

УДК 524.31.084, 524.384, 524.352.3
PACS 97.20Rp, 97.60Bw

МОДЕЛЬ ВИРОДЖЕНОГО КАРЛИКА ЗІ СПІН-ПОЛЯРИЗОВАНОЮ ЕЛЕКТРОННОЮ СИСТЕМОЮ

М. Ваврух, Н. Тишко, Д. Дзіковський

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
кафедра астрофізики, вул. Кирила і Мефодія, 8, 79005 Львів,
Україна
e-mail: mvavrukh@gmail.com*

Запропоновано трипараметричну модель масивного виродженого карлика, у якому електронна система знаходиться у стані з частковою спіновою поляризацією, на відміну від парамагнітного стану стандартної моделі Чандрасекара. Параметрами моделі є x_0 – параметр релятивізму у центрі зорі, $\mu_e = \langle \frac{Z}{A} \rangle$ – параметр усередненого хімічного складу та ζ – ступінь спінової поляризації електронної системи. Розв'язано рівняння механічної рівноваги і одержано вирази для макроскопічних характеристик (маса, радіус, енергія) як функцій параметрів моделі. Показано, що спінова поляризація призводить до збільшення радіуса, а особливо маси зорі у порівнянні з відповідними характеристиками стандартної моделі. Обговорюється питання про застосування розглянутої моделі для інтерпретації стійкості масивних карликів у бінарних системах.

Ключові слова: вироджений карлик, електронна система, спінова поляризація, параметр релятивізму, параметр хімічного складу, рівняння механічної рівноваги.

1 Вступ

В останні два десятиліття за допомогою космічних обсерваторій відкрито карлики з різноманітними характеристиками, у зв'язку з чим актуальною стала проблема побудови загальної теорії вироджених карликів, у тому числі гарячих карликів з великими світностями та холодних карликів з великими масами. Коректне врахування міжчастинкових взаємодій та ефектів загальної теорії відносності приводить до висновку, що максимальна маса карлика, при якій порушується його стійкість, на декілька відсотків менша від граничної маси, яка одержується у стандартній теорії Чандрасекара (див. статтю [1] у цьому номері журналу). В той же час спостережувані дані свідчать про наявність у подвійних системах карликів з масами, які дуже близькі до границі Чандрасекара, або дещо перевищують її. Пошук механізмів, які

можуть забезпечувати стійкість карликів з великими масами, є однією з актуальних задач в теорії цих об'єктів. У цій роботі нами запропоновано модель холодного виродженого карлика зі спин-поляризованою електронною системою, яка відповідає врахуванню його магнітного поля. Однорідне магнітне поле безпосередньо не впливає на механічну рівновагу зорі, але може спричинити перерозподіл електронів за енергіями внаслідок взаємодії спінів з полем. В результаті виникає дві підсистеми електронів, що мають протилежно направлені спіни, кожна з яких має свою сферу Фермі. При абсолютному нулі температури маємо такий розподіл електронів за хвильовими векторами:

$$n_{\mathbf{k},\sigma} = \theta(k_F^\sigma - k), \quad \sigma = \pm 1, \quad (1)$$

причому $k_F^+ > k_F$, $k_F^- < k_F$, де k_F – хвильове число Фермі у парамагнітній моделі з такою ж загальною концентрацією електронів.

Визначаючи парціальні концентрації електронів вказаних двох підсистем співвідношеннями

$$n_+ = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} n_{k,+}, \quad n_- = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} n_{k,-}, \quad (2)$$

введемо величину

$$\zeta = \frac{1}{n} (n_+ + n_-), \quad n = n_+ + n_-, \quad (3)$$

яка визначає ступінь спінової поляризації електронної системи. З рівнянь (3) знаходимо, що

$$n_+ = \frac{n}{2} (1 + \zeta), \quad n_- = \frac{n}{2} (1 - \zeta). \quad (4)$$

Зі співвідношень (2) знаходимо вирази для хвильових чисел Фермі для обох підсистем:

$$\begin{aligned} k_F^+ &= k_F \lambda_+, \quad k_F^- = k_F \lambda_-, \quad k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}, \\ \lambda_+ &= (1 + \zeta)^{1/3}, \quad \lambda_- = (1 - \zeta)^{1/3}. \end{aligned} \quad (5)$$

Описана тут модель розглядалась у багатьох роботах, присвячених питанням фізики твердого тіла як при $T = 0K$, так і при низьких температурах. При цьому електронна підсистема вважалась нерелятивістською, але термодинамічні характеристики обчислювались із врахуванням міжелектронних взаємодій (див. [2–5]).

2 Рівняння механічної рівноваги карлика

[Рівняння стану моделі (1) – (5) при $T = 0K$ одержується шляхом простого узагальнення рівняння стану для парамагнітної системи [6]. У випадку просторово однорідної двокomпонентної електрон-ядерної моделі при $T = 0K$ рівняння стану

має таке параметричне представлення:

$$P(x) = \sum_{\sigma} P_{\sigma}(x), \quad P_{\sigma}(x_{\sigma}) = \frac{\pi m_0^4 c^5}{3\hbar^3} \mathcal{F}_{\sigma}(x_{\sigma}), \quad \mathcal{F}_{\sigma}(x_{\sigma}) = 4 \int_0^{x_{\sigma}} \frac{dy y^4}{(1+y^2)^{1/2}}, \quad (6)$$

$$\rho(x) = m_u \mu_e \sum_{\sigma} n_{\sigma} = \frac{m_u \mu_e}{6\pi^2} \left(\frac{m_0 c}{\hbar} \right)^3 \sum_{\sigma} x_{\sigma}^3,$$

