

УДК 523.9-47, 524.3-6  
PACS 97.10.Ex

# РОЗРАХУНОК КОНФІГУРАЦІЇ ПРОТОПЛАНЕТНОГО ДИСКУ ЗА РІВНЯННЯМ ЛЕНА-ЕМДЕНА

Н.Тишко, І. Прунчак

*Львівський національний університет імені Івана Франка  
вул. Кирила і Мефодія, 8, 79005 Львів, Україна*

За допомогою рівняння Лена-Емдена досліджено рівноважний розподіл матерії у моделі, що описує початкову фазу формування планетної системи із протопланетного диску, який обертається, у наближенні політропної залежності між тиском і густиною. Знайдено новий клас розв'язків, що мають характер солітонних. Побудовано загальний, неперервний і додатний розв'язок, що описує розподіл матерії фрагментованого диску і якісно відповідає закону Тіціуса-Боде.

**Ключові слова:** протопланетний газопопиловий диск, закон Тіціуса-Боде, рівняння Лена-Емдена, локалізовані розв'язки.

## 1 Вступ

Проблему зародження, будови й еволюції Сонячної системи завжди трактували як одну з найважливіших проблем науки. Увага до цієї проблеми загострилась протягом останнього десятиліття у зв'язку з відкриттям планет навколо інших зір [1–5]. Виявлено подібність у структурі планетних орбіт відомих на сьогодні планетних систем (Сонячна система і більше тисячі планетних систем навколо зір-сусідів Сонця) [16], що узгоджується із законом Тіціуса-Боде. Хоча цей закон є наближеним, подібність структури орбіт у різних планетних системах свідчить про його універсальність. Спробам обґрунтування цього закону присвячено чимало робіт, зокрема роботи таких відомих фізиків і астрономів як Вайцеккер, Альфвен, Берлаге, Біркеланд, Койпер, Шмідт, Доул та ін. (див. [7]). Однак до цього часу немає загально-визнаної теорії планетоутворення, яка пояснила б закон Тіціуса-Боде. Згідно з сучасними уявленнями, утворення зорі і системи вторинних тіл навколо неї відбувається в рамках єдиного процесу, що починається із фрагментації протопланетного диску. Гіпотеза про існування протопланетних дисків і утворення планетних систем в сучасну епоху підтверджена спостереженнями. Зокрема, лише в газопиловому комплексі Оріона виявлено близько 150 протопланетних дисків [8]. Гіпотеза про синхронність процесів утворення центральної зорі і її планетної системи дозволяє використати для

опису процесу фрагментації диску той самий математичний апарат, яким описують внутрішню структуру зір.

В результаті застосування системи рівнянь механічної та енергетичної рівноваги до опису газопилової хмари можна було б одержати як структуру зорі, так і системи вторинних тіл. Оскільки на ранніх стадіях еволюції процеси енергообміну поза центральною областю хмари не є визначальними, то в першому наближенні можна обмежитись рівнянням механічної рівноваги газопилової хмари, що є основним наближенням небулярних теорій [7]. Такий підхід відповідає стадії еволюції хмари, коли під впливом гравітації та обертання виникає фрагментація зовнішніх шарів. Утворення планетозімалей у них, процеси об'єднання їх і утворення планет відбуваються на пізніших етапах еволюції, які в рамках такого підходу не розглядаються.

У даній роботі ми розглядаємо модель газопилової хмари, що обертається. Для опису рівноважного розподілу матерії за рівнянням Лена-Емдена використовується політропна залежність між тиском і густиною. Знайдено новий клас розв'язків рівняння Лена-Емдена, що описують відокремлені згустки матерії.

## 2 РІВНЯННЯ ЛЕНА-ЕМДЕНА ІЗ ВРАХУВАННЯМ ОБЕРТАННЯ

Використаємо неінерційну систему відліку, вісь  $OZ$  якої збігається із віссю обертання протопланетного диску. Розподіл матерії в диску визначається рівнянням механічної рівноваги, яке у вибраній системі координат має такий вигляд:

$$\nabla P(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r}) \nabla \Phi(\mathbf{r}), \quad (1)$$

де  $P(\mathbf{r})$  – тиск,  $\rho(\mathbf{r})$  – густина матерії у точці простору, яка визначається радіус-вектором  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , а

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_{\text{гп}}(\mathbf{r}) + \Phi_{\text{відн}}(\mathbf{r}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{2} \omega^2(\mathbf{r})(x^2 + y^2) \quad (2)$$

є повним потенціалом, що складається з гравітаційної складової та відцентрової, зумовленої обертанням диску. Ми розглядаємо політропну модель, для якої

$$P(\mathbf{r}) = C \rho^\nu(\mathbf{r}), \quad (3)$$

де параметри  $C$  та  $\nu$  є сталими і визначаються за характеристиками зорі. Відзначимо, що політропне наближення широко використовується у теорії внутрішньої будови зір з метою одержання аналітичних чи напіваналітичних розв'язків (див. напр. [9]). Кутову швидкість  $\omega(\mathbf{r})$  надалі будемо вважати заданою функцією відстані від осі обертання  $\xi = (x^2 + y^2)^{1/2}$ .

