

УДК 523.9-47, 524.3-6  
PACS 95.30.-k, 95.30.Cq, 96.60.-j, 97.10.Ex

# РОЗРАХУНОК ЙОНІЗАЦІЙНОЇ РІВНОВАГИ У ЗОРЯНИХ ФОТОСФЕРАХ

О. Стельмах

*Львівський національний університет імені Івана Франка  
вул. Кирила і Мефодія, 8, 79005 Львів, Україна*

Досліджено залежність концентрації електронів, протонів, атомів водню та йонів  $H^-$  від температури та загальної густини у моделі частково йонізованої водневої плазми зоряних фотосфер. Використано самоузгоджений метод розрахунку, що ґрунтується на врахуванні дебаївського екранування кулонівських взаємодій, яке обмежує число енергетичних рівнів електрона в атомі водню. Внаслідок цього статистична сума атома водню є скінченною функцією температури і загальної густини. Наведено результати розрахунку відносних концентрацій електронів, протонів, атомів водню та йонів  $H^-$  в області температур  $0,01 \leq k_B T / R y \leq 0,30$ . Виконано порівняння розрахованої самоузгодженим чином відносної концентрації електронів з результатами розрахунків на основі апроксимацій Планка-Бріллюена-Ларкіна та Ріве-Ромпе для статсуми атома водню.

**Ключові слова:** зоряні фотосфери, йонізаційна рівновага, екранування взаємодій, дебаївська воднева плазма, рівноважні концентрації частинок.

## 1 Вступ

Опис фізичних умов у зоряних фотосферах, які є частково йонізованою плазмою, вимагає розрахунку концентрацій частинок різних сортів – атомів, електронів, протонів, позитивних та негативних йонів. Результати таких розрахунків мають як самостійне значення, так і численні застосування, зокрема в теорії коефіцієнта неперервного поглинання, при побудові моделей зоряних фотосфер, при обчисленні поперечних перерізів процесів взаємодії фотонів з мікрочастинками і т.д. Найпростіші оцінки концентрації частинок у частково йонізованій плазмі ґрунтуються на використанні співвідношень Саха, які є спрощеним варіантом закону діючих мас [1,2]. При цьому не береться до уваги середовище, наявність „вільних“ зарядів у якому призводить до кореляційних ефектів, які впливають на квантові стани атомів, йонів, молекул.

Як відомо, особливістю зоряних фотосфер є мала густина речовини і відносно високі температури. Тому речовина фотосфер перебуває у стані слабкої неідеальності, через що її можна наближено розглядати як суміш ідеальних газів атомів,

йонів, електронів та молекул. Однак розбіжність статистичної суми ізольованого атома водню чи воднеподібних йонів створює суттєві труднощі для застосування закону діючих мас. Процедури регуляризації статсуми атома водню, запропоновані у роботах Планка [3], Бриллюена [4], Ларкіна [5], Ріве-Ромпе [6], Еккера і Вайзеля [7] та ін., використовують різні способи „обрізання“ розбіжного ряду, що не позбавлені фізичного змісту, але не мають строгого обґрунтування.

Наявність електронів, протонів, йонів  $H^-$ ,  $He^+$  та інших „вільних“ зарядів спричиняє екранування взаємодій, що у слабо неідеальній невиродженій системі зводиться до заміни кулонівського потенціалу на екранований потенціал Дебая  $\tilde{V}(r)$ . У випадку взаємодії електрона з протоном

$$\tilde{V}(r) = -\frac{e^2}{r} \exp\{-\alpha r\} = -\frac{2 Ry}{r_*} \exp\{-\xi r_*\}, \quad (1)$$

$$\alpha = \left( 4\pi e^2 \sum_{s=1}^{s_0} z_s^2 n_s [k_B T]^{-1} \right)^{1/2},$$

де  $\xi = \alpha a_0$  – безрозмірний параметр екранування,  $r_* = r a_0^{-1}$ ,  $a_0$  – радіус Бора,  $n_s$  – концентрація зарядів сорту  $s$ ,  $z_s$  – їхня валентність,  $T$  – температура. Кількість зв'язаних станів електрона у полі з потенціалом (1) є скінченною, завдяки чому знімається проблема розбіжності статистичної суми атома водню. Ця ідея давно відома, але її реалізація вимагає інформації про залежність енергетичного спектру електрона в полі (1) від параметра  $\xi$ . Такі розрахунки в найбільш повному обсязі виконано чисельним методом у роботі [8], а також наближеними аналітичними методами, зокрема у роботах [9, 10].

Однак при розв'язуванні рівняння Шредингера  $\xi$  є незалежним числовим параметром, а незалежними параметрами в задачі про рівновагу виступають термодинамічні параметри – температура і густина (чи концентрація баріонів). У зв'язку з цим виникає допоміжна задача про самоузгоджений розрахунок залежності параметра екранування  $\xi$  від термодинамічних параметрів, що є основною метою даної роботи.

При послідовному врахування ефекту екранування в задачі розрахунку хімічних потенціалів окремих сортів частинок слід використати вільну енергію у дебайвському наближенні

$$F = F_{\text{ід}} - k_B T V \frac{\alpha^3}{12\pi} + \dots, \quad (2)$$

де  $F_{\text{ід}}$  – вільна енергія системи невзаємодіючих частинок, чого достатньо для систем з дуже малою густиною, якими є зоряні фотосфери.