де $x_{\sigma} = \hbar k_F^{\sigma} / m_0 c$ – параметр релятивізму, m_u – атомна одиниця маси, $\mu_e = \langle \frac{Z}{A} \rangle$ – усереднений параметр хімічного складу (Z – заряд ядра, A – масове число), m_0 – маса електрона, c – швидкість світла; $P_{\sigma}(x)$ – парціальний електронний тиск, $\rho(x)$ – густина маси ядерної підсистеми. Відношення тиску у спін-поляризованій моделі до тиску у парамагнітній моделі дорівнює $C_1(\zeta) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \lambda_{\sigma}^4$ у границі $x \gg 1$ і $C_2(\zeta) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \lambda_{\sigma}^5$ у границі $x \ll 1$. Звідси випливає, що тиск у спін-поляризованій моделі більший від тиску у парамагнітній моделі при тому ж значенні x , а функції $C_1(\zeta)$, $C_2(\zeta)$ змінюються у таких межах:

$$1 \leq C_1(\zeta) \leq 2^{1/3},$$

$$1 \leq C_2(\zeta) \leq 2^{2/3}. \quad (7)$$

Щоб одержати рівняння стану для неоднорідної моделі, слід виконати заміну $x \rightarrow x(r)$, $P_{\sigma} \rightarrow P_{\sigma}(x(r))$, $\rho \rightarrow \rho(r)$, $x_{\sigma} \rightarrow x_{\sigma}(r)$. Згідно з формулами (5)

$$x_{\sigma}(r) = x(r) \lambda_{\sigma}, \quad (8)$$

де $x(r) = \hbar k_F(r) (m_0 c)^{-1}$ – значення параметра релятивізму у парамагнітному стані.

Розглянемо рівняння механічної рівноваги зорі

$$\frac{dP(r)}{dr} = -G \rho(r) \frac{M(r)}{r^2}, \quad \frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r), \quad (9)$$

де $P(r)$ – тиск на сфері радіуса r , $\rho(r)$ – густина на цій сфері, $M(r)$ – маса всередині сфери. Згідно зі співвідношення (6), (8) система (9) зводиться до нелінійного диференційного рівняння для $x(r)$,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left\{ r^2 \left[\frac{\lambda_+^5}{\sqrt{1+x^2(r)\lambda_+^2}} + \frac{\lambda_-^5}{\sqrt{1+x^2(r)\lambda_-^2}} \right] x(r) \frac{dx}{dr} \right\} = -G (m_u \mu_e)^2 \frac{64\pi^2 m_0^2 c^4}{3(\hbar c)^3} x^3(r), \quad (10)$$

у якому λ_+ , λ_- – задані параметри, причому $\lambda_+^3 + \lambda_-^3 = 2$.

3 Випадок повної поляризації

У частковому випадку повної поляризації, коли $\zeta = 1$ ($\lambda_- = 0$, $\lambda_+ = 2^{1/3}$), у безрозмірних змінних

$$\xi = \frac{r}{\lambda}, \quad y_+(\xi) = (\varepsilon_0^+)^{-1} \{ [1 + \lambda_+^2 x^2(r)]^{1/2} - 1 \} \quad (11)$$

рівняння (10) за виглядом збігається з рівнянням парамагнітної моделі

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left\{ \xi^2 \frac{dy_+}{d\xi} \right\} = - \left\{ y_+^2(\xi) + \frac{2}{\varepsilon_0^+} y_+(\xi) \right\}^{3/2}, \quad (12)$$

однак у цьому рівнянні замість x_0 фігурує параметр $x_0 \lambda_+$. При цьому масштаб λ визначається співвідношенням

$$\frac{16G\pi^2}{3(ch)^3} [m_u \mu_e m_0 c^2 \varepsilon_0^+ \lambda]^2 = 1, \quad (13)$$

де $\varepsilon_0^+ = [1 + x_0^2 \lambda_+^2]^{1/2} - 1$. Знайдений з рівняння (13) добуток

$$\lambda \varepsilon_0^+ = \frac{\sqrt{3}(hc)^{3/2}}{4\pi G^{1/2}} (m_u \mu_e m_0 c^2)^{-1} \quad (14)$$

відрізняються від аналогічного добутку у парамагнітній моделі множителем $2^{1/2}$, а параметр

$$x_0^+ \equiv x_0 \lambda_+ = 2^{1/3} \hbar (3\pi^2 n_0)^{1/3} (m_0 c)^{-1}. \quad (15)$$

Повна маса карлика визначається співвідношенням

$$M(x_0^+, \mu_e) = \frac{\sqrt{2}}{\mu_e^2} M_0 \mathcal{M}(x_0^+), \quad (16)$$

$$\mathcal{M}(x_0^+) = \int_0^{\xi_1(x_0^+)} d\xi \xi^2 \left(y_+^2(\xi) + \frac{2}{\varepsilon_0^+} y_+(\xi) \right)^{3/2}.$$

При цьому $\xi_1(x_0^+)$ – безрозмірний радіус карлика, який визначається з умови $y(\xi_1(x_0^+)) = 0$. З останньої формули випливає, що максимальна маса карлика, яка відповідає $x_0 \gg 1$, дорівнює

$$M_{max} = \sqrt{2} \frac{M_0}{\mu_e^2} 2,01824 \dots, \quad (17)$$

тобто перевищує масу Чандрасекара в $\sqrt{2}$ разів. Радіус карлика дорівнює

$$R(x_0^+, \mu_e) = \xi_1(x_0^+) \lambda = \frac{R_0 \xi_1(x_0^+) \sqrt{2}}{\mu_e \varepsilon_0^+}. \quad (18)$$

