

УДК 524.31.084  
PACS 97.10.Cv,97.20.Rp

## КРИТИЧНА МАСА І СТІЙКІСТЬ ВИРОДЖЕНИХ КАРЛИКІВ

М. Ваврух, Н. Тишко, С. Смеречинський

*Львівський національний університет імені Івана Франка  
вул. Кирила і Мефодія, 8, 79005 Львів, Україна  
e-mail: mvavrukh@gmail.com*

Розглянуто методи розрахунку маси вироджених карликів як на основі рівняння механічної рівноваги, так і варіаційного підходу. Для конкретних розрахунків використано моделі з ідеальною електронною підсистемою та модель з кулонівськими взаємодіями. Досліджено область стійкості масивних вироджених карликів. Вперше при врахуванні міжчастинкових взаємодій визначено критичне значення маси зорі і значення параметра релятивізму у її центрі, при якому порушується стійкість за рахунок ефектів загальної теорії відносності.

**Ключові слова:** вироджені карлики, міжчастинкові взаємодії, ефекти загальної теорії відносності, стійкість карликів, максимальна маса, критичне значення параметра релятивізму у центрі зорі

### 1 Вступ

Відкриття вироджених карликів на початку 20-го століття породило проблему існування та стійкості цих зір як об'єктів, що не мають джерел енергії. Із спостережуваних даних відомо, що маса типових холодних карликів  $\sim 0,6M_{\odot}$ , радіус  $\sim 10^{-2}R_{\odot}$ , тому середні відстані між частинками мають порядок  $0,1 \text{ \AA}$ , звідки випливає, що речовина у них знаходиться у металічному стані, причому локалізовані стани електронів на ядрах відсутні. Це метал з найпростішою електронною структурою. Вперше в астрофізиці використавши квантову статистику, Р.Фаулер [1] обґрунтував гіпотезу про те, що існування білих карликів забезпечується виродженням нерелятивістського електронного газу високої густини. Так задовго до виникнення теорій наділонності та надпровідності було встановлено зв'язок між квантовими властивостями мікрочастинок і характеристиками макроскопічних (в даному випадку небесних) тіл.

При вказаних густинах імпульс електронів на поверхні Фермі співмірний з  $m_0c$  (де  $m_0$  – маса електрона,  $c$  – швидкість світла). Враховуючи цю обставину,

С. Чандрасекар [2–4] побудував двокомпонентну модель холодного карлика, що складається з ідеального виродженого релятивістського електронного газу і ядерної підсистеми, яка розглядається як неперервне класичне середовище. Рівновага між тиском електронного газу і гравітаційним стиском, що створюється ядерною підсистемою, забезпечує існування вироджених карликів, а рівняння рівноваги дає можливість розрахувати енергетичні і структурні характеристики. Модель Чандрасекара – хімічно однорідна. Крім того, вона не враховує багатьох чинників, що впливають на формування внутрішньої будови зорі – міжчастинкових кулонівських взаємодій, неповного виродження електронної підсистеми, осьового обертання зорі, наявності магнітних полів, ефектів загальної теорії відносності (ЗТВ).

Модель Чандрасекара – двопараметрична, у ній фігурують центральна густина речовини  $\rho_c$  і параметр хімічного складу  $\mu_e = \left\langle \frac{A}{z} \right\rangle$ , де  $A$  – число баріонів, а  $z$  – число протонів у ядрі. Замість  $\rho_c$  зручно використовувати безрозмірний параметр релятивізму

$$x_0 = P_F(0)(m_0c)^{-1} = \hbar(3\pi^2n_0)^{1/3}(m_0c)^{-1}, \quad (1)$$

де  $P_F(0)$  – імпульс Фермі у центрі зорі. З моделі Чандрасекара випливають два важливі результати: специфічне співвідношення „маса – радіус“, що служить тестом для спостережуваних даних, та обмеження на максимальну масу карлика (границя Чандрасекара),

$$M \leq M_{ch} = 2,01824\dots M_0\mu_e^{-2}, \quad (2)$$

$$M_0 = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} (4\pi)^{-1} \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{3/2} m_u^{-2} \approx 2,89\dots M_\odot.$$

У цій моделі всі карлики з масами, меншими за  $M_{ch}$ , є стійкими. Оскільки  $M_{ch}$  відповідає границі  $x_0 \rightarrow \infty$ , то насправді  $M_{ch}$  є математичною ідеалізацією, яка недосяжна, бо існування карликів дуже малого радіуса не підтверджено спостереженнями. У рамках моделі Чандрасекара неможливо одержати коректніше обмеження на масу карлика, як і пояснення спостережуваного розподілу карликів за радіусами. Крива „маса – радіус“ ілюструє розподіл на площині  $M - R$  лише холодних карликів з ефективною температурою фотосфери  $T_{eff} \leq 10^4 K$ . Зараз відомо багато гарячих маломасивних карликів, для яких  $T_{eff}$  сягає  $10^5 K$ . Так що на площині  $M - R$  маємо не одну криву, а неперервну послідовність кривих „маса – радіус“, кожна з яких відповідає карликам з фіксованим значенням  $T_{eff}$  (див. рис. 5 роботи [5]).

Необхідність узагальнення теорії Чандрасекара стала очевидною ще в середині 20-го століття. Ми зупинимось на роботах, у яких досліджувалось питання про критичну масу та світність вироджених карликів. Першою була робота С. Каплана [6], у якій розглянуто рівняння рівноваги карлика не у полі Ньютона, а в полі Айнштейна. При цьому ефекти ЗТВ враховувались у першому порядку теорії збурень, а нульовим наближенням служило рівняння Емдена для політропи з індексом  $n = 3$  [7], що відповідає виродженому релятивістському ідеальному електронному газу при  $T = 0K$  і високих концентраціях. У цій роботі вперше показано, що критичне значення маси досягається при густині, що відповідає  $x_0^* \approx 23,34$

Варіаційний метод оцінки впливу факторів ЗТВ на стійкість вироджених карликів був розроблений Зельдовичем і Новіковим [8]. При цьому міжчастинкові вза-

ємодії не брались до уваги.

У минулому столітті проблема стійкості вироджених карликів зводилась до того, щоб обґрунтувати відсутність карликів великих мас ( $M < M_{ch}$ ). У зв'язку з відкриттям у подвійних системах карликів з масами, дуже близькими до  $M_{ch}$ , або ж такими, що навіть дещо перевищують цю величину, актуальними стали дві задачі – коректний розрахунок критичної маси при врахуванні всіх суттєвих факторів формування цих об'єктів у рамках вже відомих моделей; пошук механізмів, що можуть забезпечити стійкість карликів з масами, які знаходяться в околі границі Чандрасекара (зокрема і  $M > M_{ch}$ ). У цій роботі ми розраховуємо критичну масу карлика як у рамках моделі Чандрасекара, так і моделі, що враховує міжчастинкові взаємодії.