## 2 Загальні співвідношення для моделі водневої плазми

Найпоширенішими хімічними елементами у фотосферах зір є водень і гелій. Водень існує у вигляді нейтральних атомів та від'ємних йонів, гелій – у вигляді нейтральних атомів та позитивних йонів. У кожного з цих хімічних елементів є дві стадії йонізації, тому опис йонізаційної рівноваги є цілком ідентичним.

Для викладу нашого підходу розглянемо модель чисто водневої однорідної плазми, яка перебуває в об'ємі  $V$  при температурі  $T$  і має густину  $\rho$ . Згідно з законом діючих мас [1, 2] атоми водню, електрони, йони  $H^-$  та протони будемо розглядати як окремі сорти частинок, що не взаємодіють між собою. Двом стадіям процесу йонізації-рекомбінації відповідають такі співвідношення між хімічними потенціалами сортів частинок:

$$\mu_{H^-} = \mu_H + \mu_e, \quad \mu_H = \mu_p + \mu_e. \quad (3)$$

Згідно з формулою (2) звідси отримуємо співвідношення для концентрацій

$$\frac{n_H n_e}{n_{H^-}} = \frac{Z_H Z_e}{V Z_{H^-}}, \quad \frac{n_p n_e}{n_H} = \frac{Z_p Z_e}{V Z_H} e^{\alpha e^2 / k_B T}, \quad (4)$$

де  $n_{H^-}$ ,  $n_H$ ,  $n_e$ ,  $n_p$  – концентрації частинок, а  $Z_{H^-}$ ,  $Z_H$ ,  $Z_e$ ,  $Z_p$  – відповідні їм статистичні суми. Виділимо з  $Z_{H^-}$  та  $Z_H$  статистичні суми центрів мас,

$$\begin{aligned} Z_H &= Z_{Ц.м.(H)} \tilde{Z}_H, \\ Z_{H^-} &= Z_{Ц.м.(H^-)} \tilde{Z}_{H^-}, \end{aligned} \quad (5)$$

та врахуємо, що  $Z_{Ц.м.(H^-)} \approx Z_{Ц.м.(H)} \approx Z_p$ , де  $Z_p$  – статистична сума протона. У формулах (5)  $\tilde{Z}_H$  і  $\tilde{Z}_{H^-}$  статистичні суми відносного руху електронів в атомі чи йоні

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{H^-} &= \exp\left(-\frac{E_{H^-}(\xi)}{k_B T}\right), \\ \tilde{Z}_H &= 2 \sum_{n \geq 1} \sum_{l \geq 0} (2l + 1) \exp\left(-\frac{E_{n,l}(\xi)}{k_B T}\right), \end{aligned} \quad (6)$$

де  $E_{n,l}(\xi)$  – енергетичні рівні електрона в полі екранованого нерухомого протона, а  $E_{H^-}(\xi)$  – така ж енергія двоелектронної системи у полі протона (існує лише один зв'язаний стан). Статсума вільного електрона  $Z_e = 2V(mk_B T)^{3/2}(2\pi\hbar^2)^{-3/2}$ .

Для зручності перейдемо до атомних одиниць, вводячи безрозмірні температуру та енергію (у рідбергах), а також загальну концентрацію баріонів

$$t = k_B T \left\{ \frac{e^2}{2a_0} \right\}^{-1}, \quad \varepsilon_{n,l}(\xi) = E_{n,l}(\xi) \left\{ \frac{e^2}{2a_0} \right\}^{-1}, \quad n^* = \frac{\rho}{m_H} a_0^3, \quad (7)$$

де  $m_H$  – маса атома водню. У цих змінних

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_H &= 2U_H(\xi, t) \exp\left(-\frac{\varepsilon_{1,0}(\xi)}{t}\right), \\ U_H(\xi, t) &= 1 + \sum_{n \geq 2} \sum_{l \geq 0} (2l + 1) \exp\left\{ \frac{1}{t} [\varepsilon_{1,0}(\xi) - \varepsilon_{n,l}(\xi)] \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

При цьому верхня границя підсумовування за квантовими числами  $n, l$  визначається умовою існування зв'язаних станів при заданому значенні параметра екранування

$\xi$  [9, 10]. У змінних (7) співвідношення (4) набувають такого вигляду:

$$\begin{aligned} n_H^* &= 4 \frac{n_{H^-}^*}{n_e^*} \left\{ \frac{t}{4\pi} \right\}^{3/2} U_H(\xi, t) \exp \left[ -\frac{1}{t} I_1(\xi) \right], \\ n_p^* &= 4 \frac{n_H^*}{n_e^*} \left\{ \frac{t}{4\pi} \right\}^{3/2} \frac{1}{U_H(\xi, t)} \exp \left[ -\frac{1}{t} I_2(\xi) \right], \end{aligned} \quad (9)$$

де  $I_1(\xi) = \varepsilon_{1,0}(\xi) - \varepsilon_{H^-}(\xi) - \text{енергія йонізації йона } H^- \text{ у рідбергах}$ ,  $I_2(\xi) = -\varepsilon_{1,0}(\xi) - 2\xi$ ;  $n_H^* = n_H a_0^3$ ,  $n_{H^-}^* = n_{H^-} a_0^3$ ,  $n_e^* = n_e a_0^3$ ,  $n_p^* = n_p a_0^3$  – безрозмірні концентрації частинок різних сортів. У роботі [9] встановлено залежність  $\varepsilon_{1,0}(\xi)$  від параметра екранування:

$$\varepsilon_{1,0}(\xi) = -\left\{ 1 + \sum_{i=1}^6 (-1)^i \alpha_i (\xi/\xi_{0,0})^i \right\}^2, \quad (10)$$

де  $\xi_{0,0} = 1.19019665$ ,  $\alpha_1 = 1.19034$ ,  $\alpha_2 = 0.32006$ ,  $\alpha_3 = 0.241148$ ,  $\alpha_4 = 0.184197$ ,  $\alpha_5 = 0.0956536$ ,  $\alpha_6 = 0.0226682$ .