Використовуючи співвідношення (2), (3) та діючи оператором градієнта на рівняння (1), приведемо його до такого вигляду:

$$C(1+n) \nabla^2 (\rho(\mathbf{r}))^{1/n} = -4\pi G \rho(\mathbf{r}) + 2\omega^2(\xi) + \beta(\xi), \quad (4)$$

$$\beta(\xi) \equiv \xi^2 \left( \frac{d\omega(\xi)}{d\xi} \right)^2 + \omega(\xi) \xi^2 \frac{d^2\omega(\xi)}{d\xi^2} + 5\omega(\xi) \xi \frac{d\omega(\xi)}{d\xi},$$

де  $n = (\nu - 1)^{-1}$ . Введемо підстановку  $\rho(\mathbf{r}) = U^n(\mathbf{r})$  і перейдемо до циліндричної системи координат  $(\mathbf{r} = (\xi, z, \varphi))$ . У цій роботі ми обмежимося азимутально-симетричними розв'язками, коли  $U(\mathbf{r}) = U(\xi, z)$ . Введемо також безрозмірні змінні  $\xi^* \equiv \xi/\lambda, z^* \equiv z/\lambda$ , і безрозмірну функцію  $y(\xi^*, z^*) = U(\xi, z)/U_0$ . Масштабний фактор  $\lambda$  визначимо з умови

$$C(1+n) = 4\pi G\lambda^2 U_0^{n-1}, \quad (5)$$

причому  $U_0 \equiv U(0,0)$ . У нових змінних рівняння (4) набуває безрозмірної форми рівняння у частинних похідних

$$\left\{ \frac{1}{\xi^*} \frac{\partial}{\partial \xi^*} \left( \xi^* \frac{\partial}{\partial \xi^*} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}} \right\} y(\xi^*, z^*) + y^n(\xi^*, z^*) = \Omega(\xi^*), \quad (6)$$

$$\Omega(\xi^*) \equiv \left\{ \omega^2(\xi^*\lambda) + \frac{1}{2}\beta(\xi^*\lambda) \right\} (2\pi G U_0^n)^{-1}.$$

Для часткового випадку кеплерівського обертання, коли  $\omega(\xi) = \omega_0 \left( \frac{\xi_0}{\xi} \right)^{3/2}$ , функція  $\Omega(\xi^*)$  є монотонною додатною функцією змінної  $\xi^*$ , а саме  $\Omega(\xi^*) = (8\pi G U_0^n)^{-1} \omega^2(\xi^*\lambda)$ . Згідно з означенням  $y(\xi^*, z^*) \geq 0$ .

У теорії внутрішньої будови зір традиційно розглядають сферично-симетричну модель зорі без обертання, а рівняння

$$(r^*)^{-2} \frac{\partial}{\partial r^*} \left\{ (r^*)^2 \frac{\partial}{\partial r^*} \right\} y(r^*) + y^n(r^*) = 0 \quad (7)$$

( $r^* = |\mathbf{r}|\lambda^{-1}$ ) і називають власне рівнянням Лена-Емдена. У цьому випадку рівнянню відповідають такі граничні умови :  $y(0,0) = 1$ ,

$$\frac{\partial}{\partial \xi^*} y(\xi^*, z^*)|_{\xi^*=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z^*} y(\xi^*, z^*)|_{z^*=0} = 0. \quad (8)$$

Рівняння (8) має знакозмінні розв'язки при  $n < 5$  і додатні монотонно спадні розв'язки при  $n \geq 5$ , але остання область – нефізична (зоря не має границі). У фізичній області відомі аналітичні розв'язки при  $n = 0$  ( $y(r^*) = 1 - \frac{1}{6}(r^*)^2$ ) і  $n = 1$  ( $y(r^*) = \frac{\sin r^*}{r^*}$ ). В області  $0 \leq n \leq 5$  функція  $y(r^*)$  є додатною і монотонно спадною на інтервалі  $0 \leq r^* \leq r_n^*$ , де вона змінюється від 1 до 0. При цьому  $r_n^*$  є монотонно зростаючою функцією індекса  $n$  і змінюється від  $\sqrt{6}$  до  $\infty$  при зростанні  $n$  від 0 до  $5 - \delta$  ( $\delta \rightarrow +0$ ). При цьому  $\lambda r_n^* = R_n$  визначає радіус зорі-політропи. При граничних умовах  $y(0) = 1, y'(0) = 0$  розв'язок рівняння (8) має таку асимптотику при  $r \ll r_n$  [10]:

$$y(r^*) = 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{r^*}{2} \right)^2 + \frac{32}{15} n \left( \frac{r^*}{4} \right)^4 - \frac{108}{35} n(8n-5) \left( \frac{r^*}{6} \right)^6 + \dots \quad (9)$$

При  $r^* \rightarrow r_n^*$  функція  $y(r^*)$  має лінійну залежність від  $r_n^* - r^*$ ,

$$y(r^*) \rightarrow \alpha_n \left[ \frac{1}{r^*} - \frac{1}{r_n^*} \right] \simeq \alpha_n (r_n^* - r^*) (r^*)^{-2}, \quad (10)$$