## 2 Розрахунок маси на основі рівняння рівноваги

Традиційний метод розрахунку характеристик зорі полягає у розв'язуванні системи рівнянь зоряної структури. Основна область виродженого карлика (особливо масивного) перебуває у металічному стані із виродженою релятивістською електронною підсистемою. Електронний механізм теплопровідності забезпечує малий градієнт температури у внутрішніх областях, у зв'язку з чим задача спрощується і у наближенні сферичної симетрії зводиться до системи лінійних одновимірних рівнянь механічної рівноваги у гравітаційному полі Айнштайна,

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dr} &= -G\rho(r)\frac{M(r)}{r^2} \left(1 + \frac{P(r)}{\rho(r)c^2}\right) \left(1 + \frac{4\pi P(r)r^3}{M(r)c^2}\right) \left(1 - \frac{2GM(r)}{rc^2}\right)^{-1}, \\ \frac{d}{dr} M(r) &= 4\pi r^2 \rho(r), \end{aligned} \quad (3)$$

яка визначає розподіл густини  $\rho(r)$  вздовж радіуса зорі. Використовуючи рівняння стану ідеального виродженого релятивістського електронного газу при  $T = 0K$  та нехтуючи релятивістськими поправками, одержуємо теорію холодних карликів, розроблену Чандрасекаром. У цій теорії вважається, що електронна підсистема знаходиться у парамагнітному стані, а хімічний склад не залежить від координати. Модель зі змінним вздовж радіуса хімічним складом ( $\mu_e \equiv \mu_e(r)$ ) без врахування міжчастинкових взаємодій розглянуто у роботі [9]. В роботах [10, 11] розглянуто дво- та трифазні моделі з неповним виродженням ідеального електронного газу ( $T \neq 0K$ ), в яких ядро, перехідна область та периферія описуються у різних наближеннях, що відповідає гарячим маломасивним карликам. Як показано у цих роботах, температурні поправки у рівнянні стану виродженого релятивістського електронного газу мають суттєвий вплив на характеристики карлика при малих та проміжних значеннях параметра  $x_0$ , але при  $x_0 \geq 10$  цей вплив є мізерним. Тому у задачі про визначення критичної маси карлика ми будемо використовувати рівняння стану при  $T = 0K$ .

У цій роботі ми розглянемо випадок холодного карлика, нехтуючи температурними поправками до рівняння стану електронного газу, але враховуючи внески міжчастинкових взаємодій. Ефекти ЗТВ у рівняннях (3) врахуємо у лінійному наближенні, як і в роботі [6]. Як показано у роботі [12], рівняння стану парамагнітного релятивістського електронного газу у полі простої кубічної ґратки нерухомих ядер

при  $T = 0K$  у наближенні двочастинкових електронних кореляцій і локального поля можна зобразити у вигляді:

$$P(r) = \frac{\pi m_0^4 c^5}{3h^3} \{F(x) - 2\alpha_0 x^4 \times \quad (4)$$

$$\times \left[ \pi^{-1} - \frac{4}{3} \left( z^{0,589417} \frac{d\varepsilon_L}{dx} + z\alpha_0^{1/2} \frac{d\varepsilon_\omega}{dx} + \alpha_0 \frac{d\varepsilon_c}{dx} \right) \right] + \dots \},$$

де  $x \equiv x(r)$  – локальне значення параметра релятивізму,  $\alpha_0$  – стала тонкої структури. При цьому  $\alpha_0^2 \varepsilon_c(x)$  представляє внесок кореляційної енергії однорідної електронної рідини,  $z\alpha_0^{1/2} \varepsilon_\omega(x)$  – внесок поляризації цієї рідини ядрами, а  $z^{0,589417} \varepsilon_L(x|z)$  – внесок енергії двочастинкових екранованих між'ядерних взаємодій. У роботі [12] похідні зображено у вигляді апроксимант Паде. Всі вони від'ємні, тому міжчастинкові взаємодії зменшують тиск порівняно з тиском ідеальної електронної підсистеми, що зображається безрозмірною функцією

$$\mathcal{F}(x) = 8 \int_0^x dt t^4 (1+t^2)^{-1/2} = \quad (5)$$

$$= x(2x^2 - 3)(1+x^2)^{1/2} + 3 \ln [x + (1+x^2)^{1/2}].$$

Для зручності наступного викладу зобразимо формулу (4) в еквівалентній формі, а саме

$$P(r) = \frac{\pi m_0^4 c^5}{3h^3} \mathcal{F}(x(r)) \{1 - \varphi(x(r)|z)\}. \quad (6)$$

Залежність функції  $\varphi(x|z)$  від параметра релятивізму ілюструє рисунок 1. При  $x \gg 1$  ця функція слабо залежить від  $x$ , а її асимптотику визначає заряд ядра  $z$ .

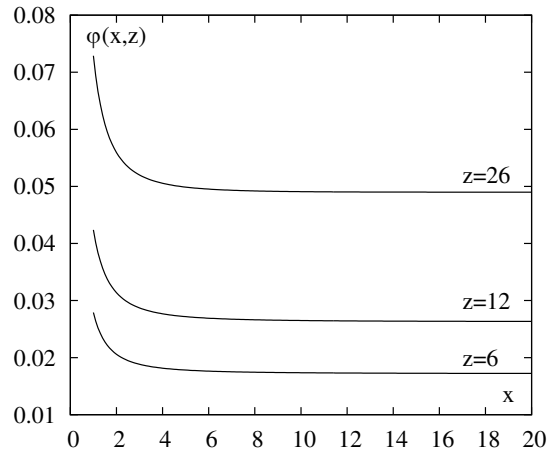


Рис. 1: Залежність функції  $\varphi(x|z)$  від параметра релятивізму при фіксованих значеннях заряду ядра.

Підставимо вираз (6) у ліву сторону рівняння (3), праву сторону цього рівняння розкладемо за степенями  $c^{-2}$ , зберігаючи лише лінійні члени, а замість  $P(r)$  у них використаємо (6) при  $\varphi(x|z) = 0$ . Тоді у безрозмірних змінних

$$\xi = r/\lambda, \quad y(\xi) = \varepsilon_0^{-1} \left\{ (1 + x^2(r)^{-1/2} - 1) \right\} \quad (7)$$

рівняння (3) набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left\{ [1 - \varphi(\xi|z)] \xi^2 \frac{dy}{d\xi} - \mathcal{F}(x) (8\varepsilon_0 x^3(\xi))^{-1} \frac{d\varphi(\xi|z)}{dx} \right\} \cong \\ & \cong \left( y^2(\xi) + \frac{2}{\varepsilon_0} \right)^{3/2} \left\{ 1 + \varepsilon_0 \frac{m_0}{m_u \mu_e} f(\xi) \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Тут використано такі позначення:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 & \equiv \varepsilon_0(x_0) = (1 + x_0^2)^{1/2} - 1; \\ \mathcal{F}(\xi) & \equiv \mathcal{F}(x(\xi)); \quad x(\xi) = \varepsilon_0 \left( y^2(\xi) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi) \right)^{1/2}; \\ \varphi(\xi|z) & \equiv \varphi(x(\xi)|z); \\ f(\xi) & \equiv 2\mathcal{M}(\xi)\xi^{-1} + \frac{1}{8} \mathcal{M}(\xi) \left\{ x^{-3}(x) + \xi^3 \varepsilon_0^{-3} \mathcal{M}^{-1}(\xi) \right\} \varepsilon_0; \\ \mathcal{M}(\xi) & \equiv M(r)\mu_e^2 M_0^{-1} = \int_0^\xi d\xi_1 \xi_1^2 \left( y^2(\xi_1) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi_1) \right)^{3/2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Масштаб  $\lambda$  визначається співвідношенням

$$\frac{32\pi^2 G}{3(hc)^3} \left\{ \lambda m_0 c^2 m_u \mu_e \varepsilon_0 \right\}^2 = 1. \quad (10)$$

Рівняння (8) трипараметричне (у ньому фігурують безрозмірні параметри  $x_0, \mu_e, z$ ) і нелінійне. Проте найбільш нелінійними є доданки, пропорційні функціям  $\varphi(\xi|z), \frac{d\varphi(\xi|z)}{dx}$  та  $f(\xi)$ , що є малими. Тому їх можна враховувати за теорією збурень, вибираючи за нульове наближення розв'язки рівняння

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left\{ \xi^2 \frac{dy}{d\xi} \right\} = - \left( y^2(\xi) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi) \right)^{3/2}, \quad (11)$$

яке є однопараметричним і нагадує рівняння Лена-Емдена (ЛЕ). Зокрема при  $x_0 \gg 1$  рівняння (11) збігається з рівнянням ЛЕ для індекса  $n = 3$ , а при  $x_0 \ll 1$  – за допомогою масштабування зводиться до рівняння ЛЕ для  $n = 3/2$ . Рівняння (11) – це рівняння моделі Чандрасекара. Воно задовольняє граничні умови  $y(0) = 1, y'(0) = 0$ ; а умова  $y(\xi_1(x_0)) = 0$  визначає безрозмірний радіус зорі у цій моделі, так що

$$R(x_0, \mu_e) = \lambda \xi_1(x_0) = \frac{R_0}{\varepsilon_0 \mu_e} \xi_1(x_0), \quad (12)$$

$$R_0 = \left( \frac{3}{2} \right)^{1/2} (4\pi)^{-1} \left( \frac{h^3}{cG} \right)^{1/2} (m_0 m_H)^{-1}.$$

У роботі [9] розв'язки рівняння (11) представлені у вигляді розкладів за степенями  $\varepsilon_0(x_0)$ . Зокрема при  $x_0 \gg 1$

$$y(\xi) = \sum_{m \geq 0} \varepsilon_0^{-m}(x_0) t_m(\xi), \quad (13)$$

де  $t_m(\xi)$  – універсальні функції змінної  $\xi$ , апроксимовані поліномами.