При  $U_H(\xi, t) = 1$  і  $\xi = 0$  формули (9) відповідають добре відомим співвідношенням Саха. Система рівнянь (1) разом з умовою електронейтральності

$$n_e^* + n_{H^-}^* = n_p^* \quad (11)$$

та умовою нормування числа баріонів

$$n_H^* + n_{H^-}^* + n_p^* = n^* \quad (12)$$

дозволяє розрахувати концентрації 4 сортів частинок при заданих термодинамічних змінних  $n^*$ ,  $t$  і параметра  $\xi$ .

Введімо відносні концентрації частинок за співвідношеннями

$$y_{H^-} = \frac{n_{H^-}^*}{n^*}, \quad y_H = \frac{n_H^*}{n^*}, \quad y_p = \frac{n_p^*}{n^*}, \quad y_e = \frac{n_e^*}{n^*}. \quad (13)$$

З рівнянь (9), (11) знаходимо, що

$$y_{H^-} = y_e^2 \{ y_e^2 + y_e C_H + C_H C_p \}^{-1}, \quad (14)$$

де

$$\begin{aligned} C_H &= \frac{4}{n^*} \left( \frac{t}{4\pi} \right)^{3/2} U_H(\xi, t) \exp \left[ -\frac{1}{t} I_1(\xi) \right] = \tilde{C}_H U_H(\xi, t), \\ C_p &= \frac{1}{n^*} \left( \frac{t}{4\pi} \right)^{3/2} U_H^{-1}(\xi, t) \exp \left[ -\frac{1}{t} I_2(\xi) \right] = \tilde{C}_p U_H^{-1}(\xi, t). \end{aligned} \quad (15)$$

З рівнянь (9), (12) знаходимо кубічне рівняння для  $y_e$ , а саме

$$y_e^3 + y_e^2 [1 + C_H] + y_e C_H C_p - C_H C_p = 0. \quad (16)$$

Безрозмірний параметр екранування  $\xi$  не є незалежним, він – функція термодинамічних змінних – температури і концентрації заряджених частинок. У водневій моделі

$$\xi^2 = \frac{8\pi}{t} n^* [y_e + y_p + y_{H^-}]. \quad (17)$$

Використовуючи умову електронейтральності (11) та співвідношення (14), спростуємо рівняння (17) до такого вигляду:

$$\xi^2 = \frac{16\pi n^*}{t} y_e C_H C_p [C_H C_p - y_e^2]^{-1}. \quad (18)$$

Оскільки функції  $C_H$  і  $C_p$ , а відтак і  $y_e$  залежать від  $\xi$ , то система рівнянь (16), (18) дозволяє розрахувати залежність  $y_e$  та  $\xi$  від термодинамічних змінних  $(t, n^*)$ .

Рівняння (16) дозволяє одержати ще два зображення для  $y_{H^-}$ ,

$$y_{H^-} = y_e^2 [C_H C_p - y_e^2]^{-1}; \quad (19)$$

$$y_{H^-} = \xi^2 t y_e^2 (16\pi n^* C_H C_p)^{-1},$$

а також зображення для  $y_p$  та  $y_H$ :

$$y_p = y_e \frac{C_H C_p}{C_H C_p - y_e^2}, \quad (20)$$

$$y_H = 1 - y_e \frac{C_H C_p + y_e^2}{C_H C_p - y_e^2}.$$

### 3 Наближений розв'язок рівняння (16)

В області концентрацій  $n^*$  і температур  $t$ , характерних для зоряних фотосфер, розв'язок рівняння (16) спрощується з тієї причини, що монотонно зростаючі функції температури  $C_H$  і  $C_p$  задовольняють нерівність  $C_H > C_p$  навіть при  $t \gtrsim 1$ , а при низьких температурах  $C_H \gg C_p$ . Покладаючи  $C_p = 1$  (при цьому розв'язок рівняння (16) приблизно дорівнює  $y_e^{(0)} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ ), одержуємо рівняння, яке визначає деяку температуру  $t_p$ , що розділяє область низьких та високих температур. У наближенні  $U_H(\xi, t) = 1$ ,  $\xi = 0$  маємо таке рівняння для  $t_p$ :

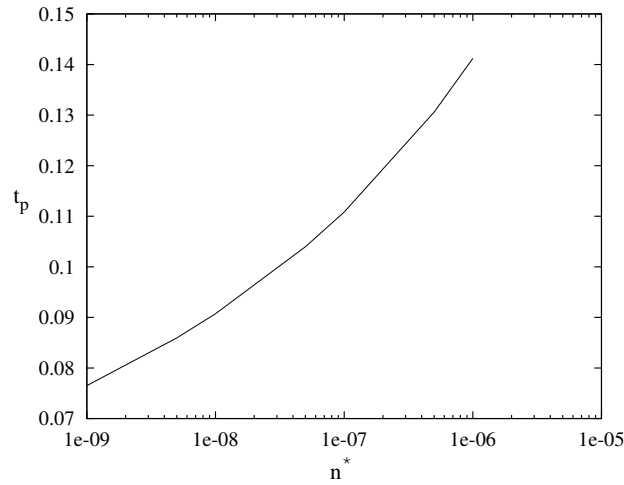
$$t_p = 4\pi(n^*)^{2/3} \exp\left(\frac{2}{3t_p}\right). \quad (21)$$

