

УДК 524.31.084
PACS 97.10.Cv,97.20.Rp

ТРИФАЗНА МОДЕЛЬ У ТЕОРІЇ ВИРОДЖЕНИХ КАРЛИКІВ

М. Ваврух, Н. Тишко, С. Смеречинський

*Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Кирила і Мефодія, 8, 79005 Львів, Україна
e-mail: mvavrukh@gmail.com*

Запропоновано багатопараметричну модель маломасивного гарячого виро-
дженого карлика, яка узагальнює моделі, розглянуті авторами в попередніх
роботах, і дозволяє рівноправно враховувати вплив двох важливих факто-
рів, що формують структуру цих об'єктів, а саме – неповного виро-
дження електронної підсистеми ядра та залежного від координат його хімічного
складу. На основі рівняння механічної рівноваги розраховано макроскопі-
чні характеристики (маса, радіус, повна енергія) карлика з неізотермічним
ядром та розподіл термодинамічних параметрів вздовж радіуса. Виконано
порівняння з результатами попередніх робіт авторів, у яких враховувались
або неповне електронне виро-
дження, або змінний хімічний склад.

Ключові слова: маломасивні гарячі виро-
джені карлики, рівняння рівно-
ваги, хімічний потенціал

1 Вступ

Виро-
джені карлики відносяться до одного з найпоширеніших типів зоряного на-
селення [1,2]. У першій половині минулого століття Чандрасекаром [3–5] була розро-
блена теорія холодних масивних виро-
дженних карликів, що ґрунтувалася на рівнянні
стану ідеального релятивістського виро-
дженого електронного газу при $T = 0$ К з
однорідним хімічним складом. Протягом останнього двадцятиріччя за допомогою
космічних лабораторій відкрито карлики з широким спектром характеристик – за
масою, розмірами, світністю та ефективною температурою фотосфери [6–8]. У зв'яз-
ку з цим актуальною є задача побудови реалістичніших моделей, які узагальнюють
модель Чандрасекара шляхом врахування додаткових факторів, що формують стру-
ктуру цих об'єктів – неповного електронного виро-
дження, залежного від координат
хімічного складу, міжчастинкових взаємодій, обертання та магнітних полів.

У наших попередніх роботах [9–11] були запропоновані моделі, що узагальню-
ють стандартну модель Чандрасекара і ґрунтуються на рівнянні стану ідеального
релятивістського електронного газу при відмінних від нуля температурах при одно-
рідному хімічному складі, а також модель зі змінним хімічним складом при абсо-
лютному нулі температури. Вперше розв'язано обернену задачу теорії виро-
дженних

карликів – на основі мас, радіусів та світностей великого числа спостережуваних карликів знайдено параметри моделей (значення параметра релятивізму в центрі зорі, центральних температур ядер, параметр хімічного складу). Запропоновано інтерпретацію розподілу карликів за їхніми характеристиками.

Метою цієї роботи є такий варіант теорії вироджених карликів, який дозволяє одночасно враховувати вплив двох найважливіших факторів – неповного електронного виродження і змінного вздовж радіуса хімічного складу на характеристики цих об'єктів. Такого підходу в першу чергу вимагають маломасивні гарячі карлики, які мають високі ефективні температури (аж до 10^5 К, див. напр. [6]) та суттєво неоднорідний хімічний склад.

При розв'язанні рівняння механічної рівноваги ядра застосовано рівняння стану релятивістського ідеального електронного газу без використання розкладів Зоммерфельда [12] та модель неізотермічного ядра зі змінним хімічним складом. Як і в наших попередніх роботах, ядерна підсистема ядра описується як статичне неперервне середовище. У рамках цієї моделі досліджено вплив згаданих факторів на характеристики ядра.

