальний за тиск P_w турбулентного

магнітного поля:

$$1 + \frac{1}{\gamma \mathcal{M}_0^2} = U(x) + \tilde{P}_g(x) + \tilde{P}_{cr}(x) + \tilde{P}_w(x), \quad (135)$$

$$\tilde{P}_w(x) = \frac{\delta B(x)^2}{8\pi\rho_0 u_0^2}, \quad (136)$$

δB — сума всіх мод турбулентного поля, наявних у точці x . Записане в $x = -0$, воно має вигляд

$$\tilde{P}_{cr1} = 1 + \frac{1}{\gamma \mathcal{M}_0^2} - \frac{\sigma_s}{\sigma_t} - \frac{1}{\gamma \mathcal{M}_0^2} \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_t} \right)^{-\gamma} [1 + \Lambda_{TH1}] - \tilde{P}_{w1} \quad (137)$$

і є граничною умовою для рівняння (123).

В. Стрибок тиску та температури

У роботі [42] знайдено вираз для стрибка тиску на УХ за наявності турбулентного магнітного поля. Це

замість (5):

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{(\gamma + 1)\sigma_s - (\gamma - 1) + (\gamma - 1)(\sigma_s - 1)\Delta}{(\gamma + 1) - (\gamma - 1)\sigma_s}, \quad (138)$$

де, за використання властивостей альфвенівських хвиль [34],

$$\Delta = (\sigma - 1)^2 P_{w1} / P_1. \quad (139)$$

Відповідно зміниться й величина стрибка температури (7), бо

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1 \sigma_s}, \quad (140)$$

який використовується для знаходження значення p_1 . Тому замість (86) матимемо

$$T_2 = T_0 \left(\frac{\sigma_t}{\sigma_s} \right)^{\gamma-1} [1 + \Lambda_{TH1}] \frac{(\gamma + 1) - (\gamma - 1)\sigma_s^{-1} + (\gamma - 1)(\sigma_s - 1)\sigma_s^{-1}\Delta}{(\gamma + 1) - (\gamma - 1)\sigma_s}. \quad (141)$$

С. Зв'язок між σ_t і σ_s

Ще одне необхідне співвідношення виводимо з (138) та рівняння збереження моменту [34]:

$$\sigma_t^{\gamma+1} = \frac{\mathcal{M}_0^2 \sigma_s^\gamma}{2} \left[\frac{\gamma + 1 - \sigma_s(\gamma - 1)}{(1 + \Lambda_B)(1 + \Lambda_{TH})} \right], \quad (142)$$

де параметр

$$\Lambda_B = \frac{P_{w1}}{P_1} \left[1 + \sigma_s \left(\frac{2}{\gamma} - 1 \right) \right]. \quad (143)$$

Видно, що наслідком посилення прискореними частинками магнітного поля у прекурсорі, особливо, якщо $P_{w1}/P_1 > 1$, є помітне зменшення стисливості плазми. Тому ефект модифікації УХ релятивістськими частинками стає менш значущим: зміни $u(x)$ уже не такі сильні, а форма спектра f_o менш вигнута. Детально взаємний вплив альфвенівського нагрівання, посилення магнітного поля та властивостей прискорених і теплових частинок проаналізовано в роботі [34].

Д. Магнітний тиск \tilde{P}_w

Стационарне рівняння, яке описує поведінку магнітної турбулентності, отримано в роботі [31]:

$$\frac{\partial F_w}{\partial r} = u \frac{\partial P_w}{\partial r} + \Sigma_w P_w - \Gamma_w P_w, \quad (144)$$

де $F_w \approx 3uP_w$ (тут ураховано, що $v_A \ll u$) — потік енергії хвиль, Σ_w і Γ_w — темпи зростання й загасання енергії. За умови, що магнітна турбулентність збільшується лише внаслідок резонансної взаємодії з прискореними частинками, темп зростання енергії альфвенівських хвиль залежить від градієнта тиску прискорених частинок

$$\Sigma_w P_w = v_A \frac{dP_{cr}}{dx}. \quad (145)$$

Щоб побачити тенденції та спростити розрахунки, наближено приймаємо, що

$$\Gamma_w \approx \alpha \Sigma_w. \quad (146)$$

Тоді рівняння (144) перепишемо так [34]:

$$2U(x) \frac{d\tilde{P}_w}{dx} = (1 - \alpha) V_A \frac{d\tilde{P}_{cr}}{dx} - 3\tilde{P}_w \frac{dU}{dx}, \quad (147)$$

де $V_A = v_A/u_0$. Для сильних УХ ($\mathcal{M}_0 \gg 1$, $\mathcal{M}_{A0} \gg 1$) з рівняння (135): $\tilde{P}_{cr}(x) \approx 1 - U(x)$. Тому (147) стає

$$\frac{d\tilde{P}_w(x)}{dx} = \left[(1 - \alpha) \left(\frac{\tilde{P}_w(x)}{2U(x)} \right)^{1/2} + \frac{3\tilde{P}_w(x)}{2U(x)} \right] \frac{dU(x)}{dx}, \quad (148)$$