При температурі  $t_p$  і прийнятих наближеннях

$$C_H \cong 4 \exp\left\{\frac{1}{t_p} 0.9455\right\} \approx 4 \cdot 10^4. \quad (22)$$

На рисунку 1 наведено залежність кореня рівняння (21) від концентрації  $n^*$ . Приймаючи, що  $n^* \approx 10^{-7}$  (що є середньою концентрацією для фотосфери Сонця), одержуємо оцінку

$$t_p \approx 0.11\dots \quad (23)$$

Рис. 1: Залежність  $t_p$  від загальної концентрації баріонів.

З аналізу рівняння (16) випливає, що при температурах, які в декілька разів вищі за  $t_p$ , кубічний і квадратний за  $y_e$  члени є несуттєві, а розв'язок прямує до одиниці. В області температур, нижчих за  $t_p$ , кубічний член у рівнянні (16) відіграє роль малої поправки.

В околі і нижче температури  $t_H$ , яка визначається умовою  $C_H = 1$ , важливим стає кубічний член у рівнянні (16). При використаних вище наближеннях і оцінках  $t_H \approx 3 \cdot 10^{-3}$  ( $T \approx 500K$ ), тому область  $t \lesssim t_H$  є нефізичною. Таким чином, у нульовому наближенні можна знехтувати кубічним доданком рівняння (16), що дає такий розв'язок:

$$y_e^{(0)} = \frac{1}{2(1 + C_H)} \{ [C_H^2 C_p^2 + 4C_H C_p (1 + C_H)]^{1/2} - C_H C_p \}. \quad (24)$$

Щоб одержати розв'язок у першому наближенні, зробимо у рівнянні (16) заміну  $y_e^3 \rightarrow y_e^2 y_e^{(0)}$ , зводячи його до квадратного. У цьому наближенні розв'язком є

$$y_e^{(1)} = \frac{1}{2(1 + C_H + y_e^{(0)})} \{ [C_H^2 C_p^2 + 4C_H C_p (1 + C_H + y_e^{(0)})]^{1/2} - C_H C_p \} \quad (25)$$

і т.д. Функція  $y_e^{(0)}$  має таку асимптотику:

$$\begin{aligned} y_e^{(0)} &\Rightarrow 1 + \dots \text{ при } t > t_p; \\ y_e^{(0)} &\Rightarrow (C_p C_H)^{1/2} (1 + C_H)^{-1/2} - C_p C_H [2(1 + C_H)]^{-1} + \\ &+ (C_p C_H)^{3/2} [8(1 + C_H)]^{-3/2} + \dots \text{ при } t < t_p. \end{aligned} \quad (26)$$

## 4 Аналітичні оцінки і числові розрахунки $U_H(\xi, t)$

Практичне використання розв'язків (25), (26), які визначають, згідно зі співвідношеннями (19), (20), концентрації всіх частинок, вимагає явного розрахунку функції  $U_H(\xi, t)$ . Потрібний для цього енергетичний спектр електрона в екранованому полі протона було досліджено в роботах [8-10]. Коректні розрахунки можна зробити лише чисельним методом, використовуючи чисельні значення величин  $\varepsilon_{n,l}(\xi)$  або їх аналітичні апроксимації. Такі розрахунки було зроблено у роботі [11] – чисельним методом розраховано  $U_H(\xi, t)$  як функцію змінної  $t$  при  $\xi = 0,005; 0,01; 0,05$ . У нашій задачі для самоузгодженого розрахунку параметра екранування необхідно мати залежність  $U_H(\xi, t)$  саме від параметра  $\xi$  при фіксованих значеннях змінної  $t$ .

Якщо наближено представити безрозмірні енергетичні рівні  $\varepsilon_{n,l}(\xi)$  при досить великих значеннях  $n$  ( $n \geq n_0(t) = t^{-1/2}$ ) у вигляді

$$\varepsilon_{n,l}(\xi) \cong -\frac{1}{n^2} (1 - \xi n^2)^2, \quad (27)$$

нехтуючи залежністю від квантового числа  $l$ , то для оцінки  $U_H(\xi, t)$  можна використати представлення, придатне для досить низьких температур,

$$U_H(\xi, t) \cong 1 + \exp[-I_2(\xi)/t] \left\{ \sum_{n \geq 2}^{n_0(t)} \sum_{l \geq 0} (2l + 1) \exp[-\varepsilon_{n,l}(\xi)/t] + \sum_{n=n_0(t)+1}^{N(\xi)} n^2 \exp \left[ \frac{1}{n^2 t} (1 - \xi n^2)^2 \right] \right\}, \quad (28)$$

де  $N(\xi) = [\xi^{-1/2}]$  наближено визначає максимальне значення головного квантового числа, при якому енергетичні рівні переходять у неперервний спектр при заданому  $\xi$ . В останній сумі формули (28) перейдімо до інтегралу, одержуючи таку апроксимаційну формулу ( $t > \xi$ ):

$$U_H(\xi, t) \cong 1 + \exp[\varepsilon_{1,0}(\xi)/t] \times \left\{ \sum_{n \geq 2}^{[t^{-1/2}]} \sum_{l \geq 0} (2l + 1) \exp[-\varepsilon_{n,l}(\xi)/t] + t^{-3/2} \int_1^{(t/\xi)^{1/2}} dz \cdot z^2 \exp \left[ \frac{1}{z^2} \left( 1 - \frac{\xi}{t} z^2 \right)^2 \right] \right\}. \quad (29)$$