У формулах (15), (17) фігурують масштаби маси і довжини (M_0, R_0), визначені формулами

$$R_0 = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\hbar^3}{cG}\right)^{1/2} \frac{1}{m_0 m_H}, \quad (19)$$

$$M_0 = \frac{m_0 c^2 \lambda \varepsilon_0(x_0)}{G m_H} = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\hbar c}{G m_H^2}\right)^{3/2} m_H.$$

Як видно зі співвідношення (18), значення радіуса карлика в ультрарелятивістській області ($x_0 \gg 1$)

$$R(x_0^+, \mu_e) \Rightarrow R_0 \frac{6,89 \dots 2^{1/2}}{\mu_e x_0 \lambda_+} \quad (20)$$

перевищує аналогічну величину стандартної моделі при тій самій концентрації електронів у центрі зорі у $2^{1/2} \lambda_+^{-1} = 2^{1/6}$ разів. На рисунку 1 порівнюються між собою співвідношення “маса-радіус”, одержані у стандартній моделі (суцільна крива) та у спін-поляризованій при різних значеннях параметра ζ .

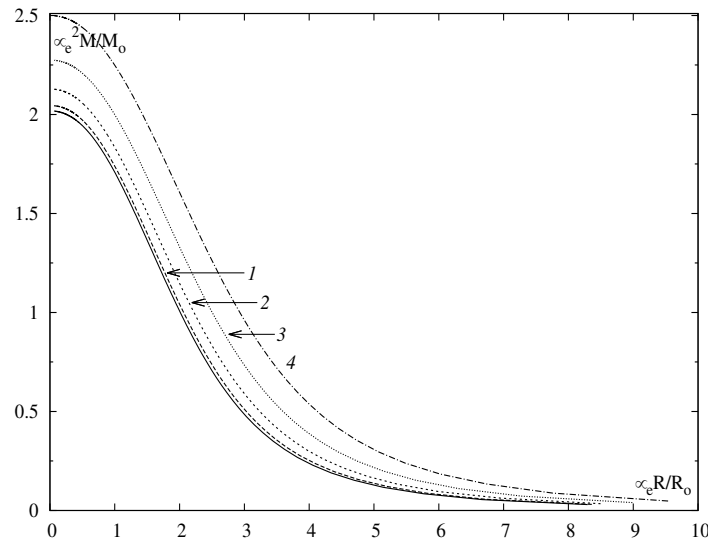


Рис. 1: Співвідношення “маса-радіус” при різних значеннях ζ ($\zeta = 0$ – суцільна крива, $\zeta = 0.2$ – крива 1, $\zeta = 0.4$ – крива 2, $\zeta = 0.6$ – крива 3, $\zeta = 0.8$ – крива 4)

4 Розв’язки рівняння рівноваги при довільній поляризації

У загальному випадку при довільному значенні параметра ζ рівняння (10) теж можна звести до рівняння типу (12) за допомогою підстановки

$$\lambda_+^3 \{(1 + x^2(r) \lambda_+^2)^{1/2} - 1\} + \lambda_-^3 \{(1 + x^2(r) \lambda_-^2)^{1/2} - 1\} = \varepsilon_0^\zeta y(\xi), \quad (21)$$

де

$$\varepsilon_0^\zeta = \lambda_+^3 \{(1 + x_0^2(r) \lambda_+^2)^{1/2} - 1\} + \lambda_-^3 \{(1 + x_0^2(r) \lambda_-^2)^{1/2} - 1\}. \quad (22)$$

Щоб записати праву сторону рівняння (10) через $y(\xi)$, визначимо $x(r)$ зі співвідношення (21). Звільняючись від радикалів, зведемо це співвідношення до біквadratного

рівняння

$$ax^4 - bx^2 + c = 0, \quad (23)$$

у якому

$$\begin{aligned} a &= (\lambda_+^8 + \lambda_-^8)^2, \\ b(y) &= 2\{(\lambda_+^8 + \lambda_-^8)[(\varepsilon_0^\zeta y)^2 + 4\varepsilon_0^\zeta y] + 4(\lambda_+ \lambda_-)^3(\lambda_+^5 + \lambda_-^5)\}, \\ c(y) &= [(\varepsilon_0^\zeta y)^2 + 4\varepsilon_0^\zeta y]\{[(\varepsilon_0^\zeta y)^2 + 4\varepsilon_0^\zeta y] - 2(\lambda_+^6 + \lambda_-^6)\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Рівняння (23) має 4 дійсні корені – 2 додатні і 2 від’ємні. Фізичний зміст мають лише додатні корені. З них виберемо той, який у границі $\zeta \rightarrow 0$ (коли $\lambda_+, \lambda_- \Rightarrow 1$) є додатним коренем квадратного рівняння $c(y) - b(y)x^2 = 0$, оскільки у цій границі $a \Rightarrow 0$. Таким чином знаходимо, що

$$x(r) = 2^{-1/2}(\lambda_+^8 + \lambda_-^8)^{-1}[b(y) - \varphi(y)]^{1/2}, \quad (25)$$

де

$$\varphi(y) = \{b^2(y) - 4ac(y)\}^{1/2} = 4(2 + \varepsilon_0^\zeta y)(\lambda_+ \lambda_-)^3 \{(\lambda_+ \lambda_-)^2 [(\varepsilon_0^\zeta y)^2 + 4\varepsilon_0^\zeta y] + (\lambda_+^5 + \lambda_-^5)^2\}^{1/2}. \quad (26)$$

Зауважимо, що $c(0) = 0$, тому на границі зорі при $y(\xi) = 0$, $b(0) = \varphi(0) = 8(\lambda_+ \lambda_-)^3(\lambda_+^5 + \lambda_-^5)$, що забезпечує виконання рівності $x(R) = 0$ при довільному значенні ζ . Також неважко переконатися, що у границі $\zeta \rightarrow 0$

$$x(r) = \varepsilon_0 \left\{ y^2(\xi) + \frac{2}{\varepsilon_0} y(\xi) \right\}^{1/2}, \quad \varepsilon_0 = (1 + x_0^2)^{1/2} - 1. \quad (27)$$