2 Основні співвідношення

Узагальнюючи моделі робіт [9–11], співставимо виродженому карлику радіуса R сферично-симетричну модель, зображену на рисунку 1. У центральній частині ядра (область 1) електронна підсистема сильно вироджена, тому там застосовне наближення ізотермічності ($T(r) = T_c$ при $0 \leq r \leq R_c$), що зумовлено механізмом теплопровідності металічного типу. Структура цієї області визначається рівнянням механічної рівноваги при нульовому градієнті температури і світлового тиску, а градієнт тиску ідеального релятивістського електронного газу при заданій температурі визначається густиною електронів і градієнтом хімпотенціалу

$$\frac{dP_e(r)}{dr} = \frac{d\mu(r)}{dr} n(r) - \frac{1}{\beta(r)} \frac{d\beta(r)}{dr} \frac{8\pi}{3h^3} \times \int_0^\infty dp n_p(r) \frac{d}{dp} \{p^3 [E_p - \mu(r)]\}; \quad (1)$$

$$n(r) \equiv \frac{8\pi}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 n_p(r).$$

Тут використано такі позначення: $P_e(r)$ – локальний тиск електронного газу на сфері радіуса r , $\mu(r)$ – локальний хімпотенціал, $\beta(r)$ – обернена температура, $n(r)$ – концентрація електронів на цій сфері, $n_p(r)$ – розподіл Фермі для електронів зі спектром $E_p = (p^2 c^2 + m_0^2 c^4)^{1/2} - m_0 c^2$.

В області 1' відбувається перехід від виродженого стану електронної підсистеми до невиродженого, у зв'язку з чим змінюється механізм теплопровідності, а тому градієнт температури стає відмінним від нуля. З метою наближеного опису цієї перехідної зони будемо моделювати розподіл температури вздовж радіуса однопара-

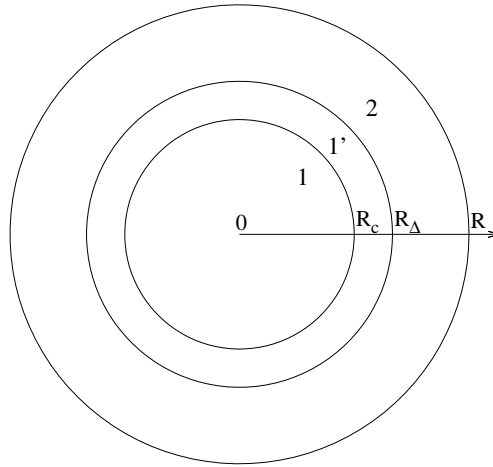


Рис. 1: Трифазна модель виродженого карлика.

метричною функцією

$$T(r) = T_c \left\{ 1 + \gamma \left(\frac{r - R_c}{R_\Delta} \right)^2 \right\}^{-1}, \quad (2)$$

де γ – невідомий параметр, $R_c \leq r \leq R_\Delta$. Згідно з умовою неперервності температури на сфері радіуса R_c

$$\begin{aligned} T(R_c - \delta) &= T(R_c + \delta), \\ \left. \frac{dT(r)}{dr} \right|_{r=R_c - \delta} &= \left. \frac{dT(r)}{dr} \right|_{r=R_c + \delta} = 0; \\ P_e(R_c - \delta) &= P_e(R_c + \delta), \\ \left. \frac{dP_e}{dr} \right|_{r=R_c - \delta} &= \left. \frac{dP_e}{dr} \right|_{r=R_c + \delta} = \left(n(r) \frac{d\mu}{dr} \right) \Big|_{r=R_c}. \end{aligned} \quad (3)$$

при $\delta \rightarrow +0$.

Згідно з механізмом гравітаційної диференціації речовини ядра ефективну електронну молекулярну масу будемо моделювати функцією

$$\mu_e(r/R_\Delta) = \mu_e t(r/R_\Delta), \quad 0 \leq r \leq R_\Delta, \quad (4)$$

де $\mu_e \equiv \mu_e(0)$, $t(0) = 1$, $t(1) < 1$. У практичних розрахунках використаємо функцію

$$t_1(x) = [1 + \alpha x^2]^{-1}, \quad (5)$$

за аналогією з роботою [9], у якій розглядалась модель холодного карлика зі змінним хімічним складом.