У наближенні (11) маса карлика дорівнює

$$M(x_0, \mu_e) = \frac{M_0}{\mu_e^2} \mathcal{M}(x_0), \quad (14)$$

$$\mathcal{M}(x_0) = \int_0^{\xi_1(x_0)} d\xi \xi^2 \left( y^2(\xi) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi) \right)^{3/2}.$$

В області  $x_0 \gg 1$  маса добре апроксимується розкладом [9]

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(x_0) &= b_1 - b_2 \varepsilon_0^{-2}(x_0) + b_3 \varepsilon_0^{-3}(x_0) - b_4 \varepsilon_0^{-4}(x_0) - b_5 \varepsilon_0^{-4}(x_0) \ln \varepsilon_0(x_0) + \dots, \\ b_0 &= 2,01824\dots; \quad b_2 = 11,4669\dots; \quad b_3 = 55,0261\dots; \\ b_4 &= 65,9691\dots; \quad b_5 = 29,8172\dots \end{aligned} \quad (15)$$

Асимптотика  $\mathcal{M}(x_0)$  при  $x_0 \rightarrow \infty$  добре відома з теорії ЛЕ для індекса політропи  $n = 3$ . У роботі [8] вперше було розраховано  $\mathcal{M}(x_0)$  з точністю до  $x_0^{-2}$ , а саме:

$$\mathcal{M}(x_0) = b_0 - \tilde{b}_2 x_0^{-2} + \dots, \quad \tilde{b}_2^* \simeq 20. \quad (16)$$

Це наближення досить грубе, а відхилення від „точного“ чисельного результату апроксимації (16), а також функції

$$\mathcal{M}(x_0) = b_0 - b_2 \varepsilon_0^{-2} \quad (17)$$

є суттєвими. Для наближеної, якісної оцінки внесків у повну масу зорі збудуючих членів замінимо  $\varepsilon(\xi|z)$  та  $f(\xi)$  їхніми усередненими значеннями,

$$\begin{aligned} \varepsilon(\xi|z) &\Rightarrow \bar{\varphi}(x_0|z) = \left\{ \int_0^{\xi_1(x_0)} d\xi \xi^2 x^3(\xi) \right\}^{-1} \int_0^{\xi_1(x_0)} d\xi \xi^2 x^3(\xi) \varphi(\xi|z); \\ f(\xi) &\Rightarrow \bar{f}(x_0) = \left\{ \int_0^{\xi_1(x_0)} d\xi \xi^2 x^3(\xi) \right\}^{-1} \int_0^{\xi_1(x_0)} d\xi \xi^2 x^3(\xi) f(\xi), \end{aligned} \quad (18)$$

а також знехтуємо похідною  $\frac{d}{dx} \varphi(\xi|z)$ . При цьому  $x(\xi)$ ,  $\varphi(\xi|z)$  та  $f(\xi)$  визначаються формулами (9), у яких  $y(\xi)$  – розв'язки рівняння (11). Переходячи від  $\xi$ ,  $y(\xi)$  до нових змінних

$$\eta = \xi/k, \quad t(\eta) \equiv y(k\eta) \quad (19)$$

у прийнятому наближенні зводимо рівняння (8) до рівняння (16),

$$\frac{1}{\eta^2} \frac{d}{d\eta} \left\{ \eta^2 \frac{dt}{d\eta} \right\} = - \left( t^2(\eta) + \frac{2}{\varepsilon_0} t(\eta) \right)^{3/2}, \quad (20)$$

вибираючи масштаб  $k$  у вигляді

$$k = (1 - \bar{\varphi}(x_0|z))^{1/2} \left( 1 + \varepsilon_0 \frac{m_0}{m_u \mu_e} \bar{f}(x_0) \right)^{-1/2}. \quad (21)$$

У цьому наближенні повна безрозмірна маса карлика дорівнює

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{(1)}(x_0|z) &= \mathcal{M}(x_0)k^3 = b_0^* - b_1\varepsilon_0 - b_2\varepsilon_0^{-2} + \dots, \\ b_0^*(x_0|z) &= b_0 \left( 1 - \frac{3}{2} \bar{\varphi}(x_0|z) \right); \quad b_2 = 11,4669\dots, \\ b_1(x_0) &= \frac{3}{2} b_0 \bar{f}(x_0) \frac{m_0}{m_u \mu_e}, \end{aligned} \quad (22)$$

Функція  $\mathcal{M}^{(1)}(x_0|z)$  є параболою, яка має максимум у деякій точці  $\varepsilon_0^* \equiv \equiv [1 + (x_0^*)^2]^{1/2} - 1$ . В околі точки  $x_0^*$  функцію  $\mathcal{M}^{(1)}(x_0|z)$  представимо у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{(1)}(x_0|z) &= b_0 \left\{ 1 - \frac{3}{2} \bar{\varphi}(x_0^*|z) \right\} - \frac{3}{2^{2/3}} (b_1^2(x_0^*)b_2)^{1/3} - \\ &- \frac{3}{2^{4/3}} \left( \frac{b_1^2(x_0^*)}{b_2} \right)^{1/3} \{ \varepsilon_0(x_0) - \varepsilon_0(x_0^*) \}^2 + \dots, \\ \varepsilon(x_0^*) \equiv \varepsilon_0^* &= \left\{ 2 \frac{b_2}{b_1(x_0^*)} \right\}^{1/3}. \end{aligned} \quad (23)$$

В залежності від значення заряду ядра  $x_0^*$  змінюється від 28,6 при  $z = 2$  до 28,8 при  $z = 26$ . При цьому максимальне значення  $\mathcal{M}^{(1)}(x_0|z)$  карлика змінюється від 1,953 до 1,837.

З виконаних оцінок видно, що критична маса залежить від хімічного складу карлика, а внесок кулонівських взаємодій у величину відхилення критичної маси від границі Чандрасекара може перевищувати внесок ефектів ЗТВ. Фактично кулонівські взаємодії понижують границю Чандрасекара, а причиною нестійкості є ефекти ЗТВ. Дійсно, у вираз для критичного значення  $\varepsilon_0^* \approx x_0^*$  не входить функція  $\bar{\varphi}(x_0^*|z)$ , тобто нестійкість настає при деякій критичній густині у центрі зорі, яка слабо залежить від міжчастинкових взаємодій.