Враховуючи, що показник підінтегральної функції є швидко спадною функцією змінної  $z$ , при заміні експоненти одиницею одержуємо таку просту формулу, у якій підсумовування йде за невеликим числом енергетичних рівнів:

$$U_H(\xi, t) \cong 1 + \exp[\varepsilon_{1,0}(\xi)/t] \times \left\{ \sum_{n \geq 2}^{[t^{-1/2}]} \sum_{l \geq 0} (2l + 1) \exp[-\varepsilon_{n,l}(\xi)/t] + \frac{1}{3} (\xi^{-3/2} - t^{-3/2}) \right\}. \quad (30)$$

Результати чисельного розрахунку  $U_H(\xi, t)$  за формулою (8) наведено на рисунку 2. При цьому значення  $\varepsilon_{n,l}(\xi)$  взято з роботи [8]. Апроксимація (29), або (30) якісно відтворює властивості функції  $U_H(\xi, t)$ , розрахованої чисельним методом.

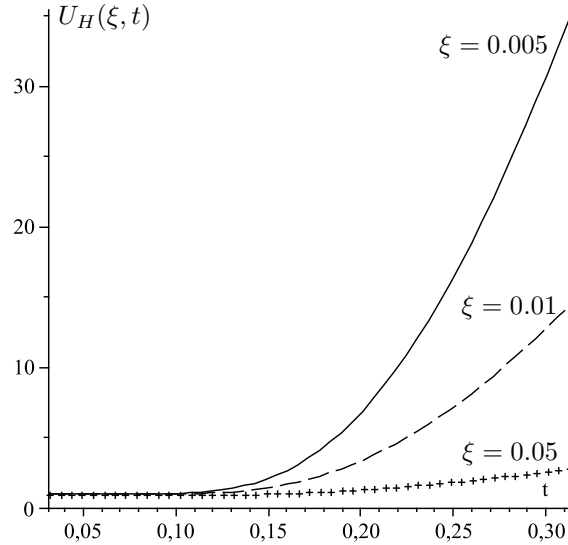


Рис. 2: Залежність  $U_H(\xi, t)$  від  $t$  при заданих  $\xi$  (див. [11]).

## 5 Самоузгоджений розрахунок параметра екранування і концентрації частинок

За відомими розв'язками рівняння (16) параметр екранування визначається як корінь рівняння (18). Останнє є складним нелінійним рівнянням, бо  $C_p$ ,  $C_H$  (а також  $y_e$ , що визначається формулами (24), (25)) є функціями параметра  $\xi$ . Розв'язки такого рівняння можна одержати чисельним способом, використовуючи метод ітерацій. В області низьких температур ( $t \lesssim t_p$ ) ситуація спрощується, бо там застосовне наближення  $U_H(\xi, t) = 1$ , так що лише  $C_p$  має просту аналітичну залежність від  $\xi$ . Використовуючи розв'язок (24), запишемо рівняння для  $\xi$  у такому явному вигляді:

$$\xi^2 \{2C_H(1 + \tilde{C}_H) + f(\xi)\} = \frac{16\pi n^*}{t} (\tilde{C}_H + 1) f(\xi), \quad (31)$$

$$f(\xi) = [\tilde{C}_H^2 \tilde{C}_p^2 + 4\tilde{C}_p \tilde{C}_H (1 + \tilde{C}_H)]^{1/2} - \tilde{C}_H \tilde{C}_p,$$

де  $\varepsilon_{1,0}(\xi)$  визначено формулою (10).

Характер розв'язку рівняння (18) в області  $0,01 \leq t \leq 0,30$  при заданих значеннях  $n^*$  ілюструє рисунок 3 (суцільні криві). Пунктирні криві рис. 3 представляють розв'язок рівняння (18), якщо  $U_H(\xi, t)$  визначено формулою (29), а для  $y_e$  взято розв'язок (24). Це самоузгоджена залежність від термодинамічних параметрів.



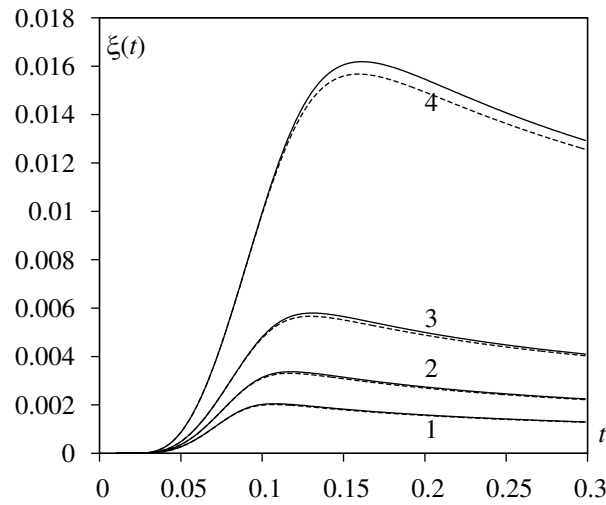


Рис. 3: Залежність параметра екранування  $\xi$  від безрозмірної температури  $t$ : крива 1 відповідає  $n^* = 10^{-8}$ , крива 2 –  $n^* = 3 \cdot 10^{-8}$ , крива 3 –  $n^* = 10^{-7}$ , крива 4 –  $n^* = 10^{-6}$ .