Радіус виродженої частини ядра R_c визначимо умовою $\mu(R_c) = 0$. У перехідному шарі (область 1') електронна підсистема знаходиться на грані виродження

($\mu(r) < 0$), тому зовнішній радіус цього шару знайдемо з умови зникання виродження $\exp\{-\beta(R_\Delta)\mu(R_\Delta)\} \gg 1$, тобто $\beta(R_\Delta)\mu(R_\Delta) = -C$, де C – додатня стала. У конкретних розрахунках в роботі [11] використано значення $C = e$.

Для опису периферійної області 2 використаємо рівняння стану політропного типу згідно з формулами:

$$\begin{aligned} P(r) &= D T^{1+n}(r), \\ \rho(r) &= D T^n(r) \frac{\mu_* m_u}{k_B}, \end{aligned} \quad (6)$$

де $\mu_* = \mu/m_u$ – безрозмірна молекулярна маса, m_u – атомна одиниця маси. Сталу D у цих співвідношеннях визначимо з умови рівності тисків на внутрішній границі периферійної області:

$$P_e(R_\Delta) + P_\Phi(R_\Delta) = D T^{1+n_*}(R_\Delta), \quad (7)$$

де $P_\Phi(R_\Delta) = \frac{a}{3} T^n(R_\Delta)$ – світловий тиск на границі ядра. Прирівнюючи градієнти тиску зліва і справа від точки $r = R_\Delta$, одержуємо співвідношення

$$\left. \frac{d}{dr} (P_e(r) + P_\Phi(r)) \right|_{r=R_\Delta-\delta} = D(1+n_*) T^{n_*}(R_\Delta) \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R_\Delta+\delta}, \quad (8)$$

$\delta \rightarrow +0$. З іншого боку

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R_\Delta-\delta} = -2\gamma T_c \frac{R_\Delta - R_c}{R_\Delta^2} \left\{ 1 + \gamma \left(\frac{R_\Delta - R_c}{R_\Delta} \right)^2 \right\}^{-2}, \quad (9)$$

Покладаючи $\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R_\Delta-\delta} = \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R_\Delta+\delta}$, одержуємо рівність

$$\begin{aligned} \{P_e(r) + P_\Phi(r)\}^{-1} \left. \frac{d}{dr} \{P_e(r) + P_\Phi(r)\} \right|_{R=R_\Delta} &= -2\gamma(1+n_*) \frac{R_\Delta - R_c}{R_\Delta^2} \times \\ \times \left\{ 1 + \gamma \left(\frac{R_\Delta - R_c}{R_\Delta} \right)^2 \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (10)$$

з якої визначається параметр γ за відомими R_c і R_Δ .

Рівняння механічної рівноваги в області 2 зводиться до рівняння, що визначає розподіл температури,

$$(1+n_*) \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left\{ r^2 \frac{dT}{dr} \right\} = -4\pi G D \left(\frac{\mu_* m_u}{k_B} \right)^2 T^{n_*}(r), \quad (11)$$

причому $T(R) = 0$ (або ж $T(R) = T_{eff}$), а $\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R_\Delta+\delta}$ збігається з правою стороною рівняння (9).

Таким чином, у моделі, що тут розглядається, фігурують параметри

$$x_0, T_c, \mu_e(0), \alpha, \gamma, D, n_*, \mu_*. \quad (12)$$

Параметр $\mu_e(0)$ змінюється у дуже вузькому інтервалі біля значення $\mu_e(0) = 2.0$; параметр n_* приймаємо рівним 3.0 (див. [11]); μ_* використаємо таке, що відповідає хімічному складу Сонця; вище описано, яким чином визначаються параметри D і γ . Отже, залишаються три параметри – параметр релятивізму в центрі зорі x_0 , центральна температура T_c і параметр α , який моделює хімічний склад (див. ф. (5)). Знаходження цих параметрів для конкретного карлика можливе за відомими зі спостережень його масою, радіусом і світністю (або ефективною температурою фотосфери).

Запропонована модель узагальнює всі часткові моделі, що розглядалися у роботах [9–11].