У безрозмірній формі рівняння (10) набуває такого вигляду:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{dy}{d\xi} \right) = -\{\sqrt{2}(\lambda_+^8 + \lambda_-^8)^{-1}(\varepsilon_0^\zeta)^{-1}[b(y) - \varphi(y)]^{1/2}\}^3. \quad (28)$$

Цьому рівнянню відповідають граничні умови $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, а також умова $y(\xi) \geq 0$. При цьому масштаб λ визначається рівністю

$$\frac{32\pi^2 G}{3(hc)^3} \left\{ m_u \mu_e m_0 c^2 \lambda \frac{\varepsilon_0^\zeta}{2} \right\}^2 = 1, \quad (29)$$

яка у границі $\zeta \rightarrow 0$ збігається з аналогічною рівністю у парамагнітній моделі.

Рівняння (28) – двопараметричне, у ньому фігурують параметри x_0 , і $zeta$. У випадку досить великих значень x_0

$$x(r) \approx \varepsilon_0^\zeta (\lambda_+^4 + \lambda_-^4)^{-1} \{y^2(\xi) + 4(\varepsilon_0^\zeta)^{-1} y(\xi)\}^{1/2}, \quad (30)$$

через що рівняння (28) спрощується

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{dy}{d\xi} \right) \approx -\left\{ y^2(\xi) + \frac{4}{\varepsilon_0^\zeta} y(\xi) \right\}^{3/2}, \quad (31)$$

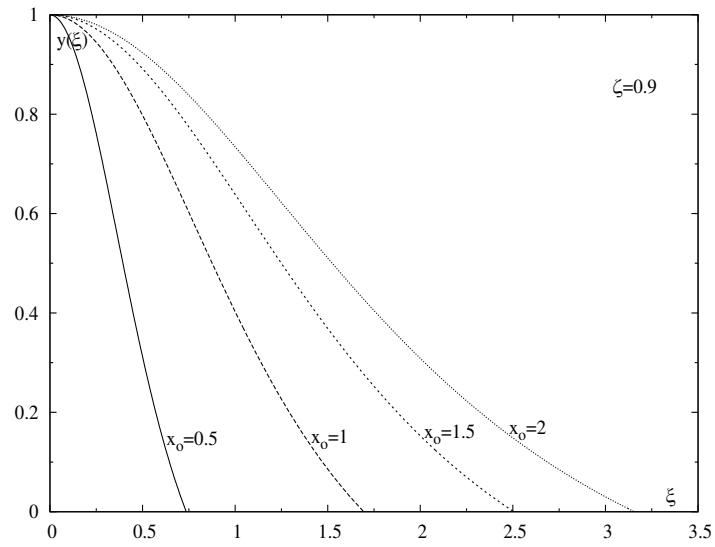


Рис. 2: Розв'язки рівняння (28) при фіксованому значенні $\zeta = 0.9$

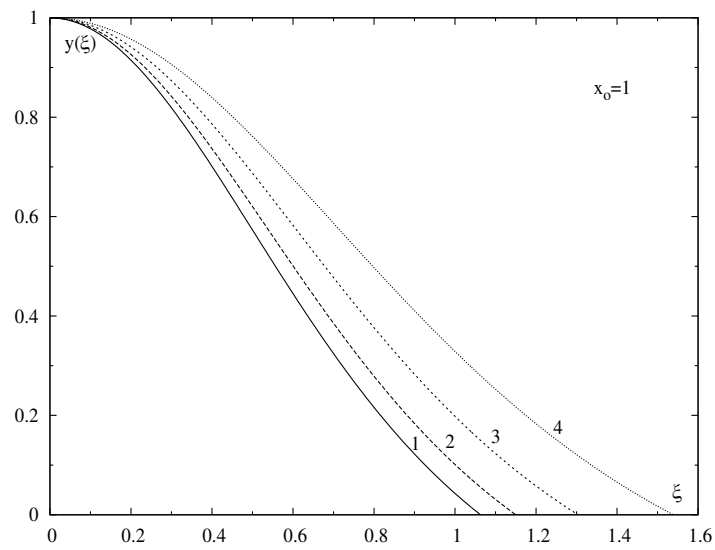


Рис. 3: Розв'язки рівняння (28) при фіксованому значенні $x_0 = 1$ ($\zeta = 0$ – крива 1, $\zeta = 0.2$ – крива 2, $\zeta = 0.4$ – крива 3, $\zeta = 0.6$ – крива 4)

а параметр λ знаходиться з рівності

$$\frac{64\pi^2 G}{3(hc)^3} \{m_0 c^2 \lambda \varepsilon_0^\zeta m_u \mu_e\}^2 (\lambda_+^4 + \lambda_-^4)^{-3} = 1. \quad (32)$$

Залежність розв'язків рівняння (28) від параметрів x_0 , ζ ілюструють рисунки 2 і 3, а рисунок 4 – залежність безрозмірного радіуса зорі $\xi_1(x_0, \zeta)$ від цих параметрів.