де  $\alpha_n = (r_n^*)^2 \left| \left( \frac{dy}{dr^*} \right)_{r^*=r_n^*} \right|$  є монотонно спадною функцією параметра  $n$ . У двовимірному випадку без врахування обергання, коли  $y(\xi^*, z^*) \equiv y(\xi^*)$ , розв'язки ЛЕФ мають подібні властивості, зокрема  $y(\xi^*)$  є монотонно спадною додатною функцією з такою асимптотикою:

$$y(\xi^*) \rightarrow \begin{cases} 1 - \left(\frac{\xi^*}{2}\right)^2 + 4n \left(\frac{\xi^*}{4}\right)^4 - n(3n-2) \frac{81}{4} \left(\frac{\xi^*}{6}\right)^6 + \dots & \text{при } \xi^* \ll \xi_n^*, \\ \beta_n \ln \frac{\xi_n^*}{\xi^*} + \dots \simeq \frac{\beta_n}{\xi_n^*} (\xi_n^* - \xi^*) + \dots & \text{при } \xi^* \rightarrow \xi_n^*, \end{cases} \quad (11)$$

де  $\xi_n^*$  – точка обергання розв'язку в нуль, яка визначає радіус моделі (диску),  $\beta_n = \xi_n^* \left| \left( \frac{dy}{d\xi^*} \right)_{\xi^*=\xi_n^*} \right|$ .

### 3 ПЕРЕХІД ДО ОДНОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ.

Рівняння (6) при  $n > 1$  є нелінійним двовимірним рівнянням у частинних похідних, а тому знаходження його аналітичних розв'язків є складною математичною задачею. У цій роботі ми використаємо наближений метод. Нас цікавить у першу чергу залежність функції  $y(\xi^*, z^*)$  від змінної  $\xi^*$ , а для моделі тонкого диску, яку ми розглядаємо, виконується умова  $z^* \ll \xi^*$ . У зв'язку з цим залежність  $y(\xi^*, z^*)$  від змінної  $z^*$  ми врахуємо наближено, використовуючи відомий у теорії акреційних дисків спосіб оцінки товщини тонких дисків [11]. У циліндричній системі координат векторне рівняння (1) можна наближено зобразити системою двох скалярних рівнянь:

$$\frac{dP}{dz} \simeq -\rho(\xi, z) \frac{z}{r^3} GM(\xi, z), \quad (12)$$

$$\frac{dP}{d\xi} = -\rho(\xi, z) \left\{ \frac{\xi}{r^3} GM(\xi, z) - \frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} [\xi^2 \omega^2(\xi)] \right\}.$$

При записі рівнянь (12) враховано, що основна маса протопланетного диску зосереджена в центрі конфігурації, тому гравітаційний потенціал близький до  $-GM(\xi, z)r^{-1}$  ( $r = [\xi^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}$ ). У випадку тонкого диску  $M(\xi, z) \simeq M(\xi, 0)$  має залежність від змінної  $\xi$ , при цьому  $M(\xi, 0)$  є неспадною функцією  $\xi$ . Виконаємо наближене інтегрування першого з рівнянь (12):

$$\int_{\rho(\xi, 0)}^{\rho(\xi, h)} \rho^{-1} dP \simeq -GM(\xi, 0) \int_0^h \frac{z dz}{(z^2 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (13)$$

Тут  $h \equiv h(\xi)$  є максимальним значенням змінної  $z$  при заданому  $\xi$  (значення  $z$ -координати, при якому  $\rho(\xi, h) = 0$ ). Якщо у рівності (3)  $\nu > 1$ , то з рівняння (13) одержуємо співвідношення

$$(n+1)C [\rho(\xi, 0)]^{\frac{1}{n}} \simeq GM(\xi, 0) \left\{ \xi^{-1} - [\xi^2 + h^2(\xi)]^{-\frac{1}{2}} \right\}, \quad (14)$$

або ж

$$(n+1)CU_0y(\xi, 0) \{GM(\xi, 0)\}^{-1} \simeq \xi^{-1} - [\xi^2 + h^2(\xi)]^{-\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

Для тонкого диску, коли  $h(\xi) \ll \xi$ , звідси знаходимо

$$h^*(\xi^*) = \lambda^{-1}h(\xi) \simeq \{(\xi^*)^3y(\xi^*, 0)\}^{\frac{1}{2}} \{M^*(\xi^*)\}^{-\frac{1}{2}}, \quad (16)$$

де

$$M^*(\xi^*) \equiv M(\xi, 0) \{8\pi\lambda^3U_0^n\}^{-1} - \quad (17)$$

безрозмірна маса.

Формула (16) визначає напівтовщину диску на досить великій відстані від осі обертання. Фізичний зміст мають такі розв'язки  $y(\xi^*, 0)$ , при яких  $h^*(\xi^*)$  є незростаючою функцією змінної  $\xi^*$ , тобто в середньому товщина диску є сталою, або ж зменшується вздовж радіуса. Звичайно, у тих місцях, де  $y(\xi^*, 0)$  досягає мінімуму,  $h^*(\xi^*)$  теж є мінімальним.