Розраховані чисельним методом розв'язки рівнянь (8) та (11) зображено на рис. 2. Як видно з рисунка, врахування взаємодій призводить до невеликого зменшення радіуса, що впливає зі співвідношень (17), (19). Результати чисельного розрахунку залежності маси карлика від параметра  $x_0$  зображено на рисунку 3. Критична точка на цих кривих має такі координати:

$$\begin{aligned} \text{при } z = 6: \quad x_0^* &\cong 28,7; \quad \mathcal{M}(x_0^*|z) = 1,930; \\ \text{при } z = 26: \quad x_0^* &\cong 28,8; \quad \mathcal{M}(x_0^*|z) = 1,837. \end{aligned}$$

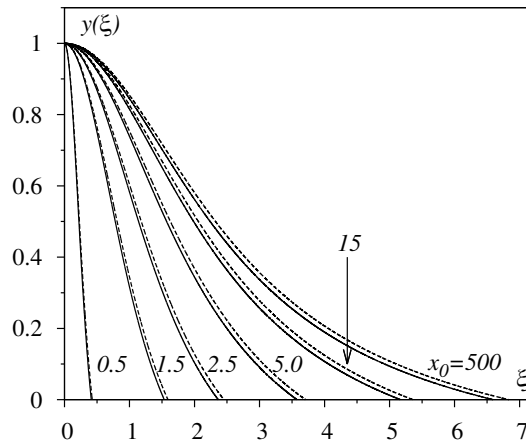


Рис. 2: Розв'язки рівнянь (8) (суцільні криві) та (11) (пунктирні криві) для різних значень параметра  $x_0$  при  $z = 6$ .

У роботі [6], де було використано наближення Шатцмана (16) і рівняння стану ідеального виродженого електронного газу, знайдено значення центральної густини  $\rho_c = 2,5 \cdot 10^{10} \text{ г/см}^3$ , чому відповідає

$$x_0^* \cong \frac{\hbar}{m_0} \left(\frac{\pi}{3}\right)^{2/3} 10^{4/3} \left(\frac{2,5}{\mu_e \cdot 1,67}\right)^{1/3} \approx 23,34 \dots$$

Однак значення критичної маси виявилось дуже заниженим:

$$M(x_0^*) \simeq 0,96 \cdot b_0 \simeq 1,9375\dots,$$

що на 3% відрізняється від границі Чандрасекара.

### 3 Варіаційний метод розрахунку характеристик вироджених карликів

При розрахунках характеристик вироджених карликів доцільно використовувати різні варіанти варіаційного підходу. Відомо, що у ньютонівській теорії умова екстремуму повної енергії зорі при незмінному хімічному складі і збереженні ентропії в кожному елементі є умовою гідростатичної рівноваги [8]. У випадку сферично-симетричної моделі холодного карлика (при  $T = 0\text{K}$ ) з міжчастинковими кулонівськими взаємодіями повну енергію можна записати у вигляді

$$E = E_e - G \int_0^M \frac{dM M(r)}{r} \quad (24)$$



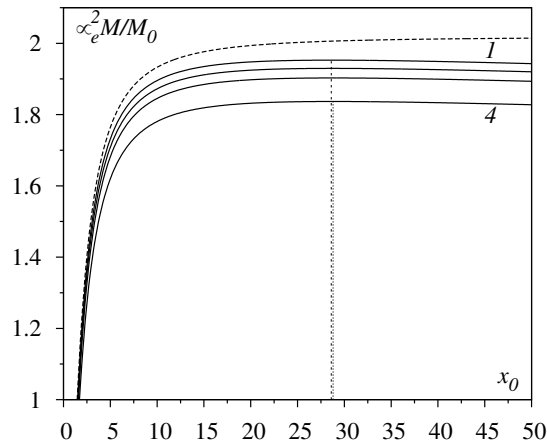


Рис. 3: Залежність маси карлика від параметра  $x_0$  при  $z = 2$  (крива 1); 6; 12; 26 (крива 4). Пунктирна крива відповідає моделі Чандрасекара. Вертикальні лінії вказують на положення максимуму відповідних кривих.

де

$$E_e = 4\pi \int_0^R dr r^2 \varepsilon_e(r) \quad (25)$$

негравітаційна енергія (кінетична енергія та енергія кулонівських взаємодій), а  $\varepsilon_e(r)$  – її об'ємна густина,

$$M(r) = 4\pi \int_0^r dr r^2 \rho(r) \quad (26)$$

маса у сфері радіуса  $r$ ,  $\rho(r)$  – густина маси.

В однорідній моделі тиск  $P$  і  $E_e$  є функціями параметра релятивізму, а зв'язок між ними дається співвідношенням

$$P(x) = -\frac{dE(x)}{dV} = \frac{x^4}{N_e} \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^3 (9\pi^2)^{-1} \frac{dE(x)}{dx}. \quad (27)$$

Інтегруючи, знаходимо, що в однорідній моделі

$$\varepsilon_e(x) = \frac{N_e}{V} 9\pi^2 \left(\frac{\hbar}{m_0 c}\right)^3 \int_0^x \frac{dx}{x^4} P(x) = 3x^3 \int_0^x \frac{dx}{x^4} P(x). \quad (28)$$

Тому у локальному наближенні

$$\varepsilon(r) \equiv \varepsilon(x(r)) = 3x^3(r) \int_0^{x(r)} \frac{dx}{x^4} P(x), \quad (29)$$

а згідно з формулами (6), (7)

$$E_e = \frac{3 E_0}{8 \mu_e^3} \int_0^{\xi_1(x_0)} d\xi \xi^2 \left( \frac{x(\xi)}{\varepsilon_0} \right)^3 \left\{ \int_0^x \frac{dx}{x^4} \mathcal{F}_1(x) \right\}, \quad (30)$$

де

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(x) &= P(x) 3h^3 (\pi m_0^4 c^5)^{-1} \equiv \mathcal{F}(x) [1 - \varphi(x, z)], \\ E_0 &= GM_0^2 R_0^{-1}. \end{aligned} \quad (31)$$

З формули (30) одержуємо варіацію  $E_e$  у вигляді:

$$\delta E_e = -\frac{1 E_0}{8 \mu_e^3} \int_0^{\mathcal{M}(x_0)} d\mathcal{M} \frac{\delta x}{x^4(\xi)} \mathcal{F}_1(x(\xi)), \quad (32)$$

де

$$\mathcal{M}(\xi) = \int_0^\xi \frac{d\xi \xi^2}{\varepsilon_0^3} x^3(\xi) - \quad (33)$$

безрозмірна маса у сфері радіуса  $\xi$ . Використовуючи рівність  $d\mathcal{M} = \xi^2 x^3(\xi) d\xi \varepsilon_0^{-3}$ , представимо формулу (32) в еквівалентній формі, а саме

$$\begin{aligned} \delta E_e &= -\frac{E_0}{8(\mu_e \varepsilon_0)^3} \int_0^{\mathcal{M}(x_0)} d\mathcal{M} \mathcal{F}_1(x(\xi)) \delta(x^{-3}(\xi)) = \\ &= -\frac{E_0}{8(\mu_e \varepsilon_0)^3} \int_0^{\mathcal{M}(x_0)} d\mathcal{M} \mathcal{F}_1(x(\xi)) \delta \left( \xi^2 \frac{d\xi}{d\mathcal{M}} \right) = \\ &= -\frac{E_0}{8(\mu_e \varepsilon_0)^3} \left\{ 2 \int_0^{\mathcal{M}} d\mathcal{M} \mathcal{F}_1(x) \xi \delta \xi \frac{d\xi}{d\mathcal{M}} - \int_0^{\mathcal{M}} d\mathcal{M} \delta \xi \frac{d}{d\mathcal{M}} (\xi^2 \mathcal{F}_1(x)) \right\} = \\ &= \frac{E_0}{8(\mu_e)^3} \int_0^{\mathcal{M}} d\mathcal{M} \delta \xi x^{-3}(\xi) \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}_1(\xi). \end{aligned} \quad (34)$$

Варіація повної енергії набуває вигляду

$$\delta E = \frac{E_0}{\mu_e^3} \int_0^{\mathcal{M}} d\mathcal{M} \delta \xi \left\{ x^{-3}(\xi) \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}_1(x(\xi)) + \frac{\mathcal{M}(\xi) \varepsilon_0}{\xi^2} \right\}. \quad (35)$$

З умови  $\delta E = 0$  одержуємо рівняння

$$x^{-3}(\xi) \left\{ [1 - \varphi(x|z)] \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}(x) - \frac{1}{8} \mathcal{F}(x) \frac{d\varphi}{d\xi} \right\} = -\frac{\mathcal{M}(\xi) \varepsilon_0}{\xi^2}, \quad (36)$$

яке разом з означенням (33) дає рівняння рівноваги (8) без релятивістської поправки ( $f(r) = 0$ ).