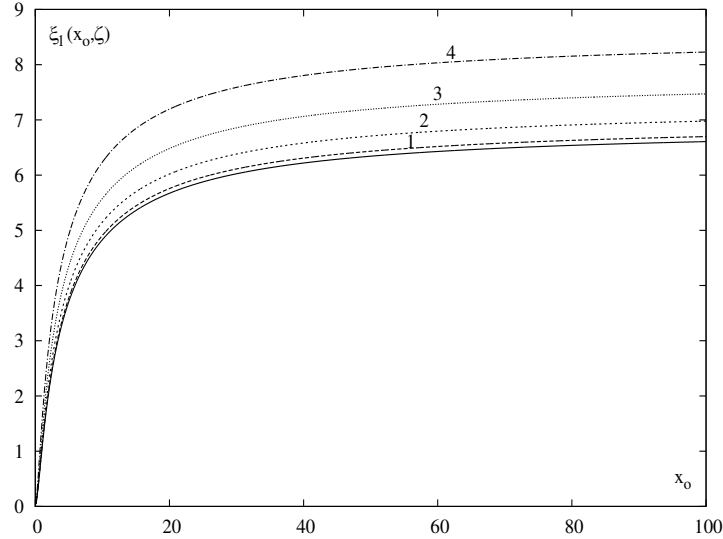


Рис. 4: Залежність безрозмірного радіуса $\xi_1(x_0, \zeta)$ від параметра x_0 при різних значеннях ζ ($\zeta = 0$ – суцільна крива, $\zeta = 0.2$ – крива 1, $\zeta = 0.4$ – крива 2, $\zeta = 0.6$ – крива 3, $\zeta = 0.8$ – крива 4)

5 Макроскопічні характеристики карликів

Розв'язки рівняння (28) визначають залежність макроскопічних характеристик зорі від параметрів моделі x_0, μ_e, ζ . Зокрема повна маса зорі дорівнює

$$M(x_0, \mu_e | \zeta) = \frac{M_0}{\mu_e^2} \mathcal{M}(x_0 | \zeta),$$

$$\mathcal{M}(x_0 | \zeta) = 2\sqrt{2} \{ \varepsilon_0^\zeta (\lambda_+^8 - \lambda_-^8) \}^{-3} \int_0^{\xi_1(x_0 | \zeta)} d\xi \xi^2 (b(y(\xi)) - \varphi(y(\xi)))^{3/2} = \xi_1^2(x_0 | \zeta) \left. \frac{dy}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_1(x_0 | \zeta)}. \quad (33)$$

Радіус зорі визначається співвідношенням

$$R(x_0, \mu_e | \zeta) = \lambda \xi_1(x_0 | \zeta) = 2R_0 \frac{\xi_1(x_0 | \zeta)}{\mu_e \varepsilon_0^\zeta}. \quad (34)$$

Залежність $\mathcal{M}(x_0 | \zeta)$, $R(x_0, \mu_e | \zeta)$ від параметра релятивізму x_0 ілюструють рисунки 5, 6.

Середнє значення кінетичної енергії електронів E_{kin} , потенціальної енергії гравітаційної взаємодії ядерної підсистеми W та повної енергії (із врахуванням енергії

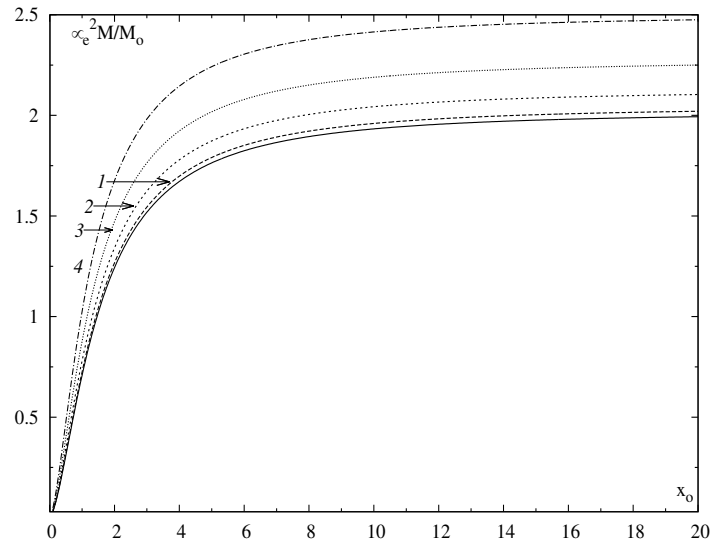


Рис. 5: Залежність маси від параметра x_0 при різних значеннях ζ ($\zeta = 0$ – суцільна крива, $\zeta = 0.2$ – крива 1, $\zeta = 0.4$ – крива 2, $\zeta = 0.6$ – крива 3, $\zeta = 0.8$ – крива 4)

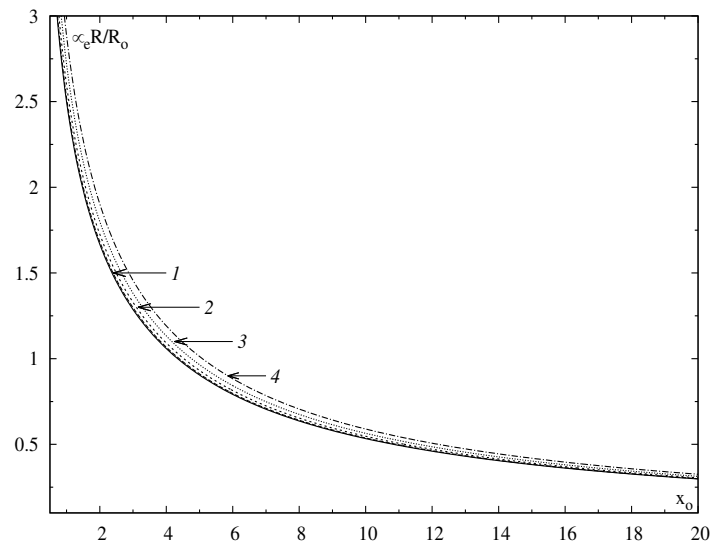


Рис. 6: Залежність радіуса від параметра x_0 при різних значеннях ζ ($\zeta = 0$ – суцільна крива, $\zeta = 0.2$ – крива 1, $\zeta = 0.4$ – крива 2, $\zeta = 0.6$ – крива 3, $\zeta = 0.8$ – крива 4)