3 Рівняння механічної рівноваги ядра

В ізотермічній області ядра рівняння рівноваги між тиском електронного газу та гравітаційним стиском зорі зводиться до диференціального рівняння другого порядку для хімічного потенціалу $\mu(r)$ [11]

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left\{ \frac{r^2}{t(r/R_\Delta)} \cdot \frac{d\mu}{dr} \right\} = -\frac{32\pi^2}{h^3} G(m_u \mu_e)^2 t(r/R_\Delta) \int_0^\infty dp p^2 n_p(r), \quad (13)$$

інтеграл у правій частині якого залежить від $\mu(r)$ як від параметра.

При строгому описі області 1' слід враховувати градієнт світлового тиску, що приводить до заміни $\frac{dP_e(r)}{dr}$ на $\frac{d}{dr} \left(P_e(r) + \frac{a}{3} T^4(r) \right)$ у рівнянні рівноваги, яке набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left\{ \frac{r^2}{t(r/R_\Delta)} \cdot \frac{d\mu}{dr} \right\} &= -32\pi^2 \frac{G(m_u \mu_e)^2}{h^3} t(r/R_\Delta) \int_0^\infty dp p^2 n_p(r) + \\ &+ \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left\{ \frac{r^2}{t(r/R_\Delta)} V(\mu(r)) \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Тут введено такі позначення:

$$\begin{aligned} V(\mu(r)) &= -\frac{4a}{3} T^3(r) n^{-1}(r) \frac{dT}{dr} + \frac{1}{T(r)} \cdot \frac{dT}{dr} W(\mu(r)); \\ W(\mu(r)) &= \frac{1}{3} n^{-1}(r) \frac{8\pi}{h^3} \int_0^\infty dp n_p(r) \frac{d}{dp} \{ p^3 (E_p - \mu(r)) \} = \\ &= \left\langle E_p - \mu(r) + \frac{p}{3} \cdot \frac{dE_p}{dp} \right\rangle_p, \end{aligned} \quad (15)$$

де символ $\langle \dots \rangle_p$ означає засереднення за змінною p з ваговою функцією $p^2 n_p(r)$,

тобто

$$\begin{aligned} \langle A_p \rangle_p &= \left\{ \int_0^\infty dp p^2 n_p(r) \right\}^{-1} \int_0^\infty dp p^2 n_p(r) A_p, \\ n_p(r) &= \{1 + \exp[\beta(r)(E_p - \mu(r))]\}^{-1}, \\ \beta(r) &= (k_B T_c)^{-1} \left\{ 1 + \gamma \left(\frac{r - R_c}{R} \right)^2 \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (16)$$

Надалі будемо розглядати лише рівняння (14), маючи на увазі, що в області 1 функція $V(\mu(r)) = 0$. Перейдемо до безрозмірних змінних за співвідношеннями

$$r = \lambda_1 \xi, \quad \mu(r) = \mu(0) y_1(\xi), \quad p = z m_0 c, \quad (17)$$

де λ_1 – масштаб довжини, $\mu_0 \equiv \mu(r)$ при $r = 0$, $y_1(\xi)$ – безрозмірна функція. Визначаючи λ_1 умовою

$$\frac{32\pi^2}{3(\hbar c)^3} G[\lambda_1 m_u m_0 c^2 \mu_e \mu_0^*]^2 = 1, \quad (18)$$

зведемо рівняння (14) до безрозмірної форми

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi^2} \cdot \frac{d}{d\xi} \left\{ \frac{\xi^2}{t(\xi/\xi_\Delta)} \cdot \frac{dy_1}{d\xi} \right\} &= -\frac{3t(\xi/\xi_\Delta)}{(\mu_0^*)^3} \int_0^\infty dz z^2 n_z(\xi) + \\ &+ \frac{1}{\xi^2} \cdot \frac{d}{d\xi} \left\{ \frac{\xi^2}{t(\xi/\xi_\Delta)} v(\xi) \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