З викладеного вище випливає, що розподіл концентрації електронів (або густини речовини) вздовж радіуса зорі можна знайти шляхом прямої мінімізації виразу (24), підбираючи різні пробні функції  $x(r)$ . У моделі, яку ми розглядаємо,

$$E_e = \frac{E_0}{\mu_e^3} \left\{ \tilde{E}_{\text{кін}}(x_0) + \tilde{E}_{\text{кул}}(x_0, z) \right\};$$

$$\tilde{E}_0(x_0) = \varepsilon_0^{-3} \int_0^{\xi_1(x_0|z)} d\xi \xi^2 \left\{ x^3(\xi) [1 + x^2(\xi)^{1/2} - 1] - \frac{1}{8} \mathcal{F}(x(\xi)) \right\}; \quad (37)$$

$$\tilde{E}_{\text{кул}}(x_0, z) = \alpha_0 \varepsilon_0^{-3} \int_0^{\xi_1(x_0|z)} d\xi \xi^2 x^3(\xi) \left\{ -\frac{3}{4\pi} x(\xi) + \right.$$

$$\left. + z^{0,6} \varepsilon_c(x(\xi)) + z \alpha_0^{1/2} \varepsilon_\omega(x(\xi)) + \alpha_0 \varepsilon_c(x(\xi)) \right\}.$$

Гравітаційна енергія зображається у вигляді

$$-G \int_0^M \frac{dm m(r)}{r} = \frac{E_0}{\mu_e^3} \tilde{E}_{\text{grav}}(x_0), \quad (38)$$

$$\tilde{E}_{\text{grav}}(x_0) = -\varepsilon_0^{-5} \int_0^{\xi_1(x_0|z)} d\xi \xi x^3(\xi) \int_0^\xi d\xi_2 \xi_2^2 x^3(\xi_2).$$

Мінімальне значення суми

$$\tilde{E}(x_0|z) \equiv \tilde{E}_0(x_0) + \tilde{E}_{\text{кул}}(x_0|z) + \tilde{E}_{\text{grav}}(x_0) \quad (39)$$

при заданих значеннях параметрів  $(x_0|z)$  визначає найкращу пробну функцію  $x(\xi)$ , а вираз

$$\varepsilon_0^{-3} \int_0^{\xi_1(x_0|z)} d\xi \xi^2 x^3(\xi) = \mathcal{M}(x_0|z) - \quad (40)$$

масу зорі. У зв'язку з тим, що границею інтегрування у виразах (39) є невідоме  $\xi_1(x_0|z)$ ,  $\tilde{E}(x_0|z)$  доцільно представити в еквівалентному вигляді:

$$\tilde{E}(x_0|z) = \mathcal{M}(x_0|z) [\Phi_1(x_0|z) - 1 - \alpha_0 \Phi_2(x_0|z)] - \mathcal{M}^{5/3}(x_0|z) \Phi_3(x_0|z), \quad (41)$$

де

$$\begin{aligned}\Phi_1(x_0|z) &= \left\{ \int_0^{\xi_1} d\xi \xi^2 x^3(\xi) \right\}^{-1} \int_0^{\xi_1} d\xi \xi^2 \left\{ x^3(\xi)(1+x^2(\xi))^{1/2} - \frac{1}{8} \mathcal{F}(x(\xi)) \right\}; \\ \Phi_2(x_0|z) &= \left\{ \int_0^{\xi_1} d\xi \xi^2 x^3(\xi) \right\}^{-1} \int_0^{\xi_1} d\xi \xi^2 x^3(\xi) \times \\ &\times \left\{ \frac{3}{4\pi} x(\xi) - z^{0,6} \varepsilon_L(x(\xi)) - z \alpha_0^{1/2} \varepsilon_\omega(x(\xi)) - \alpha_0^{1/2} \varepsilon_c(x(\xi)) \right\}; \\ \Phi_3(x_0|z) &= \left\{ \int_0^{\xi_1} d\xi \xi^2 x^3(\xi) \right\}^{-5/3} \int_0^{\xi_1} d\xi \xi x^3(\xi) \int_0^\xi d\xi_2 \xi_2^2 x^3(\xi_2).\end{aligned}\quad (42)$$

Співвідношення (41), (42) можна використати для мінімізації повної енергії методом послідовних наближень. Справді, у нульовому наближенні функції  $\Phi_i(x_0|z)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) можна розрахувати наближено, використовуючи пробну функцію

$x_0(\xi) = \varepsilon_0 \left( y_0^2(\xi) + \frac{2}{\varepsilon_0} y_0(\xi) \right)^{1/2}$ , де  $y_0(\xi)$  – розв’язки рівняння (11). Границя інтегрування за змінною  $\xi$  у цьому наближенні відома –  $\xi_1(x_0)$  визначається умовою  $y_0(\xi_1(x_0)) = 0$ . В такому наближенні вираз (41) можна розглядати як зображення енергії моделі в термінах „маса зорі“, „параметр релятивізму в її центрі“. В умовах рівноваги зв’язок між цими величинами визначається рівнянням  $\frac{d}{dx_0} \tilde{E}(x_0|z) = 0$ . У явному вигляді ця умова є таким диференціальним рівнянням:

$$\left( \frac{d}{dx_0} \mathcal{M} \right) \left\{ \Phi_1 - 1 - \alpha_0 \Phi_2 - \frac{5}{3} \mathcal{M}^{2/3} \Phi_3 \right\} + \mathcal{M} \left\{ \frac{d}{dx_0} (\Phi_1 - \alpha_0 \Phi_2) - \mathcal{M}^{2/3} \frac{d}{dx_0} \Phi_3 \right\} = 0, \quad (43)$$

де  $\Phi_i \equiv \Phi_i(x_0|z)$ . При великих значеннях  $x_0$  розв’язок цього рівняння є розкладом за оберненими степенями  $x_0$ ,

$$\mathcal{M}(x_0|z) = \mathcal{M}_0(z) - \frac{a_2}{x_0^2} + \frac{a_3}{x_0^3} + \dots, \quad (44)$$

де  $\mathcal{M}_0(z)$  відіграє роль границі Чандрасекара:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_0(z) &= \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \left[ \left\{ \frac{d}{dx_0} (\Phi_1 - \alpha_0 \Phi_2) \right\} \left\{ \frac{d}{dx_0} \Phi_3 \right\}^{-1} \right]^{3/2} = \\ &= \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \left\{ (\Phi_1 - \alpha_0 \Phi_3) \Phi_3^{-1} \right\}^{3/2},\end{aligned}\quad (45)$$

оскільки  $\Phi_i \sim x_0$  при  $x_0 \gg 1$ .

При довільних значеннях параметра  $x_0$  рівняння (43) можна розв’язувати чисельно. Знайшовши  $\mathcal{M}(x_0|z)$  у нульовому наближенні, можна уточнити  $\xi_1(x_0|z)$  за формулою (40) і розрахувати чисельно мінімальне значення суми (39), вибираючи

найкращу пробну функцію. За відомою величиною  $\tilde{E}(x_0|z)$  з рівняння (41) можна знайти уточнену величину маси і т.д.

З усього викладеного випливає, що мінімізація виразу (41) на основі наближених  $\Phi_i(x_0|z)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) відповідає першому порядку самоузгодженої теорії збурень.

Альтернативний варіант розрахунку ґрунтується на прямій наближеній мінімізації виразу (39) на основі  $y_0(\xi)$  із наступним визначенням маси з алгебраїчного рівняння (41). За відомою масою радіус карлика визначається з рівняння (40).