Одержана залежність товщини диску від  $\xi^*$  дозволить нам спростити рівняння (6). З цією метою представимо  $y(\xi^*, z^*)$  у вигляді добутку двох функцій,

$$y(\xi^*, z^*) = \chi(\xi^*)\varphi_{\xi^*}(z^*), \quad (18)$$

а  $\varphi_{\xi^*}(z^*)$  змодельюємо пробними функціями, що мають такі властивості:

$$\begin{aligned} \varphi_{\xi^*}(z^*) &> 0 && \text{при } |z^*| < h^*(\xi^*), \\ \varphi_{\xi^*}(z^*) &= 0 && \text{при } |z^*| \geq h^*(\xi^*), \\ \varphi_{\xi^*}(0) = 1, \frac{d}{dz^*}\varphi_{\xi^*}(z^*) &= 0 && \text{при } z^* = 0, \\ \frac{d^2}{(dz^*)^2}\varphi_{\xi^*}(z^*) &\leq 0 && \text{при } |z^*| \leq h^*(\xi^*). \end{aligned} \quad (19)$$

Підставляючи вираз (18) у рівняння (6) та інтегруючи за змінною  $z^*$  в межах від 0 до  $h^*(\xi^*)$ , одержуємо таке одновимірне рівняння:

$$\frac{d^2\chi}{d\xi^{*2}} + \frac{1}{\xi^*} \frac{d\chi}{d\xi^*} + \chi^n A_n(\xi^*) = \frac{\Omega(\xi^*)}{\langle \varphi \rangle} - \chi \frac{\langle \varphi_z'' \rangle}{\langle \varphi \rangle} - \frac{\chi}{\xi^*} \frac{\partial \langle \varphi \rangle}{\partial \xi^*} - 2 \frac{\partial}{\partial \xi^*} \xi \frac{\partial \langle \varphi \rangle}{\partial \xi^*}. \quad (20)$$

Тут використано такі позначення:

$$\begin{aligned} \langle \varphi^m \rangle &\equiv (h^*\xi^*)^{-1} \int_0^{h^*\xi^*} dz^* \varphi_{\xi^*}^m(z^*); \quad m \geq 1, \\ A_n(\xi^*) &= \langle \varphi \rangle^{-1} \langle \varphi^n \rangle, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\langle \varphi_z'' \rangle \equiv h^*(\xi^*)^{-1} \int_0^{h^*(\xi^*)} dz^* \frac{d^2}{dz^{*2}} \varphi_{\xi^*}(z^*).$$

Якщо  $\varphi_{\xi^*}(z^*)$  вибрати у вигляді безрозмірної функції змінної  $z^*/h^*(\xi^*)$ , то, згідно зі співвідношеннями (16),(19)

$$-\frac{\langle \varphi_z'' \rangle}{\langle \varphi \rangle} \sim \frac{\gamma}{(h^*(\xi^*))^2}, \quad (22)$$

де  $\gamma$  - додатне число порядку одиниці, а

$$\chi(\xi^*) \mid \frac{\langle \varphi_z'' \rangle}{\langle \varphi \rangle} \mid = \gamma \frac{M^*(\xi^*)}{(\xi^*)^3}, \quad (23)$$

Тому перші два доданки у правій стороні рівняння (20) можна розглядати як перенормування частоти обертання заміни  $\Omega(\xi^*)$  на

$$\Omega(\tilde{\xi}^*) = \frac{\Omega(\xi^*)}{\langle \varphi \rangle} + \gamma \frac{M^*(\xi^*)}{(\xi^*)^3}. \quad (24)$$

Два останні доданки у правій стороні рівняння (20) мають порядок

$$-(h^*(\xi^*))^{-1} \left\{ \frac{\chi}{\xi^*} + 2 \frac{\partial \chi}{\partial \xi^*} \right\} \frac{d}{d\xi} h^*(\xi^*). \quad (25)$$

Як приклад розглянемо пробну функцію

$$\varphi_{\xi^*}(z^*) = 1 - \left[ \frac{z^*}{h^*(\xi^*)} \right]^2. \quad (26)$$

У цьому випадку  $\gamma = 2, \langle \varphi \rangle = \frac{2}{3}$ ;

$$A_n = \sum_{s=0}^n (-1)^s \frac{n!}{s!(n-s)!} \frac{1}{2s+1}; \quad A_1 = 1; \quad A_2 = \frac{4}{5}; \quad A_3 = \frac{24}{35}; \dots \quad (27)$$

Оскільки при кеплерівському обертанні  $\Omega(\xi) \sim \xi^{-3}$ , то перенормування частоти обертання є суттєвим, як і зміна коефіцієнта при  $\chi^n(\xi^*)$  у лівій стороні рівняння (20). При великих значеннях змінної  $\xi^*$  доданки

$$\frac{1}{\xi^*} \frac{d\chi}{d\xi^*}, \quad -\frac{\chi}{\xi^*} \frac{\partial \langle \varphi \rangle}{\partial \xi^*}, \quad -2 \frac{\partial}{\partial \xi^*} \xi \frac{\partial \langle \varphi \rangle}{\partial \xi^*} \quad (28)$$

є малими. Тому далеко за межами зорі розв'язки рівняння (20) близькі до розв'язків рівняння нульового наближення

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) = \Omega_0 - A_n f^n(x), \quad (29)$$

де  $x \equiv \xi - \xi_0^*$ ;  $\Omega_0 = \tilde{\Omega}(\xi_0^*)$ ;  $f(x) = \chi(\xi_0^* + x)$ .