У цьому рівнянні $0 \leq \xi \leq \xi_\Delta = R_{\Delta/\lambda_1}$, $v(r) = 0$ при $0 \leq \xi \leq \xi_c \equiv R_c/\lambda_1$, а при $\xi_c \leq \xi \leq \xi_\Delta$

$$\begin{aligned} v(\xi) &= \frac{4}{15} \pi^4 \left(\frac{T_c^*}{\mu_0^*} \right)^4 f^{-5}(\xi) \frac{df}{d\xi} \left\{ \frac{3}{(\mu_0^*)^3} \int_0^\infty dz z^2 n_z(\xi) \right\} - f^{-1}(\xi) \frac{df}{d\xi} W(\xi); \\ W(\xi) &= \langle (\mu_0^*)^{-1} [(1 + z^2)^{1/2} - 1 + 2/3 z^2 (1 + z^2)^{-1/2} - y_1(\xi)] \rangle_z; \\ \langle A_z \rangle_z &\equiv \left\{ \int_0^\infty dz z^2 n_z(\xi) \right\}^{-1} \int_0^\infty n_z(\xi) A_z z^2 dz; \\ n_z(\xi) &= \{1 + \exp[\beta_c^* ((1 + z^2)^{1/2} - 1 - \mu_0^* y_1(\xi))]\}^{-1} \end{aligned} \quad (20)$$

при $0 \leq \xi \leq \xi_c$;

$$\begin{aligned} n_z(\xi) &= \{1 + \exp[\beta_c^* f(\xi) ((1 + z^2)^{1/2} - 1 - \mu_0^* y_1(\xi))]\}^{-1} \\ f(\xi) &= 1 + \gamma \left(\frac{\xi - \xi_c}{\xi_\Delta} \right)^2; \quad \beta_c^* = \beta_c m_0 c^2 \end{aligned} \quad (21)$$

при $\xi_c \leq \xi \leq \xi_\Delta$. Рівняння (19) задовольняє граничну умову в нулі

$$y_1(0) = 1, \quad \left. \frac{dy_1}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0. \quad (22)$$

Величина ξ_c визначається з умови $y_1(\xi) = 0$, а границя розділу областей ξ_Δ визначається умовою

$$y_1(\xi_\Delta) = -CT_c^*[\mu_0^* f(\xi_\Delta)]^{-1}. \quad (23)$$

Величина μ_0^* є коренем рівняння

$$3 \int_0^\infty dz z^2 \{1 + \exp[\beta_c^* ((1 + z^2)^{1/2} - 1 - \mu_0^*)]\}^{-1} = x_0^3. \quad (24)$$

Рівняння (19) і (24) розв'язуються чисельним методом. Оскільки μ_0^* залежить від параметрів x_0 і $T_c^* = (\beta_c^*)^{-1}$, то рівняння (19) також залежить від цих параметрів, а також від α та γ і є чотирипараметричним. Рисунок 2 ілюструє залежність μ_0^* від безрозмірної температури T_c^* при фіксованому x_0 .

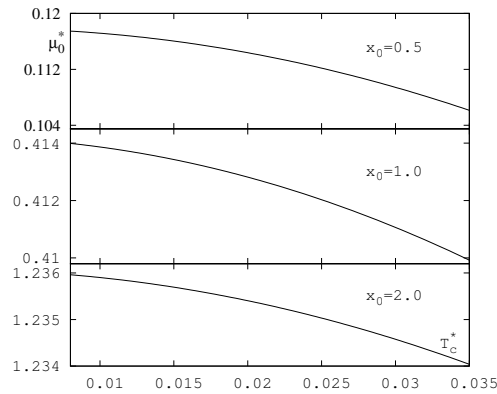


Рис. 2: Залежність безрозмірного хімічного потенціалу в центрі зорі від безрозмірної центральної температури для трьох значень параметра x_0 .

При розв'язуванні рівняння (19) за нульове наближення було вибрано розв'язок при $v(\xi) = 0$ на відрізку $0 \leq \xi \leq \xi_\Delta$. Характер розв'язків ілюструє рисунок 3, на якому наведено сім'ю кривих при фіксованих значеннях параметрів x_0 , $\alpha = 0.5$ і $\gamma = 0.5$ для температур в інтервалі $5 \cdot 10^7 \text{ K} \leq T_c \leq 2 \cdot 10^8 \text{ K}$. Із рисунка видно, що температурні ефекти відіграють важливу роль в області малих значень параметра релятивізму x_0 і стають слабкими з ростом цього параметра.