## 4 Вплив ефектів ЗТВ та кулонівських взаємодій на величину критичної маси карлика

Модель попереднього розділу розглянемо у рамках ЗТВ. У цьому випадку повна енергія зорі визначається співвідношенням

$$E = (M - m_u N) c^2, \quad (46)$$

де  $M$  – повна маса,  $N$  – повне число баріонів. Повна маса сферичного розподілу матерії в зорі

$$M = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr \quad (47)$$

визначається її локальною густиною

$$\rho(r) = \rho_0(r) + \frac{\varepsilon_e(r)}{c^2}, \quad (48)$$

де  $\rho_0(r) = n(r)m_u$  – густина маси баріонів, а  $\varepsilon_e(r)$  – об'ємна густина негравітаційної енергії, що включає густину кінетичної енергії електронів та кулонівських взаємодій. Повне число баріонів у зорі дорівнює

$$N = \int_0^R n(r) dv, \quad (49)$$

де

$$dv = \left(1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2}\right)^{-1/2} 4\pi r^2 dr \quad (50)$$

елемент власного об'єму в геометрії Шварцшильда, а  $m(r)$  – маса у сфері радіуса  $r$ . Згідно з формулами (46) - (50)

$$E = c^2 \int_0^R dv \left\{ \left(1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2}\right)^{1/2} \left[ \rho_0(r) + \frac{\varepsilon_e(r)}{c^2} \right] - \rho_0(r) \right\}. \quad (51)$$

Вважаючи, що  $2Gm(r)/rc^2 \ll 1$ , з точністю до членів другого порядку

$$E = \int_0^R dv \left\{ \varepsilon_e(r) - \rho_0(r) \left[ \frac{\mathcal{M}(r)G}{r} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathcal{M}^2(r)G^2}{r^2 c^2} - \frac{\varepsilon_e(r)\mathcal{M}(r)G}{\rho_0 r c^2} + \dots \right] \right\}. \quad (52)$$

У роботі [8] розглянуто модель, яка не враховує міжчастинкові кулонівські взаємодії, тому у цій роботі  $\varepsilon_e(r)$  є об'ємною густиною кінетичної енергії електронної підсистеми карлика. Виділяючи енергію ньютонівського наближення та переходячи до ньютонівського простору, за аналогією з роботою [8], наближено представимо повну енергію моделі у вигляді

$$\begin{aligned}
 E &= E_{Newt} + E_{GTR}, \\
 E_{Newt} &= 4\pi \int_0^R dr r^2 \varepsilon_e(r) - G \int_0^M \frac{dm m(r)}{r}; \\
 E_{GTR} &= -\frac{G}{c^2} \int_0^M \frac{dm}{r} \left\{ \frac{\varepsilon_e(r)m(r)}{\rho_0(r)} + \int_0^{m(r)} \frac{dm}{\rho_0(r)} \varepsilon_e(r) \right\} - \\
 &- \frac{G^2}{c^2} \int_0^M \frac{dm}{r} \left\{ \frac{1}{2} \frac{m^2(r)}{r} - \int_0^m \frac{dm m(r)}{r} + \frac{m(r)}{r^3} \int_0^r dr r m(r) \right\} + \dots
 \end{aligned} \tag{53}$$

При цьому складові  $E_{GTR}$  можна обчислювати у ньютонівському наближенні:

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho_0(r) r^2 dr; \quad dm = 4\pi r^2 \rho_0(r) dr.$$

Щоб представити вираз для повної енергії (53) у термінах „маса зорі“, „параметр релятивізму у її центрі“, перейдемо до безрозмірних змінних, дещо відмінних від змінних попереднього параграфу. Нехай

$$r = \lambda' \eta, \tag{54}$$

де  $\lambda'$  визначимо з рівності (47):

$$M = 4\pi(\lambda')^3 m_u \mu_e \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^3 (3\pi^2)^{-1} \int_0^{\eta_1(x_0)} d\eta \eta^2 x^3(\eta). \tag{55}$$

Вводячи безрозмірну масу зорі  $\tilde{M} = M M_0^{-1} \mu_e^2$  і використовуючи рівняння (55), одержуємо співвідношення

$$\lambda' = \lambda \tilde{M}^{1/3} \left\{ \varepsilon_0^{-3} \int_0^{\eta_1(x_0)} d\eta \eta^2 x^3(\eta) \right\}^{-1/3}, \tag{56}$$

де  $\eta_1(x_0)$  – безрозмірний радіус зорі у змінних  $\eta$ , а  $x^3(\eta)$  є безрозмірною густиною зорі, яка відіграє роль пробної функції. Тому  $\lambda'$  є функцією безрозмірної маси і параметра  $x_0$ .

Складові величини  $E_{Newt}$  у цих змінних мають таке зображення: кінетична енергія електронної підсистеми

$$E_{kin} = \frac{E_0}{\mu_e^3} \left( \frac{\lambda'}{\lambda} \right)^3 \int_0^{\eta_1(x_0)} d\eta \eta^2 \left\{ x^3(\eta) [(1 + x^2(\eta))^{1/2} - 1] - \frac{1}{8} \mathcal{F}(x(\eta)) \right\}; \quad (57)$$

енергія кулонівських взаємодій

$$E_{coul} = -\frac{E_0}{\mu_e^3} \left( \frac{\lambda'}{\lambda} \right)^3 \alpha_0 \int_0^{\eta_1(x_0)} d\eta \eta^2 x^3(\eta) \times \left\{ \frac{3}{4\pi} x(\eta) - z^{0,6} \varepsilon_L(x(\eta)) - z \alpha_0^{1/2} \varepsilon_\omega(x(\eta)) - \alpha_0 \varepsilon_c(x(\eta)) \right\}; \quad (58)$$

гравітаційна енергія

$$E_{grav} = -\frac{E_0}{\mu_e^3} \left( \frac{\lambda'}{\lambda} \right)^5 \int_0^{\eta_1(x_0)} d\eta \eta x^3(\eta) \int_0^\eta d\eta_2 \eta_2^2 x^3(\eta_2). \quad (59)$$

В аналогічному вигляді зображаються і складові виразу  $E_{GTR}$ . Використовуючи співвідношення (56), одержуємо таке зображення повної енергії зорі в термінах  $(\tilde{M}, x_0)$ :

$$E(\tilde{M}, x_0) = \frac{E_0}{\mu_e^3} \varepsilon(\tilde{M}, x_0),$$

$$\varepsilon(\tilde{M}, x_0) = \tilde{M} \{ S_1(\tilde{M}, x_0) - 1 - \alpha_0 S_2(\tilde{M}, x_0) \} - \tilde{M}^{5/3} S_3(\tilde{M}, x_0) - \frac{m_0}{\mu_e m_u} \{ \tilde{M}^{5/3} P(\tilde{M}, x_0) + \tilde{M}^{7/3} D(\tilde{M}, x_0) \} + \dots \quad (60)$$