Як випливає з рівняння (29), при  $f(x) > 0$  і довільних  $\Omega_0 = 0$  завжди існує область змінної  $x$ , у якій  $\frac{d^2 f}{dx^2} < 0$ , що є ознакою локалізованого розв'язку. Рівняння (29) має локалізований розв'язок при досить малих значеннях  $\Omega_0$ , принаймні в області

$A_n f^n(x) > \Omega_0$ . Розв'язок рівняння (29) можна записати у квадратурах, оскільки воно належить до типу рівнянь, в яких змінна  $x$  не фігурує явно. Перейдемо до змінної  $f = f(x)$  за правилом

$$p = \frac{df(x)}{dx}, \quad \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{dp}{df} p, \quad (30)$$

зводячи рівняння (29) до нелінійного рівняння першого порядку

$$p \frac{dp}{df} = \Omega_0 - f^n \cdot A_n. \quad (31)$$

Інтегруючи його, одержуємо співвідношення

$$\frac{p^2}{2} = f \Omega_0 - \frac{f^{n+1}}{n+1} + C_n, \quad (32)$$

де  $C_n$  – стала інтегрування. Розглянемо рівняння (29) в області  $-x_1 \leq x \leq x_2$  при таких граничних умовах

$$\begin{aligned} f(0) &\equiv f_{\max}, \quad f'(0) = 0; \\ f(-x_1) &\equiv f_{\min}^{(1)} \geq 0, \quad f(x_2) \equiv f_{\min}^{(2)} \geq 0; \\ f'(-x_1) &= f'(x_2) = 0. \end{aligned}$$

З умови  $f'(0) = 0$  ( $p = 0$ ) знаходимо сталу інтегрування

$$C_n = A_n (n+1)^{-1} f_{\max}^{n+1} - f_{\max} \Omega_0, \quad (33)$$

Розв'язуючи рівняння (32) відносно  $p$  та інтегруючи його, одержуємо неявно заданий розв'язок у квадратурах:

$$x = \pm \left( \frac{n+1}{2} \right)^{1/2} \int_f^{f_{\max}} df \left\{ (f_{\max}^{n+1} - f^{n+1}) A_n - (f_{\max} - f) \Omega_0 (n+1) \right\}^{-1/2}. \quad (34)$$

З умови (33) визначаємо область існування розв'язку:

$$x_{1,2} = \left( \frac{n+1}{2} \right)^{1/2} \int_{f_{\min}^{(1,2)}}^{f_{\max}} df \left\{ (f_{\max}^{n+1} - f^{n+1}) A_n - (f_{\max} - f) \Omega_0 (n+1) \right\}^{-1/2}. \quad (35)$$

Тотожним перетворенням за допомогою підстановки  $t = f/f_{\max}$  приведемо вираз (36) до такого вигляду:

$$x_{1,2} = \left( \frac{n+1}{2} \right)^{1/2} f_{\max}^{\frac{1}{2}(1-n)} \int_{a_{1,2}}^1 dt (1-t)^{-1/2} \left\{ A_n \sum_{i=0}^n t^i - f_{\max}^{-n} \Omega_0 (n+1) \right\}^{-1/2}, \quad (36)$$

де  $a_{1,2} \equiv f_{\min}^{(1,2)} f_{\max}^{-1}$ . З умови, щоб підкореневий вираз був додатним для всіх значень  $t$  (або ж рівним нулеві на нижній границі інтегрування), одержуємо співвідношення між параметрами  $f_{\min}^{1,2}$ ,  $\Omega_0$ ,  $f_{\max}$ :

$$A_n \left( 1 + \sum_{i=1}^n \left\{ f_{\min}^{(1,2)} f_{\max}^{-1} \right\}^i \right) \geq \Omega_0 (n+1) f_{\max}^{-n} \quad (37)$$

Покладаючи  $f_{\min}^{(1,2)} = 0$  або  $f_{\min}^{(1,2)} = f_{\max}$  бачимо, що  $A_n^{-1} \Omega_0 f_{\max}^{-n}$  змінюється від нуля до деякого значення, яке лежить у межах від  $(n+1)^{-1}$  до одиниці в залежності від величини  $f_{\min}^{(1,2)} / f_{\max}$ .