Рисунок 4 дає змогу проаналізувати вплив температури та неоднорідності хімічного складу на розв'язки рівняння рівноваги. На ньому зображено криві, отримані авторами у рамках різних моделей (див. [9–11]): крива 1 відповідає моделі, розглянутій в даній роботі, що одночасно враховує неповне виродження електронної підсистеми (центральна температура рівна $5 \cdot 10^7 \text{ K}$) та неоднорідність хімічного складу ядра виродженого карлика (параметр, що задає розподіл хімічного складу вздовж радіуса $\alpha = 0.5$); крива 2 – моделі з ізотермічним ядром (та ж центральна температура, що і для кривої 1) і однорідним хімічним складом; крива 3 – моделі абсолютно холодного виродженого карлика із неоднорідним хімічним складом (параметр α , такий самий, як і у випадку кривої 1); точки відповідають стандартній

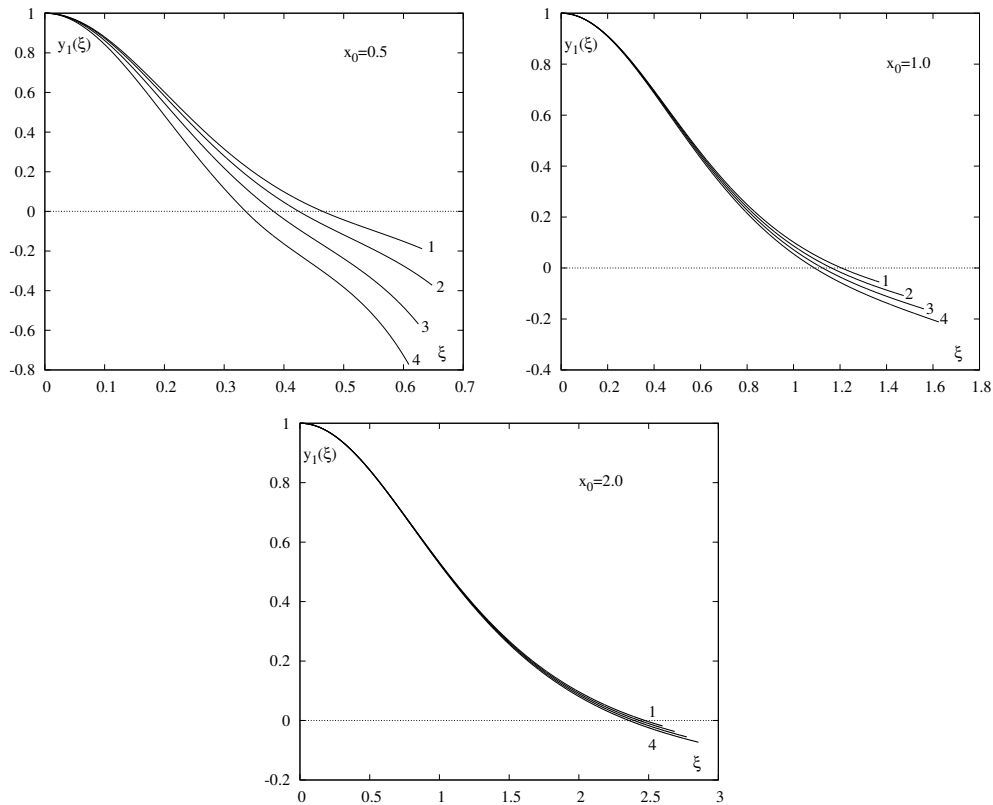


Рис. 3: Сімейство розв'язків рівняння (19) при фіксованих значеннях параметра релятивізму в центрі зорі: крива 1 відповідає $T_c = 5 \cdot 10^7$ К, 2 – $T_c = 1 \cdot 10^8$ К, 3 – $T_c = 1.5 \cdot 10^8$ К, 4 – $T_c = 2 \cdot 10^8$ К.