Тут використано такі позначення:

$$S_1(\tilde{M}, x_0) = C^{-1}(\tilde{M}, x_0) \int_0^{\eta_1(x_0)} d\eta \eta^2 a(\eta);$$

$$S_2(\tilde{M}, x_0) = C^{-1}(\tilde{M}, x_0) \int_0^{\eta_1(x_0)} d\eta \eta^2 x^3(\eta) \times \left\{ \frac{3}{4\pi} x(\eta) - z^{0,6} \varepsilon_L(x(\eta)) - z \alpha_0^{1/2} \varepsilon_\omega(x(\eta)) - \alpha_0 \varepsilon_c(x(\eta)) \right\}; \quad (61)$$

$$\begin{aligned}
S_3(\tilde{M}, x_0) &= C^{-5/3}(\tilde{M}, x_0) \int_0^{\eta_1(x_0)} d\eta \eta x^3(\eta) \int_0^\eta d\eta_2 \eta_2^2 x^3(\eta_2); \\
a(\eta) &= x^3(\eta)(1 + x^2(\eta))^{1/2} - \frac{1}{8} \mathcal{F}(x(\eta)); \\
C(\tilde{M}, x_0) &= \int_0^{\eta_1(x_0)} d\eta \eta^2 x^3(\eta); \\
P(\tilde{M}, x_0) &= C^{-5/3}(\tilde{M}, x_0) \left\{ \int_0^{\eta_1(x_0)} d\eta \eta [a(\eta) - x^3(\eta)] \int_0^\eta d\eta_2 \eta_2^2 x^3(\eta) + \right. \\
&+ \left. \int_0^{\eta_1(x_0)} d\eta \eta x^3(\eta) \int_0^\eta d\eta_2 \eta_2^2 [a(\eta_2) - x^3(\eta_2)] \right\}; \\
D(\tilde{M}, x_0) &= C^{-7/3}(\tilde{M}, x_0) \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{\eta_1(x_0)} d\eta x^3(\eta) \left[ \int_0^\eta d\eta_2 \eta_2^2 x^3(\eta_2) \right]^2 - \right. \\
&- \int_0^{\eta_1(x_0)} d\eta \eta x^3(\eta) \int_0^\eta d\eta_2 \eta_2 x^3(\eta_2) \int_0^{\eta_2} d\eta_3 \eta_3^2 x^3(\eta_3) + \\
&+ \left. \int_0^{\eta_1(x_0)} \frac{d\eta}{\eta^2} x^3(\eta) \int_0^\eta d\eta_2 \eta_2^2 x^3(\eta_2) \left[ \int_0^\eta d\eta_3 \eta_3 \int_0^{\eta_3} d\eta_4 \eta_4^2 x^3(\eta_4) \right] \right\}. \quad (62)
\end{aligned}$$

Співвідношення (60) - (62) визначають функціонал повної енергії у змінних  $(\tilde{M}, x_0)$ , у яких  $x(\eta)$  є пробною функцією. Мінімум функціонала (60) може забезпечити така функція  $x(\eta)$ , яка близька до розв'язку рівняння рівноваги. Підстановкою

$$x(\eta) = \varepsilon_0 \left( f^2(\eta) + \frac{2}{\varepsilon_0} f(\eta) \right)^{1/2} \quad (63)$$

введімо функцію  $f(\eta)$ , яка є розв'язком рівняння рівноваги,

$$\frac{1}{\eta^2} \frac{d}{d\eta} \left\{ \eta^2 \frac{df}{d\eta} \right\} = - \left( \frac{\lambda'}{\lambda} \right)^2 \left\{ f^2(\eta) + \frac{2}{\varepsilon_0} f(\eta) \right\}^{3/2}, \quad (64)$$

що задовольняє граничні умови  $f(0) = 1$ ;  $f'(0) = 0$ , а  $\eta_1(x_0)$  визначається умовою  $f(\eta_1(x_0)) = 0$ . Розв'язок рівняння (64) залежить від  $\lambda'/\lambda$  як від параметра, тобто  $f(\eta) \equiv f(\eta|\lambda'/\lambda)$ . Оскільки релятивістські поправки до енергії є малими  $\frac{m_0}{m_u \mu_e} \sim 10^{-3}$ , то  $\lambda'/\lambda$  близьке до одиниці, тому в цих умовах  $f(r|\lambda'/\lambda)$  близьке



до  $y(\eta) \equiv f(\eta|1)$ , що ілюструє рисунок 4. Тому заміна  $f(\eta) \rightarrow y(\eta)$ ,  $\eta_1(x_0) \rightarrow \xi_1(x_0)$  вносить несуттєві похибки при мінімізації функціоналу (60), але значно спрощує обчислення. У цьому наближенні функції  $S_i(\tilde{M}, x_0)$ ,  $P(\tilde{M}, x_0)$ ,  $D(\tilde{M}, x_0)$  залежать лише від параметра  $x_0$  ( $S_i(\tilde{M}, x_0) \rightarrow S_{i0}(x_0)$ ;  $P(\tilde{M}, x_0) \rightarrow P_0(x_0)$ ;  $D(\tilde{M}, x_0) \rightarrow D_0(x_0)$ ), тому  $\varepsilon(\tilde{M}, x_0)$  має просту поліноміальну залежність від  $\tilde{M}$ . Використання  $y(\eta)$  замість  $f(\eta|\lambda'/\lambda)$  значно спрощує також обчислення функцій  $S_{i0}(x_0)$ ,  $P_0(x_0)$ ,  $D_0(x_0)$ , а підстановка (63) дозволяє зменшити кратність інтегралів. Залежність розрахованих у цьому наближенні функцій  $S_{i0}(x_0)$ ,  $P_0(x_0)$ ,  $D_0(x_0)$  від параметра релятивізму ілюструють рисунки 5, 6. При великих значеннях  $x_0$  всі  $S_{i0}(x_0) \sim x_0$ , а  $P_0(x_0)$ ,  $D_0(x_0) \sim x_0^2$ .

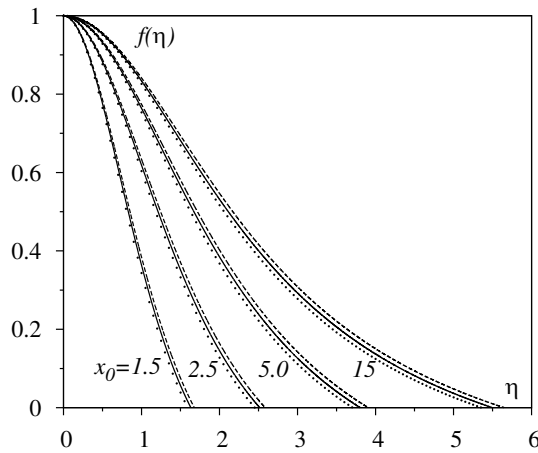


Рис. 4: Залежність розв'язків рівняння (64) від значення  $k = (\lambda'/\lambda)^2$ : точкова крива –  $k = 1$ , суцільна крива –  $k = 0,95$ , пунктирна крива –  $k = 0,9$ .

З умови рівноваги  $\frac{d}{dx_0} \varepsilon(\tilde{M}, x_0) = 0$  знаходимо рівняння, що визначає залежність  $\tilde{M}$  від параметра релятивізму:

$$\begin{aligned} & \tilde{M}^{-1} \frac{d\tilde{M}}{dx_0} \left\{ S_{10}(x_0) - 1 - \alpha_0 S_{20}(x_0) - \frac{5}{3} \tilde{M}^{2/3} \left[ S_{30}(x_0) + \frac{m_0}{\mu_e m_u} P_0(x_0) \right] - \right. \\ & \left. - \frac{m_0}{\mu_e m_u} \frac{7}{3} \tilde{M}^{4/3} \right\} + \\ & + \frac{dS_{10}}{dx_0} - \alpha_0 \frac{dS_{20}}{dx_0} - \tilde{M}^{2/3} \left[ \frac{dS_{30}}{dx_0} + \frac{m_0}{\mu_e m_u} \frac{dP_0}{dx_0} \right] - \frac{m_0}{\mu_e m_u} \frac{dD_0}{dx_0} \tilde{M}^{4/3} = 0. \end{aligned} \quad (65)$$

З умов

$$\frac{d}{dx_0} \varepsilon(\tilde{M}, x_0) = 0, \quad \frac{d^2}{dx_0^2} \varepsilon(\tilde{M}, x_0) \quad (66)$$

одержуємо систему двох квадратних відносно  $\tilde{M}^{2/3}$  рівнянь для знаходження коор-

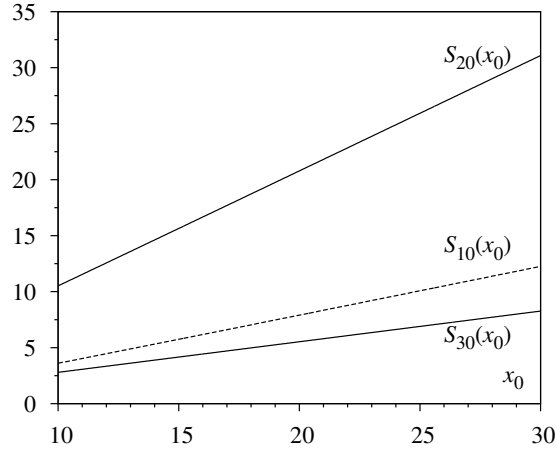


Рис. 5: Залежність функцій  $S_{i0}$  від параметра релятивізму  $x_0$  при  $z = 6$ .