спокою електронів) \tilde{E} визначаються співвідношеннями

$$E_{kin}(x_0, \mu_e|\zeta) = \frac{E_0}{\mu_e^3} \left(\frac{2}{\varepsilon_0^\zeta} \right)^3 \int_0^{\xi_1} d\xi \xi^2 \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \left\{ x_{\sigma}^3(\xi) [(1 + x_{\sigma}^2(\xi))^{1/2} - 1] - \frac{1}{4} \mathcal{F}_{\sigma}(x) \right\},$$

$$W(x_0, \mu_e|\zeta) = \frac{E_0}{\mu_e^3} \left(\frac{2}{\varepsilon_0^\zeta} \right)^2 \int_0^{\xi_1} d\xi \xi^3 x^3(\xi) \frac{dy}{d\xi} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{E_0}{\mu_e^3} \left(\frac{2}{\varepsilon_0^\zeta} \right)^3 \int_0^{\xi_1} d\xi \xi^2 \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \mathcal{F}_{\sigma}(x_{\sigma}(\xi)),$$
(35)

$$\begin{aligned}
 E(x_0, \mu_e|\zeta) &= E_{kin}(x_0, \mu_e|\zeta) + W(x_0, \mu_e|\zeta) = \\
 &= \frac{E_0}{2\mu_e^3} \left(\frac{2}{\varepsilon_0^\zeta} \right)^3 \int_0^{\xi_1} d\xi \xi^2 \sum_{\sigma} \left\{ x_{\sigma}^3(\xi) [(1 + x_{\sigma}^2(\xi))^{1/2}] - \mathcal{F}_{\sigma}(x_{\sigma}(\xi)) \right\}, \\
 \tilde{E}(x_0, \mu_e|\zeta) &= E_{kin}(x_0, \mu_e|\zeta) + W(x_0, \mu_e|\zeta) + m_0 c^2 N(x_0, \mu_e|\zeta) = \\
 &= \frac{3}{4} \cdot \frac{E_0}{\mu_e^3} \left(\frac{2}{\varepsilon_0^\zeta} \right)^3 \sum_{\sigma} \int_0^{\xi_1} d\xi \xi^2 \left\{ x_{\sigma}(\xi) [(1 + x_{\sigma}^2(\xi))^{1/2}] - \ln[x_{\sigma}(\xi) + (1 + x_{\sigma}^2(\xi))^{1/2}] \right\}.
 \end{aligned}$$

На рисунках 7, 8 зображено залежність E і \tilde{E} від параметрів моделі.

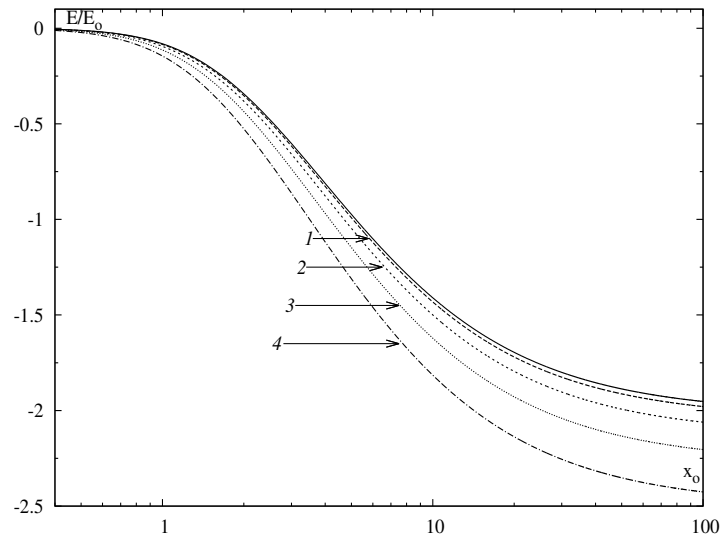


Рис. 7: Залежність повної енергії E від параметра x_0 при різних значеннях ζ ($\zeta = 0$ – суцільна крива, $\zeta = 0.2$ – крива 1, $\zeta = 0.4$ – крива 2, $\zeta = 0.6$ – крива 3, $\zeta = 0.8$ – крива 4)

При цьому

$$\begin{aligned}
 x_{\sigma}(\xi) &= \lambda_{\sigma} x(\xi), \quad \sigma = (+, -), \\
 x(\xi) &= 2^{-1/2} (\lambda_+^8 + \lambda_-^8)^{-1} \{ b(y(\xi)) - \varphi(y(\xi)) \}^{1/2},
 \end{aligned} \tag{36}$$

де $y(\xi)$ – розв’язок рівняння (28).

Зауважимо, що модель зі спин-поляризованою електронною підсистемою, але без врахування взаємодії між частинками, формально можна інтерпретувати як модель нейтральних ферміонів, що знаходяться у середовищі зі спонтанним намагніченням. Ймовірно також, що фізичний зміст має модель з малим значенням параметра по-