Самоузгоджена залежність від термодинамічних параметрів функції  $U_H(\xi, t)$  при визначеному  $\xi = \xi(n^*, t)$  зображена на рисунку 4.

На рисунках 5 і 6 зображено залежність функцій  $C_H$  і  $C_p$  від змінних  $n^*$ ,  $t$ , розрахованих на основі  $U_H(\xi, t)$  при  $\xi = \xi(n^*, t)$ . Як видно з цих рисунків, згадані функції змінюють характер залежності від температури в околі  $t_p$  (див. (21)).

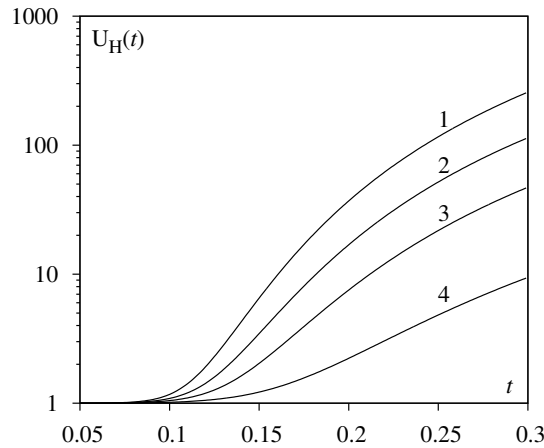


Рис. 4: Залежність  $U_H(\xi, t)$  від термодинамічних параметрів (самоузгоджений розрахунок): крива 1 відповідає  $n^* = 10^{-8}$ , крива 2 –  $n^* = 3 \cdot 10^{-8}$ , крива 3 –  $n^* = 10^{-7}$ , крива 4 –  $n^* = 10^{-6}$ .

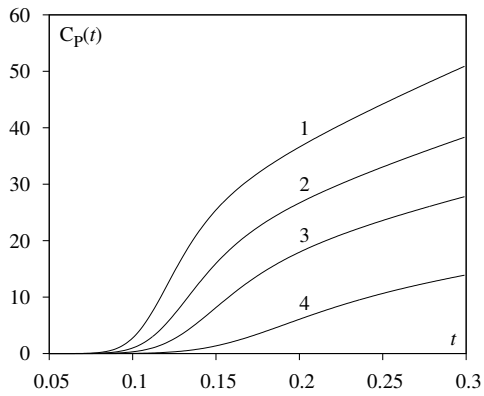


Рис. 5: Залежність функції  $C_p$  від безрозмірної температури  $t$ . Позначення ті ж, що й на рис. 4.

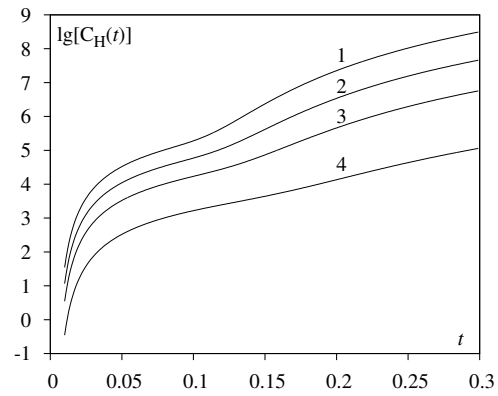


Рис. 6: Залежність функції  $C_n$  від температури  $t$ . Позначення ті ж, що й на рис. 4.

Самоузгоджений розрахунок залежності функції  $y_e$  від температури на основі розрахованих  $C_n(n^*, t)$ ,  $C_p(n^*, t)$  наведено на рисунку 7 (пунктирні криві). Для порівняння зображено також розв'язок у наближенні  $U_H(\xi, t) = 1$  (суцільні криві).

Залежність функцій  $y_{H^-}$ ,  $y_H$  та  $y_p$  від температури наведено на рисунках 8, 9. Пунктирні криві відповідають наближенню  $U_H(\xi, t) = 1$ , суцільні – самоузгоджений розрахунок.

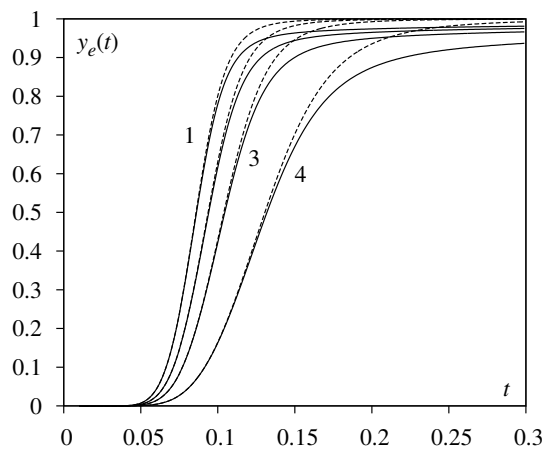


Рис. 7: Температурна залежність відносної концентрації електронів.