динат критичної точки  $(x_0^*, \tilde{M}(x_0^*))$ , у якій  $\frac{d}{dx_0^*} \tilde{M}(x_0^*) = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_0} S_{10} - \alpha_0 \frac{dS_{20}}{dx_0} - \tilde{M}^{2/3} \left[ \frac{dS_{30}}{dx_0} + \frac{m_0}{\mu_e m_u} \frac{dP_0}{dx_0} \right] - \frac{m_0}{\mu_e m_u} \tilde{M}^{4/3} \frac{dD_0}{dx_0} &= 0; \\ \frac{d^2}{dx_0^2} S_{10} - \alpha_0 \frac{d^2 S_{20}}{dx_0^2} - \tilde{M}^{2/3} \left[ \frac{d^2 S_{30}}{dx_0^2} + \frac{m_0}{\mu_e m_u} \frac{d^2 P_0}{dx_0^2} \right] - \frac{m_0}{\mu_e m_u} \tilde{M}^{4/3} \frac{d^2 D_0}{dx_0^2} &= 0. \end{aligned} \quad (67)$$

При  $z = 2$  знаходимо, що  $x_0^* = 23,035$ ,  $\tilde{M}(x_0^*) = 1,936492$ , а при  $z = 6$  –  $x_0^* = 23,096$ ,  $\tilde{M}(x_0^*) = 1,13637$ , а при  $z = 26$  –  $x_0^* = 23,688$ ,  $\tilde{M}(x_0^*) = 1,823887$ , так що відхилення  $\tilde{M}(x_0^*)$  від границі Чандрасекара  $M_{ch} = 2,01824$  складає 4,1% при  $z = 2$ ; 5,2% при  $z = 6$  і 9,6% при  $z = 26$ .

## 5 Висновки

У цій роботі розглянуто питання про вплив кулонівських міжчастинкових взаємодій на максимальну масу виродженого карлика і значення параметра релятивізму у центрі зорі, при якому порушується стійкість карликів щодо ефектів ЗТВ. Використано модель зі сталим хімічним складом при  $T = 0K$ . За допомогою двох різних методів – рівняння рівноваги і варіаційного методу – показано, що критичне значення параметра релятивізму  $x_0$  майже не залежить від міжчастинкових взаємодій при будь-якому хімічному складі; максимальна маса карлика, що відповідає цьому значенню  $x_0$ , під впливом кулонівських взаємодій відхиляється від границі Чандрасекара більше, ніж за рахунок ефектів ЗТВ. Сумарне зменшення критичної маси за рахунок взаємодій та ефектів ЗТВ складає суттєву величину: від 4% при  $z = 2$  до 9% при  $z = 26$ , де  $z$  – валентність ядер. Така поведінка критичних параметрів пояснюється тим, що внесок кулонівських взаємодій до рівняння стану при великих

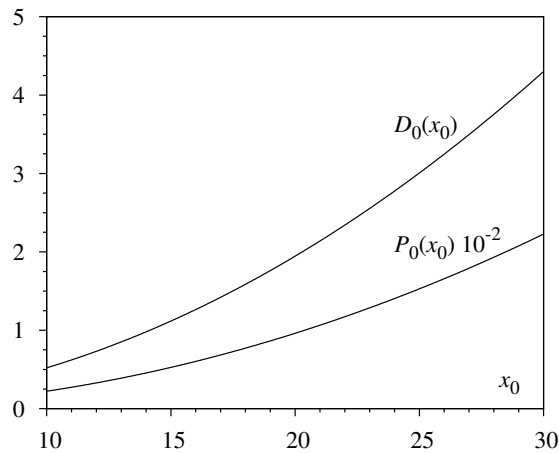


Рис. 6: Залежність функцій  $P_0(x_0) \cdot 10^{-2}$  та  $D_0(x_0)$  від параметра релятивізму  $x_0$

густинах має таку ж залежність від параметра релятивізму, як і внесок ідеального релятивістського електронного газу.

### Список використаної літератури

1. R. H. Fowler, MNRAS. **87**, 114 (1926).
2. S. Chandrasekhar, Astrophys. J. **74**, 81 (1931).
3. S. Chandrasekhar, MNRAS. **95**, 676 (1935).
4. S. Chandrasekhar An Introduction to the Study of Stellar Structure (Chicago: University of Chicago Press, 1939). (Переклад С. Чандрасекар. Введение в учение о строении звезд (Москва: ИЛ, 1950).
5. М.В. Ваврух, С.В. Смеречинський, *Астрономический журнал* **89**, №5, 407. (2012).
6. С.А. Каплан, *Ученые записки Львовского государственного университета им. Ивана Франко. Серия физико-математическая* **XV**, №4, 109 (1949).
7. K. Emden *Gaskugeln: Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie* (Leipzig-Berlin, 1907).
8. Я.Б. Зельдович, И.Д. Новиков *Релятивистская астрофизика* (М.: Наука, 1967).
9. М.В. Ваврух, Н.Л. Тышко, С.В. Смеречинський, *Астрономический журнал* **88**, №6, 549 (2011).
10. М.В. Ваврух, С.В. Смеречинський, *Астрономический журнал* **90**, №12, 993 (2013).
11. М. Ваврух, Н. Тишко, С. Смеречинський, *Вісник Львівського університету. Серія фізична* **48**, 199 (2013).
12. М.В. Ваврух, Н.Л. Тышко, С.В. Смеречинський, *Вісник Львівського університету. Серія фізична* **48**, 3 (2013).

Стаття надійшла до редакції 22.11.2014  
прийнята до друку 15.12.2014

## CRITICAL MASS AND STABILITY OF WHITE DWARFS

M. Vavruk, N. Tyshko, S. Smerechynskyj

*Ivan Franko National University of Lviv  
Kyrylo and Methodiy Str., 8, 79005 Lviv, Ukraine  
e-mail: mvavruk@gmail.com*

Different methods of calculation of white dwarf mass were considered using hydrostatic equilibrium equation as well as variational principle. We used for our computations two models – with ideal electron subsystem and one with Coulomb interaction. Also, in this work it was investigated the issue of stability for massive white dwarfs. For the first time in the frame of model with Coulomb interaction, we have obtained the critical values of stellar mass and relativistic parameter in the stellar centre, when the instability due to general relativity effects occurred.

**Key words:** degenerate dwarf, Coulomb interaction, instability, maximum mass, critical value of relativistic parameter in the stellar centre

## КРИТИЧЕСКАЯ МАССА И УСТОЙЧИВОСТЬ ВЫРОЖДЕННЫХ КАРЛИКОВ

М. Ваврух, Н. Тышко, С. Смеречинский

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко  
ул. Кирилла и Мефодия 8, 79005 Львов, Украина  
e-mail: mvavruk@gmail.com*

Рассмотрены методы расчета массы вырожденных карликов как при помощи уравнения механического равновесия, так и вариационного подхода. При конкретных расчетах использована модель с идеальной электронной подсистемой и модель с кулоновскими взаимодействиями. Исследована область устойчивости массивных вырожденных карликов. Впервые с учетом межчастичных взаимодействий определена критическая масса звезды и значение параметра релятивизма в ее центре, при котором нарушается устойчивость за счет эффектов общей теории относительности.

**Ключевые слова:** вырожденные карлики, межчастичные взаимодействия, эффекты общей теории относительности, устойчивость карликов, максимальная масса, критическое значение параметра релятивизма в центре звезды