а з заміною $\mathcal{X} = (\tilde{P}_w/2U)^{1/2}$ [29]

$$\frac{d\mathcal{X}}{dx} = - \left[\frac{(1 - \alpha) + 5\mathcal{X}}{4U} \right] \frac{dU}{dx}. \quad (149)$$

Розв'язок цього рівняння:

$$\tilde{P}_w(x) = U(x)^{-3/2} \left[\tilde{P}_{w0}^{1/2} + \frac{(1-\alpha)\sqrt{2}}{5} (1-U(x)^{5/4}) \right]^2, \quad (150)$$

де P_{w0} — тиск альфвенівських хвиль у зовнішньому середовищі, який слід покласти рівним нулеві, якщо розглядати виключно альфвенівські хвилі, згенеровані прискореними на УХ частинками. Вираз (150) враховує адиабатичний стиск альфвенівських хвиль у прекурсорі через множник $U^{-3/2}$, пов'язує напруженість локальної магнітної турбулентності з локальним ступенем модифікації потоку прискореними частинками. Тому він визначає максимальний рівень посилення поля безпосередньо перед стибком: для $P_{w0} = 0$

$$\tilde{P}_{w1} = \frac{2(1-\alpha)^2}{25} \left[1 - \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_t} \right)^{5/4} \right]^2 \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_t} \right)^{-3/2}. \quad (151)$$

Для повноти випишімо тут також вираз для P_1 . Його отримуємо з (129):

$$\tilde{P}_{g1} = \frac{1}{\gamma \mathcal{M}_0^2} \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_t} \right)^{-\gamma} [1 + \Lambda_{\text{TH1}}]. \quad (152)$$

Е. Коефіцієнт дифузії

Генеруючи певний спектр магнітної турбулентності, прискорені частинки визначають і шлях, яким вони розсіюються на цій турбулентності. Спосіб розрахунку такого самоузгодженого коефіцієнта дифузії описано в розділі 3 роботи [30] (щоправда, без урахування загасання хвиль).

Інший підхід використано у статті [34], яка присвячена вивченню впливу згенерованого частинками магнітного поля на їх прискорення. Там прийнято, що коефіцієнт дифузії є бомівським $D = cr_L/3$, а ларморовський радіус $r_L = pc/qB$ розраховано в магнітному полі, яке згенероване прискореними частинками:

$$D(x, p) = \frac{pc^2}{3qB(x)}, \quad B(x) = \left(8\pi \tilde{P}_w(x) \rho_0 u_0^2 \right)^{1/2}. \quad (153)$$

ХІІ. ПРИКІНЦЕВІ ЗАУВАЖЕННЯ

Аналитичні розв'язки, отримані методами, описаними в цьому огляді, порівнюються з результатами кіль-

кох якісно відмінних чисельних моделювань у праці [43]. Розв'язки в усіх підходах узгоджуються.

Нелінійну задачу одночасного прискорення різних йонів розглянуто в роботі [44].

Для знаходження розв'язків кінетичного рівняння не використовували рівняння збереження енергії, а лише рівняння збереження маси та імпульсу. Рівняння збереження енергії є корисним для аналізу балансу енергій між різними компонентами системи та визначення потоку енергії, який виноситься частинками, що залишають область прискорення. Відповідний розгляд здійснено, наприклад, у працях [26, 28].

Рівняння (19) та його розв'язки, наведені тут, нехтують швидкостями розсіювальних центрів (які є порядку альфвенівської швидкості) відносно елемента потоку. Такий підхід виправданий у більшості випадків, оскільки для УХ з високим числом Маха $v_A \ll u$. Зміни можна очікувати при малих значеннях \mathcal{M}_0 або у випадку значного посилення магнітного поля перед фронтом УХ (тоді альфвенівська швидкість $v_A \propto B$ може суттєво зрости, бо хвилі поширюватимуться в посиленому полі). Виявити тенденції впливу цього ефекту на структуру УХ, форму спектра і просторовий розподіл прискорених частинок можна завдяки формулі

$$v_A(x) = \frac{\delta B(x)}{\sqrt{4\pi\rho(x)}}. \quad (154)$$

Слід також внести зміни в саме кінетичне рівняння і в його розв'язки. Відповідну задачу розглянуто у працях [29, 34]. Автори, однак, зазначають, що немає аргументів, аби можна було б насправді припустити таку залежність альфвенівської швидкості. Справа в тому, зокрема, що теорія альфвенівських хвиль фундаментально базується на припущенні про малість збурень магнітного поля на тлі однорідного поля: $\delta B \ll B$. А якщо реалізуються умови суттєвого впливу прискорених частинок на магнітне поле, то, як показують чисельні моделювання, можливою є навіть ситуація, коли $\delta B \gg B$. На додачу, теорії інших процесів, що зумовлюють посилення магнітного поля прискореними частинками у прекурсорі, ще не розроблені до такої міри, щоб дозволити їх використання разом з кінетичним рівнянням для спектра та просторового розподілу релятивістських частинок. Отже, самоузгоджено задача нелінійного прискорення за високих локальних швидкостей розсіювальних центрів усе ще є нерозв'язаною.