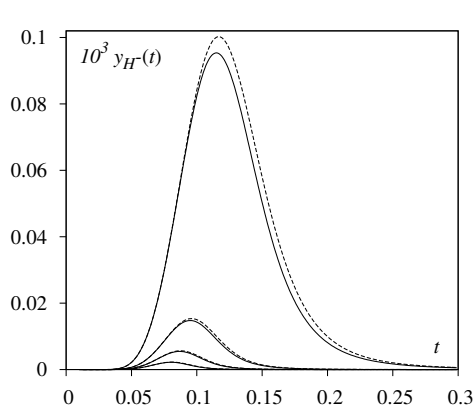


Рис. 8: Температурна залежність відносної концентрації негативних іонів водню. Концентрації  $n^*$  ті ж, що й на рис. 4.

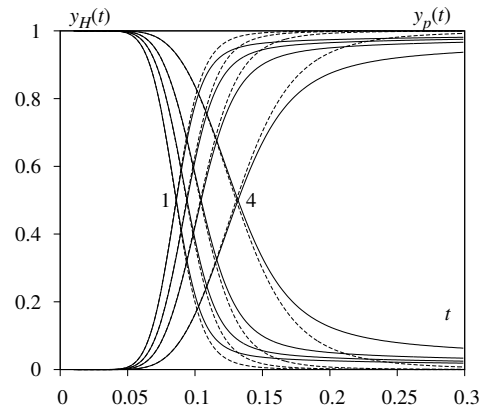


Рис. 9: Температурна залежність відносної концентрації нейтральних атомів водню та протонів. Концентрації  $n^*$  ті ж, що й на рис. 4.

## 6 Наближення Планка-Бриллюена-Ларкіна і Ріве-Ромпе

У підході, який ми розглядаємо, функція  $U_H(n^*, t)$  залежить від температури і густини системи. Доцільно порівняти наші результати з аналогічними результатами, одержаними при використанні функції  $U_H(t)$  в наближеннях Планка-Бриллюена-Ларкіна [3,4,5]

$$U_H^{\text{ПБЛ}}(t) = 1 + \exp(-t^{-1}) \sum_{n=2}^{\infty} n^2 \{ \exp(n^2 t)^{-1} - 1 - (n^2 t)^{-1} \} \quad (32)$$

та Ріве-Ромпе

$$U_H^{\text{РР}}(t) = 1 + \exp(-t^{-1}) \sum_{n=2}^{[t^{-1/2}]} n^2 \exp(n^2 t)^{-1}, \quad (33)$$

у яких фігурує кулонівський спектр енергетичних рівнів електрона і які не мають залежності від концентрації частинок, а лише від температури. На рис. 10 наведено залежність функцій  $U_H^{\text{ПБЛ}}(t)$ ,  $U_H^{\text{РР}}(t)$  від температури. Як видно з рисунка, у всьому розглянутому інтервалі вони мало відхиляються від одиниці, на відміну від функції  $U_H(n^*, t)$ , розрахованої самоузгодженим чином. На рисунку 11 зображено залежність функції  $y_e(t)$ , розрахованої самоузгодженим чином при концентраціях  $n^* = 10^{-7}$  та  $n^* = 10^{-6}$ , що співпадають з кривими 3 і 4 на рис. 7 (нижні криві), а також розраховану за формулою (24) при використанні  $U_H^{\text{ПБЛ}}(t)$  та  $U_H^{\text{РР}}(t)$  (верхні криві). Крім того, на цьому ж рисунку зображена також функція  $y_e(t)$  при  $U_H(t) = 1$ . Криві, розраховані за функціями  $U_H^{\text{ПБЛ}}(t)$ ,  $U_H^{\text{РР}}(t)$  і  $U_H(t) = 1$ , практично співпадають. Що й не дивно, бо функції  $U_H^{\text{ПБЛ}}(t)$ ,  $U_H^{\text{РР}}(t)$ , хоча й відрізняються між собою, але відхиляються від одиниці значно менше, ніж  $U_H(n^*, t)$ . Відхилення

результатів самоузгодженого розрахунку від розрахунку на основі вище згаданих функцій  $U_H(t)$ , або  $U_H(t) = 1$  зростає з підвищенням температури і загальної концентрації баріонів.

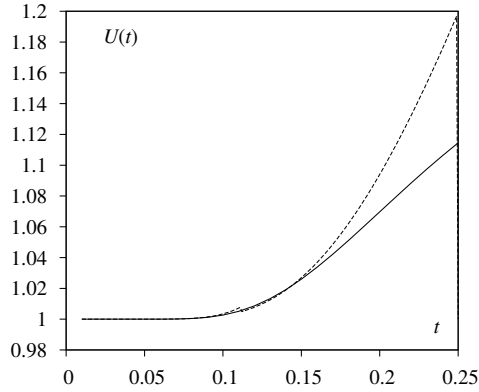


Рис. 10: Залежність функції  $U$  від  $t$ : суцільна крива – наближення (32), а пунктирна – (33).

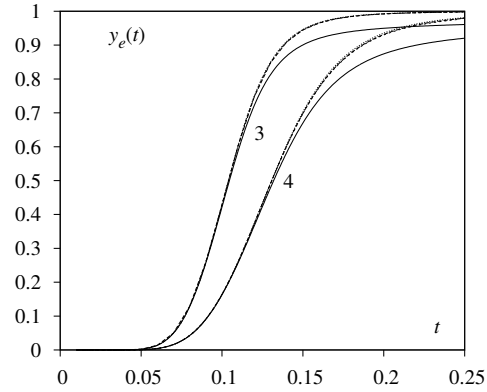


Рис. 11: Залежність функції  $y_e(t)$  від  $t$ .