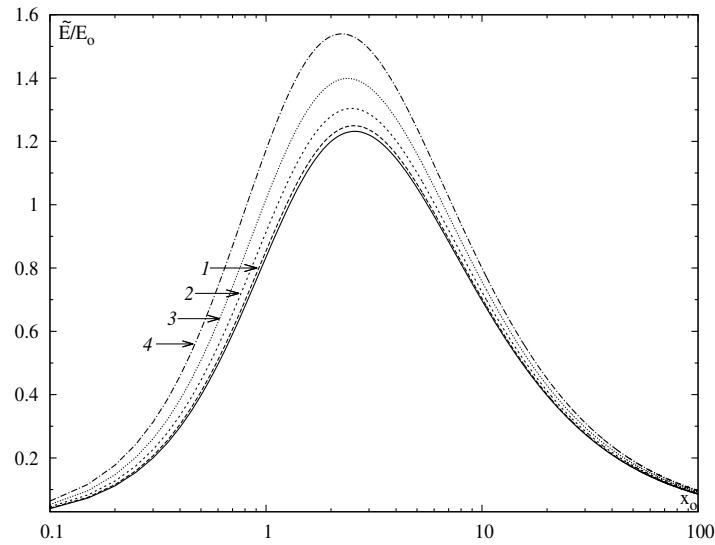


Рис. 8: Залежність повної енергії \tilde{E} від параметра x_0 при різних значеннях ζ ($\zeta = 0$ – суцільна крива, $\zeta = 0.2$ – крива 1, $\zeta = 0.4$ – крива 2, $\zeta = 0.6$ – крива 3, $\zeta = 0.8$ – крива 4)

ляризації ($\zeta \ll 1$). У цьому випадку рівняння (10) спрощується, бо з точністю до ζ^2

$$\lambda_+^5(1+x^2(r)\lambda_+^2)^{-1/2} + \lambda_-^5(1+x^2(r)\lambda_-^2)^{-1/2} = 2(1+x^2(r))^{-1/2} \cdot \{1 + \zeta^2 \cdot f(x(r)) + \dots\},$$

$$f(x) = \frac{5}{9} - \frac{1}{2}x^2(1+x^2)^{-1} + \frac{1}{6}x^4(1+x^2)^{-2}. \quad (37)$$

Переходячи до безрозмірних змінних

$$r = \lambda\xi, \quad \mu(r) = m_0c^2\{(1+x_0^2)^{1/2} - 1\}y(\xi), \quad (38)$$

перенесемо доданки функції $f(x)$, що пропорційні до x^2 та x^4 , у праву сторону рівняння (10), зводячи його до такого безрозмірного вигляду:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left\{ \xi^2 \frac{dy}{d\xi} \right\} = - \left(y^2 + \frac{2}{\varepsilon_0} y \right)^{3/2} + \frac{1}{6\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left\{ \xi^2 \frac{(y^2 + \frac{2}{\varepsilon_0} y)(2y^2 + \frac{4y}{\varepsilon_0} + \frac{1}{\varepsilon_0^2})}{(y + \frac{1}{\varepsilon_0})^4} \frac{dy}{d\xi} \right\}. \quad (39)$$

При цьому параметр λ визначається рівністю

$$\frac{32\pi^2 G(m_u \mu_e m_0 c^2 \lambda \varepsilon_0)^2}{3(hc)^3} = 1 + \frac{5}{9}\zeta^2. \quad (40)$$

При $\zeta = 0$ розв'язок рівняння (39) збігається з розв'язком рівняння стандартної моделі

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left\{ \xi^2 \frac{dy}{d\xi} \right\} = - \left\{ y^2 + \frac{2}{\varepsilon_0} y \right\}^{3/2}. \quad (41)$$

Тому при малих значеннях ζ розв'язок рівняння (39) можна знайти методом послідовних наближень. За допомогою підстановки

$$y(\xi) = y_0(\xi) + \zeta^2 y_1(\xi) \quad (42)$$

одержуємо лінійне неоднорідне рівняння для функції $y_1(\xi)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left\{ \xi^2 \frac{dy_1}{d\xi} \right\} = & -3 \left(y_0 + \frac{1}{\varepsilon_0} \right) \left(y_0^2 + \frac{2}{\varepsilon_0} y_0 \right)^{1/2} y_1(\xi) + \\ & + \frac{1}{6\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left\{ \xi^2 \frac{(y_0^2 + \frac{2}{\varepsilon_0} y_0)(2y_0^2 + \frac{4y_0}{\varepsilon_0} + \frac{1}{\varepsilon_0^2})}{(y_0 + \frac{1}{\varepsilon_0})^4} \frac{dy_0}{d\xi} \right\}, \end{aligned} \quad (43)$$

де $y_0(\xi)$ – розв'язок рівняння (41). Залежність розв'язку рівняння (43), одержаного чисельним інтегруванням, від ξ зображено на рисунку 9. Приймаючи до уваги рівняння (40), знаходимо залежність маси і радіуса карлика від параметра ζ ,

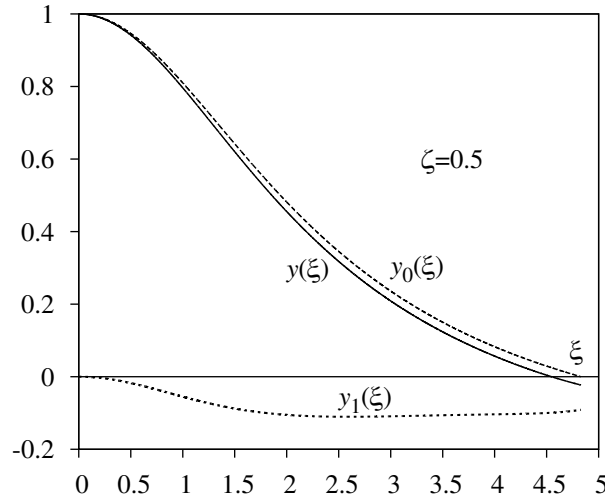


Рис. 9: Розв'язки $y_1(\xi)$, $y_0(\xi)$, $y(\xi)$ визначені формулами (43), (41), (42) при заданому значенні параметра $\zeta = 0.5$

$$\begin{aligned} M(x_0, \mu_e, \zeta) & \cong \frac{M_0}{\mu_e^2} \left(1 + \frac{5}{6} \zeta^2 \right) \mathcal{M}(x_0), \\ R(x_0, \mu_e, \zeta) & \cong \frac{R_0}{\mu_e \varepsilon_0} \left(1 + \frac{5}{18} \zeta^2 \right) \xi_1(x_0), \end{aligned} \quad (44)$$

де $\mathcal{M}(x_0)$, $\xi_1(x_0)$ є характеристиками стандартної моделі.