[1] E. Fermi, Phys. Rev. **75**, 1169 (1949).
 [2] E. Fermi, Astrophys. J. **119**, 1 (1954).
 [3] Г. Крымский, Докл. Акад. наук СССР **234**, 1306 (1977).
 [4] W. Axford, E. Leer, G. Skadron, Proc. 15th Int. Cosmic Ray Conf., **11**, 132 (1977).

[5] A. Bell, Mon. Not. R. Astron. Soc. **182**, 147 (1978).
 [6] R. Blandford, J. Ostriker, Astrophys. J. **221**, L29 (1978).
 [7] I. Toptygin, Space Sci. Rev. **26**, 157 (1980).
 [8] L. Drury, Rep. Prog. Phys. **46**, 973 (1983).
 [9] R. Blandford, D. Eichler, Phys. Rep. **154** 1 (1987).
 [10] Е. Бережко, Г. Крымский, Укр. физ. журн. **154**, 49

- (1988).
- [11] F. Jones, D. Ellison, *Space Sci. Rev.* **58**, 259 (1991).
- [12] M. Malkov, L. Drury, *Rep. Prog. Phys.* **64**, 429 (2001).
- [13] P. Blasi, *Astropart. Phys.* **16**, 429 (2002).
- [14] A. Balogh, R. Treumann, *Physics of Collisionless Shocks – Space Plasma Shock Waves*, (Springer-Verlag, Heidelberg–Berlin–New York, 2013).
- [15] Л. Ландау, Е. Лифшиц, *Гидродинамика* (Наука, Москва, 1988).
- [16] J. Skilling, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **172**, 557 (1975).
- [17] J. Luhmann, *J. Geophys. Res.* **81**, 2089 (1976).
- [18] M. Formann, G. Webb, *Geophys. Monograph Ser.* **34**, 91 (1985).
- [19] L. Dorman, V. Katz, *Space Sci. Rev.* **20** 529 (1977).
- [20] А. Долгинов, И. Топтыгин, *Журн. эксп. теор. физ.* **51**, 1771 (1967).
- [21] F. Jones, *Astrophys. J.* **361**, 162 (1990).
- [22] M. Malkov, *Astrophys. J.* **485**, 638 (1997).
- [23] E. Amato, P. Blasi, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **364**, L76 (2005).
- [24] E. Amato, P. Blasi, S. Gabici, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **385**, 1946 (2008).
- [25] D. Caprioli E. Amato, P. Blasi, *Astropart. Phys.* **33**, 307 (2010).
- [26] P. Blasi, S. Gabici, G. Vannoni, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **361**, 907 (2005).
- [27] P. Blasi, *Astropart. Phys.* **21**, 45 (2004).
- [28] D. Caprioli, P. Blasi, E. Amato, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **396**, 2065 (2009).
- [29] D. Caprioli, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **7**, 38 (2012).
- [30] E. Amato, P. Blasi, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **371**, 1251 (2006).
- [31] J. McKenzie, H. Volk, *Astron. Astrophys.* **116**, 191 (1982).
- [32] L. Drury, S. Falle, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **223**, 353 (1986).
- [33] A. Wagner, S. Falle, T. Hartquist, *Astron. Astrophys.* **463**, 195 (2007).
- [34] D. Caprioli, P. Blasi, E. Amato, M. Vietri, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **395**, 895 (2009).
- [35] E. Berezhko, D. Ellison, *Astrophys. J.* **526**, 385 (1999).
- [36] A. Bell, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **353**, 550 (2004).
- [37] A. Bell, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **358**, 181 (2005).
- [38] E. Amato, P. Blasi, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **392**, 1591 (2009).
- [39] S. Gary, D. Foosland, C. Smith, M. Lee, M. Goldstein, *Phys. Fluids* **27**, 1852 (1984).
- [40] V. Shapiro, K. Quest, M. Okolicsanyi, *Geophys. Res. Lett.* **25**, 845 (1998).
- [41] J. Giacalone, J. Jokipii, *Astrophys. J.* **663**, L41 (2007).
- [42] C. Vainio, R. Schlickeiser, *Astron. Astrophys.* **343**, 303 (1999).
- [43] D. Caprioli, H. Kang, A. Vladimirov, T. Jones, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **407**, 1773 (2010).
- [44] D. Caprioli, P. Blasi, E. Amato, *Astropart. Phys.* **34**, 447 (2011).

PARTICLE ACCELERATION AT SHOCKS. STATIONARY SOLUTIONS OF THE KINETIC EQUATION

O. Petruk

*Institute for Applied Problems in Mechanics and Mathematics,
3b, Naukova St., Lviv, UA-79060, Ukraine*

The methods of solving the kinetic diffusion-advection equation which describes the acceleration of particles at shocks are reviewed. Stationary solutions of the one-dimensional equation for isotropic distribution function and parallel shocks are presented. An essential property of the results is their non-linear nature is the mutual influence of the accelerated particles and the flow.