## Висновки

З виконаних розрахунків випливає, що концентрації частинок у частково йонізованій водневій плазмі мають різний характер температурної залежності при низьких та високих температурах, а точка  $t_p \simeq 0,11\dots$  розділяє ці дві області температур.

В області  $t < t_p$  відхилення наближено розрахованих концентрацій частинок (а також параметра екранування  $\xi = \xi(n^*, t)$ , функцій  $U_H(n^*, t)$ ,  $C_H$  та  $C_p$ ) при  $U_H(n^*, t) = 1$  від результатів самоузгоджених розрахунків є невеликим. В області  $t > t_p$  такі відхилення є суттєвими.

Врахування екранування взаємодій при розрахунку статистичної суми атома водню є необхідним і єдиним фізично обґрунтованим способом. Проте точність такого розрахунку мало впливає на поведінку температурної залежності концентрації частинок.

Концентрації електронів, протонів, атомів  $H$ , а також функції  $C_H$ ,  $C_p$  та  $U_H(n^*, t)$  мають монотонну залежність від температури при фіксованій концентрації баріонів. Безрозмірний параметр екранування  $\xi(n^*, t)$  та концентрація йонів  $H^-$  є немонотонними функціями температури. Зокрема  $y_H$  має максимум поблизу  $t_p$ , а висота його сильно залежить від загальної концентрації баріонів. Як видно з формул (19), концентрація йонів  $H^-$  є дуже малою величиною порівняно з концентрацією "вільних" електронів при будь-яких значеннях параметрів  $n^*$  і  $t$ , характерних для зоряних фотосфер.

## Список використаної літератури

1. В. Эбеллинг, В. Крафт, Д. Кремн Теория связанных состояний и ионизационного равновесия в плазме и твердом теле (М.: Мир, 1979).
2. Г.С. Бисноватый-Коган Физические вопросы теории звездной эволюции (М.: Наука, 1989).
3. М. Planck, Ann. der Phys. **75**, 673 (1924).
4. L. Brillouin Les Statistiques Quantiques et leurs Application (Paris, 1930).
5. А.И. Ларкин, ЖЭТФ **38**, 1896 (1960).
6. К.Н. Riewe, R. Rompe, Ann. der Phys. **111**, 79 (1938).
7. G.H. Ecker, W. Weizel, Ann. der Phys. **17**, 126 (1956).
8. F.J. Rogers, H.C. Graboske Jr., D.J. Harwood, Phys. Rev. **A1**, 1577 (1970).
9. М.В. Ваврух, О.М. Стельмах, Н.Л. Тишко, Р.І. Коритко, Журн. фіз. досл. **12**, 3001-1 (2008).
10. М.В. Ваврух, О.М. Стельмах, Н.Л. Тишко, Журн. фіз. досл. **13**, 2001-1 (2009).
11. М.В. Ваврух, О.М. Стельмах, С.В. Смеречинський, Журн. фіз. досл. **13**, 3902-14 (2009).

Стаття надійшла до редакції 23.10.2014

прийнята до друку 19.11.2014

THE IONIZATION-RECOMBINATION EQUILIBRIUM  
COMPUTATION IN THE STELLAR'S PHOTOSPHERES

O. Stelmakh

*Ivan Franko National University of Lviv  
Kyrylo and Mefodiy St., 8, 79005 Lviv, Ukraine*

The dependence of electron, proton, atoms of hydrogen as well as ions of  $H^-$  densities on temperature and the overall density in model of partially ionized hydrogen plasmas in star photospheres is investigated. The self-consistent method, based on the accounting of Debye shielding of Coulomb interactions that restricts the number of energy levels of an electron in atom of hydrogen is used. Thus, the partition function of hydrogen atom is the finite function of temperature and density. Calculation results of the electron, proton as well atoms and ions of  $H^-$  relative densities at the temperatures of  $0,01 \leq k_B T / Ry \leq 0,30$  of are given. Comparison of the relative density of electrons calculated by a self-consistent method with results of calculations on the basis of Planck-Brillouin-Larkin's approximations and Riva-Rompa for a partition function of atom of hydrogen was performed.

**Key words:** star photospheres, ionization balance, shielding of interactions, Debye hydrogen plasma, equilibrium concentration of particles.

## РАСЧЕТ ИОНИЗАЦИОННОГО РАВНОВЕСИЯ В ЗВЕЗДНЫХ ФОТОСФЕРАХ

О. Стельмах

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко  
ул. Кирилла и Мефодия 8, 79005 Львов, Украина*

Исследована зависимость концентраций электронов, протонов, атомов водорода и ионов  $H^-$  от температуры и общей плотности в модели частично ионизированной водородной плазмы звездных фотосфер. Использован самосогласованный метод расчета, базирующийся на учете дебаевского экранирования кулоновских взаимодействий, которое ограничивает число энергетических уровней электрона в атоме водорода. Вследствие этого статистическая сумма атома водорода является конечной функцией температуры и плотности. Приведены результаты расчета относительных концентраций электронов, протонов, атомов и ионов  $H^-$  в области температур  $0,01 \leq k_B T / Ry \leq 0,30$ . Выполнено сравнение рассчитанной самосогласованным методом относительной концентрации электронов с результатами расчетов на основе аппроксимаций Планка-Бриллюэна-Ларкина и Риве-Ромпе для статсуммы атома водорода.

**Ключевые слова:** звездные фотосферы, ионизационное равновесие, экранирование взаимодействий, дебаевская водородная плазма, равновесные концентрации частиц.