Виконаємо далі деякі оцінки, покладаючи  $f_{\min}^{(1,2)} = 0$  і вибираючи найбільшу частоту обертання

$$\Omega_0 = \frac{A_n}{n+1} f_{\max}^n. \quad (38)$$

У цьому випадку

$$x_1 = x_2 = \left( \frac{n+1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} f_{\max}^{\frac{1}{2}(1-n)} \int_0^1 dt \{t(1-t^n)\}^{-\frac{1}{2}}. \quad (39)$$

Розглянемо найбільш правдоподібний з точки зору формування зорі випадок  $n = 3$ . Побудуємо неперервний додатний розв'язок рівняння(29) в усій периферійній області, зшиваючи розв'язки (35), центровані у сусідніх точках  $\xi_0^*(m)$  ( де  $m = 1, 2, 3, \dots$ ), що описують окремі "солітони" при умові, що  $f_{\min}(x_2(m)) = f_{\min}(x_1(m+1)) = 0$ . Врахуємо також, що для  $m$ -го солітона  $x_1(m) = x_2(m)$  можуть бути співмірними з  $\xi_0^*(m)$ , але не можуть перевищувати цю величину.

З рівності (16) знаходимо, що в  $m$ -му солітоні

$$f_{\max}(m) \sim \frac{B}{\xi_0^*(m)}, \quad (40)$$

де  $B$  -деяка стала менша одиниці. З формули (40) одержуємо співвідношення

$$x_1(m) = x_2(m) \equiv x(m) = B \xi_m^0. \quad (41)$$

Зі співвідношення

$$\xi_0^*(m+1) = \xi_0^*(m) + x_m + x_{m+1} \quad (42)$$

впливає, що

$$\frac{\xi_0^*(m+1)}{\xi_0^*(m)} = \frac{1+B}{1-B} > 1. \quad (43)$$

Це якісно відповідає закону Тіцуса-Боде.

## 4 РОЗВ'ЯЗКИ ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ РІВНОВАГИ

З методичного погляду варто розглянути рівняння рівноваги при  $n = 1$ , бо в цьому випадку можна виконати строге розділення змінних у двовимірній задачі.



При  $n = 1$  рівняння (6) є лінійним неоднорідним рівнянням у частинних похідних. Надалі знак (\*) опускаємо. Введемо функцію

$$F(\xi, z) = y(\xi, z) - \Omega(\xi), \quad (44)$$

яка задовільняє лінійне однорідне двовимірне рівняння

$$\left\{ 1 + \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} + \frac{d^2}{dz^2} \right\} F(\xi, z) = 0. \quad (45)$$

В околі точки  $\xi_0$  розв'язок цього рівняння має такі природні граничні умови:

$$\begin{aligned} F(\xi_0, 0) &= y(\xi_0^*, 0) - \Omega(\xi_0); \\ \left. \frac{\partial F}{\partial \xi} \right|_{\xi_0, 0} &= 0; \quad \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{\xi_0, 0} = 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Лінійне рівняння (45) допускає стандартне розділення змінних

$$F(\xi, z) = Z(z)\Xi(\xi). \quad (47)$$

Підставляючи (47) у рівняння (45), одержуємо рівність

$$\Xi^{-1} \frac{d^2 \Xi}{d\xi^2} + (\xi \Xi)^{-1} \frac{d}{d\xi} \Xi + Z^{-1} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -1. \quad (48)$$

Якщо функція  $Z_\lambda(z)$  задовільняє рівняння

$$\frac{d^2 Z_\lambda}{dz^2} + \lambda Z_\lambda = 0, \quad (49)$$

то функція  $\Xi_\lambda(\xi)$  визначається рівнянням

$$\frac{d^2 \Xi_\lambda}{d\xi^2} + \xi^{-1} \frac{d \Xi_\lambda}{d\xi} + (1 - \lambda) \Xi_\lambda = 0, \quad (50)$$

розв'язком якого є функція Бесселя нульового порядку

$$\Xi_\lambda(\xi) = J_0(\xi\sqrt{1-\lambda}). \quad (51)$$

Оскільки  $\Xi_\lambda(\xi)$  і  $Z_\lambda(z)$  є дійсними функціями своїх аргументів, то параметр  $\lambda$  задовільняє нерівність  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Загальний розв'язок рівняння (49) є суперпозицією

$$F(\xi, z) = \int_0^1 d\lambda Z_\lambda(z) \Xi_\lambda(\xi). \quad (52)$$

Згідно з прийнятим наближенням дослідимо функцію  $y(\xi, z) = F(\xi, z) + \Omega(\xi)$  при великих значеннях змінної  $\xi = \xi_0 + x$ , використовуючи для функції  $J_0(\xi\sqrt{1-\lambda})$  асимптотичне представлення

$$J_0(\xi\sqrt{1-\lambda}) = J_0(\xi\sqrt{1-\lambda}) \sqrt{\frac{\xi_0}{x + \xi_0}} \left[ \cos(x\sqrt{1-\lambda}) + \frac{x\sqrt{1-\lambda}}{8\sqrt{1-\lambda}(x + \xi_0)} + \dots \right]. \quad (53)$$

Розв'язок рівняння (49) запишемо у вигляді суперпозиції

$$Z_\lambda(z) = A_1(\lambda) \cos(z\sqrt{\lambda}) + A_2(\lambda) \sin(z\sqrt{\lambda}), \quad (54)$$

де  $A_1(\lambda)$ ,  $A_2(\lambda)$  - довільні функції параметра  $\lambda$ .