6 Висновки і обговорення

Як впливає з розрахунків, ступінь спінової поляризації електронної системи карлика суттєво впливає на його характеристики, а саме призводить до збільшення

маси і радіуса. При довільному значенні параметра ζ максимальна маса карлика перевищує значення цієї величини у стандартній (парамагнітній) моделі. У рамках спіно-поляризованої моделі можна пояснити існування карликів у бінарних системах, де маси карликів досягають величини $1,5M_{\odot}$ і знаходяться на границі стійкості (чи за її межами) з точки зору стандартної моделі [7]. Вище нами розглянута дещо ідеалізована модель, у якій параметри μ_e і ζ є сталими величинами, незалежними від координат. Із загальних фізичних міркувань зрозуміло, що ступінь поляризації електронної підсистеми залежить від температури і величини напруженості магнітного поля. Очевидно, що глобальне магнітне поле карлика має дипольний характер, а тому воно зосереджене у зовнішніх областях зорі, де температура менша, ніж в області ядра. У зв'язку з цим ступінь поляризації більший у зовнішніх областях карлика. В умовах сильної акреції на масивний магнітний карлик у його поверхневих шарах може розпочатись термоядерна реакція, що приведе до їхнього нагрівання і зменшення ступеня спінової поляризації. Можуть виникнути умови, за яких маса зорі перевищить допустиму критичну масу (що є функцією ζ), в результаті чого наступить колапс і вибух наднової. Звідси випливає також необхідність точнішого опису карлика у рамках моделі з параметром ζ , який є функцією відстані від центра зорі, а також врахування інших чинників – міжчастинкових взаємодій та ефектів загальної теорії відносності.

Список використаної літератури

1. М.В. Ваврух, Н.Л. Тишко, С.В. Смеречинський, Вісник Львівського ун-ту. Серія фізична. **49**, 83 (2014).
2. S. Hong, G.D. Mahan, Phys. Rev. B. **51**, №24, 17417 (1995).
3. S. Tanaka, S. Ichimaru, Phys. Rev. B. **39**, №2, 1036 (1989).
4. G. Ortiz, P. Ballone, Phys. Rev. B. **50**, №3, 1391 (1994).
5. G. Ortiz, P. Ballone, Phys. Rev. B. **56**, №15, 9970 (1997).
6. М.В. Ваврух, Н.Л. Тишко, С.В. Смеречинський, Астрономический журнал **88**, №6, 549 (2011).
7. М.В. Ваврух, С.В. Смеречинський, Шабат Б., Вісник Львівського ун-ту. Серія фізична. **47**, 204 (2012).

Стаття надійшла до редакції 10.10.2014

прийнята до друку 11.11.2014

MODEL OF DEGENERATE DWARF WITH SPIN-POLARIZED ELECTRON SYSTEM

M. Vavruk, N. Tyshko, D. Dzikovskyi

*Ivan Franko National University of Lviv,
astrophysic department,
Kyrylo and Methodiy Str., 8, 79005 Lviv, Ukraine
e-mail: mvavruk@gmail.com*

In this work it was proposed the three-parametric model of a massive degenerate dwarf. Unlike paramagnetic state of electrons system in the standart (Chandrasekhar) model electrons are considered in a partially spin-polarized state. The parameters of the model are x_0 – relativistic parameter at stellar centre, $\mu_e = \langle \frac{Z}{A} \rangle$ – the average chemical composition parameter and ζ – the degree of spin polarization of the electron system. The macroscopic characteristics (e.g. mass, radius, energy) as functions of the model parameters were obtained from solution of the mechanical equilibrium equation. It was shown that accounting of a spin polarization of electrons leads to an increasing of stellar radius and especially mass compared to the corresponding characteristics of the standard model. The application of the proposed model to interpreting the stability of a massive dwarfs in binary systems was discussed.

Key words: degenerate dwarf, electron system, spin polarization, relativism parameter, the chemical composition parameter, mechanical equilibrium equation.

МОДЕЛЬ ВЫРОЖДЕННОГО КАРЛИКА СО СПИН-ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ СИСТЕМОЙ

М. Ваврух, Н. Тышко, Д. Дзиковский

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко
кафедра астрофизики,
ул. Кирилла и Мефодия 8, 79005 Львов, Украина
e-mail: mvavrukh@gmail.com*

Предложена трехпараметрическая модель массивного вырожденного карлика, в котором электронная система находится в состоянии с частичной спиновой поляризацией, в отличие от парамагнитного состояния стандартной модели Чандрасекара. В модели фигурируют параметры x_0 – параметр релятивизма в центре звезды, $\mu_e = \langle \frac{Z}{A} \rangle$ – параметр химического состава и ζ – степень спиновой поляризации. Численным методом найдены решения уравнения механического равновесия и получены выражения для макроскопических характеристик (масса, радиус, энергия) как функций параметров модели. Показано, что спиновая поляризация приводит к увеличению радиуса, а особенно массы звезды по сравнению с соответствующими характеристиками стандартной модели. Обсуждается вопрос о применении рассмотренной модели к объяснению устойчивости массивных карликов в бинарных системах.

Ключевые слова: вырожденный карлик, электронная система, спиновая поляризация, параметр релятивизма, параметр химического состава, уравнения механического равновесия.