Враховуючи асимптотику (54), виберемо їх у такому вигляді:

$$A_1(\lambda) = a_1 \left\{ J_0(\xi_0 \sqrt{1-\lambda}) \sqrt{\lambda(1-\lambda)} \right\}^{-1}, \quad (55)$$

$$A_2(\lambda) = a_2 \left\{ J_0(\xi_0 \sqrt{1-\lambda}) \sqrt{\lambda(1-\lambda)} \right\}^{-1}, \quad (56)$$

де  $a_1$  і  $a_2$  є сталими величинами, незалежними від  $\lambda$ . Загальний розв'язок рівняння (45) у цьому наближенні має таке зображення :

$$F(\xi, z) = \int_0^1 d\lambda \left[ a_1 \cos(z\sqrt{\lambda}) + a_2 \sin(z\sqrt{\lambda}) \right] \cdot \left( \frac{\xi_0}{(\xi_0 + x)\lambda(1-\lambda)} \right)^{1/2} \cdot \left[ \cos(x\sqrt{1-\lambda}) + \frac{\sin(x\sqrt{1-\lambda})}{8\sqrt{1-\lambda}(x + \xi_0)} \right], \quad (57)$$

де введено  $x = \xi - \xi_0$  для зручності. З умов (46) знаходимо, що

$$a_2 = 0, a_1 = \frac{1}{\pi} [y(\xi_0, 0) - \Omega(\xi_0)]. \quad (58)$$

Тому остаточний вираз для функції  $y(\xi, z)$  є таким:

$$y(\xi, z) = \Omega(\xi_0 + x) + [y(\xi_0, 0) - \Omega(\xi_0)] \left( \frac{\xi_0}{\xi_0 + x} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}\sqrt{1-\lambda}} \cos(z\sqrt{\lambda}) \left\{ \cos(x\sqrt{1-\lambda}) + \frac{\sin(x\sqrt{1-\lambda})}{8\sqrt{1-\lambda}(\xi_0 + x)} \right\}. \quad (59)$$

Ми одержали відокремлений розв'язок рівняння рівноваги, що має форму тора з радіусом  $\xi_0$ . Розподіл речовини у радіальному перерізі тора описує функція  $y(\xi_0 + x, z)$ . Асимптотика цієї функції при малих значеннях  $|x|$ ,  $|z|$  є такою:

$$y(\xi_0 + x, z) = y(\xi_0, 0) \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}\sqrt{1-\lambda}} \cos(z\sqrt{\lambda}) \cos(x\sqrt{1-\lambda}). \quad (60)$$

Це симетрична функція змінних  $x$  і  $z$ . Функція (59) приймає фізичні (додатні) значення всередині деякого контура  $L$ . У наближенні (57) цей контур є колом, радіус якого близький до  $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ . У наближенні (57) явно не фігурує частота обертання  $\Omega(\xi)$ . Вона виступає у виразі (60), тому у цьому наближенні переріз тора є еліпсоподібний, витягнутий вздовж осі  $\xi$  (вздовж радіуса), а розподіл речовини на перерізі тора залежить від напрямку. Це ілюструє рисунок 1 на якому зображено  $y(\xi_0 + x, z)$  та контур  $L$ , що визначається рівнянням  $y(\xi_0 + x_1, z) = 0$  при різних значеннях  $\Omega(\xi_0)$

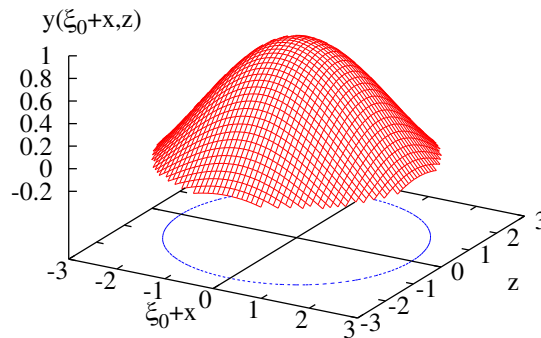


Рис. 1: Розподіл речовини на перерізі тора обчислений за формулою (60)

## ВИСНОВКИ І ОБГОВОРЕННЯ

Обертання зір і протопланетних дисків є атрибутом їх існування. Однак питання про вплив обертання на еволюцію протопланетної хмари все ще залишається дискусійним [9]. Ця задача пов'язана з фрагментацією газопилової хмари, утворенням кратних зір і планетних систем. Ранні числові розрахунки у рамках гідродинамічного підходу давали суперечливі результати. У більшості робіт приймалося, що початкові конфігурації мають постійну густину і сталу кутову швидкість. Поява піку густини у центрі і скупчення речовини в кільцеподібній області на периферії було одержано в роботах Ларсона. Утворення кільцевої структури всередині протозорі було підтверджено незалежними числовими розрахунками Блека і Боденгаймера. Однак у числових розрахунках Чарнутера поява кільцевої структури не була підтверджена (відсутність фрагментації диску). Пізніше Боденгаймер і Чарнутер повідомили, що їх цілком різні програми приводять до подібних, хоч і не ідентичних результатів [13]. Головний їх висновок - утворення кільцеподібних структур у колапсуючих хмарах дійсно спостерігається. У роботі [14] було показано, що утворення кільцевої структури неможливе при твердотільному обертанні, а лише при диференціальному. Цей висновок був підтверджений у роботі [15].

У рамках рівняння рівноваги ми встановили можливість фрагментації у моделі протопланетного диску, основна доля маси якого зосереджена у центрі, що відповідає початковій фазі утворення планетної системи навколо окремої зорі. Умовою існування локалізованого розв'язку, а тим більше розвинутої кільцевої структури є диференціальне обертання з невеликою кутовою швидкістю, яка монотонно спадає вздовж радіуса диску. Кільцева структура диску узгоджується із законом Тіціуса-Боде. Одержані результати підтверджують основні висновки робіт [13-15], виконаних у рамках гідродинамічного підходу. Фрагментація у розглянутій моделі газопилового диску відповідає спостережуваному даним щодо існування супутників у зір спектральних класів, старших за F5, структури планет у Сонячній системі і позасонячних системах, структури супутникових орбіт біля планет-гігантів. Ми одержали наближені аналітичні розв'язки рівняння Лена-Емдена, замінюючи величину  $\Omega(\xi^*)$  у рівнянні (6) її середнім значенням  $\Omega(\xi_0^*)$ . Точніше врахування залежності  $\Omega(\xi)$  на

характер розв'язків можна виконати або за теорією збурень, або ж шляхом розв'язання рівняння (6) числовими методами, використовуючи одержані вище аналітичні розв'язки як нульове наближення.

### Список використаної літератури

1. *R.P. Butler, S.S. Vogt, G.W. Marcy et al.*, *Astroph. J.* **545**, 504 (2000).
2. *R.P. Butler, S.S. Vogt, G.W. Marcy et al.* (<http://exoplanets.org/stats2000.ps>).
3. *G.W. Marcy*, *Extrasolar Planets Catalog* (<http://exoplanets.org>) (2006).
4. *J. Schneider, C.R. Acad. Sci. Paris* **327**, 621 (1999).
5. *J. Schneider*, *Extrasolar Planets Encyclopedia* (<http://exoplanets.org>).
6. *М.В. Ваврух, Н.Л. Тишко, І. Прунчак*, *Журн. фіз. досл.* **6**, 414, (2013).
7. *М. М. Ньето* Закон Тициуса-Бодде (М.: Мир, 1976).
8. *А. Баранский*, *Вселенная, пространство, время.* №1, 40, (2004).
9. *Ж.-Л. Тассуль* Теория вращающихся звезд (М.: Мир, 1982).
10. *Ш. Чандрасекхар* Введение в учение о строении звезд (М.: Изд. иностр. лит., 1950).
11. *С. Шапиро, С. Тьюколски* Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды (М.: Мир, 1985).
12. *М. Абрамовица, И. Стиган* Справочник по специальным функциям (М.: Наука, 1979).
13. *P. Bodenheimer, W. Tscharnuter*, *A&A.* **74**, 288, (1979).
14. *Y. Kamiiya*, *Progr. Theor. Phys.* **58**, 802, (1977).
15. *M. L. Norman, J. R. Wilson, R. T. Barton*, *Astroph. J.* **239**, 968 (1980).

Стаття надійшла до редакції 10.10.2014

прийнята до друку 9.11.2014

## THE COMPUTATION OF THE PROTOPLANET DISC CONFIGURATION VIA LANE-EMDEN EQUATION

N. Tyshko, I. Prunchak

*Ivan Franko National University of Lviv  
Kyrylo and Mefodiy St., 8, 79005 Lviv, Ukraine*

We have investigated the equilibrium distribution of the matter for the model of the rotating protoplanet gas-dusty disc using the Lane-Emden equation in the approach of the polytropic dependence between pressure and density. We have obtained the new kind of solutions of the equation that are similar to solitons. On this ground we constructed general, continuous and positive solution of the equation that describes the distribution of the fragmented disc's matter via Titius-Bode's law.

**Key words:** protoplanet gas-dusty disc, Lane-Emden-Fowler's equation, Titius-Bode's law.

## РАСЧЕТ КОНФИГУРАЦИИ ПРОТОПЛАНЕТНОГО ДИСКА ПРИ ПОМОЩИ УРАВНЕНИЯ ЛЕЙНА-ЕМДЕНА

Н.Тышко, И. Прунчак

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко  
ул. Кирилла и Мефодия 8, 79005 Львов, Украина*

При помощи уравнения Лейна-Эмдена исследовано равновесное распределение материи в модели, описывающей начальную фазу формирования планетной системы из протопланетного диска с дифференциальным вращением в приближении политропного уравнения состояния. Найден новый класс решений, имеющих характер солитонов. Построено общее, непрерывное и положительное решение, описывающее распределение материи фрагментированного диска и качественно соответствующее закону Тициуса-Бодэ.

**Ключевые слова:** протопланетный газово-пылевой диск, закон Тициуса-Бодэ, уравнение Лейна-Эмдена.