моделі Чандрасекара (однорідний хімічний склад при $T_c = 0$ К). У випадку $x_0 = 1.0$ крива 1 близька до кривої 3, оскільки при даній температурі неповне виродження не є значущим, на відміну від випадку $x_0 = 0.5$, коли одночасно важливими є обидва фактори.

Рисунок 5 зображає залежність ξ_Δ від параметра x_0 при фіксованих T_c , $\alpha = 0.5$, $\gamma = 0.5$. Пунктирна крива зображає залежність ξ_c від параметрів x_0 , T_c^* . Криві 1 відповідають $T_c = 2 \cdot 10^7$ К, 2 – $T_c = 2 \cdot 10^8$ К. Як видно з рисунків, збільшення температури приводить до зростання радіуса ядра при одночасному зменшенні радіуса його ізотермічної частини. При досить малих значеннях x_0 і відмінних від нуля температурах виродження у центрі ядра зникає.

Рисунок 6 ілюструє залежність товщини перехідного шару (область 1' на рис. 1) при $\gamma = 0.5$ від параметра x_0 при фіксованих значеннях центральних температур: 1 – $T_c = 5 \cdot 10^7$ К, 2 – $T_c = 1 \cdot 10^8$ К, 3 – $T_c = 2 \cdot 10^8$ К. Для порівняння приведені відповідні криві з роботи [11], що відповідають моделям із тими самими центральними температурами, проте із однорідним хімічним складом. Порівняння цих моделей

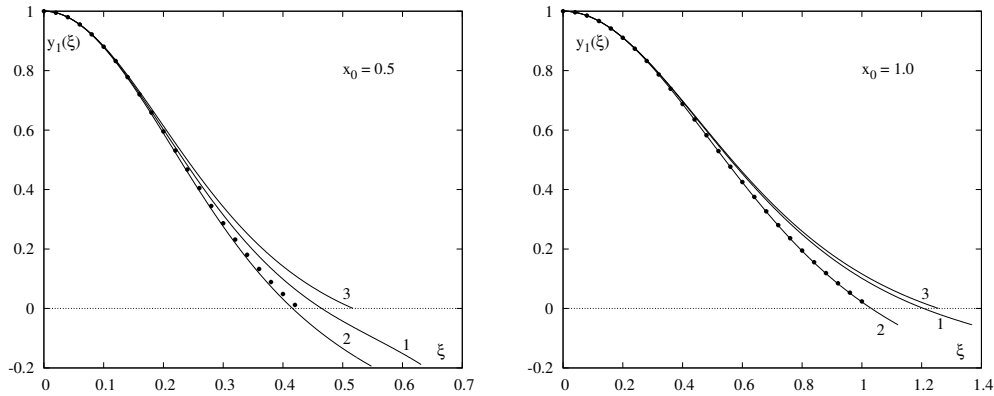


Рис. 4: Розв'язки рівняння рівноваги при двох значеннях параметра x_0 для різних моделей: крива 1 - одночасне врахування неповного виродження електронної підсистеми ($T_0 = 5 \cdot 10^7$ К, $\gamma = 0.5$) та неоднорідності хімічного складу ($\alpha = 0.5$); крива 2 - ізотермічне ядро з температурою $T_0 = 5 \cdot 10^7$ К і сталим хімічним складом [11]; 3 - абсолютно холодний карлик із неоднорідним хімічним складом ($\alpha = 0.5$) [9]; точкам відповідає розв'язок стандартної моделі Чандрасекара (див. напр. [9]).

вказує на те, що врахування неоднорідності хімічного складу, як і ріст центральної температури, призводить до збільшення товщини перехідного шару в ядрі виродженого карлика.

Величина $\xi_\Delta \equiv \xi_\Delta(x_0, T_c^*, \alpha, \gamma)$ визначає залежність радіуса ядра від параметрів моделі,

$$R_\Delta(x_0, T_c^*, \alpha, \gamma) = \lambda_1 \xi_\Delta(x_0, T_c^*, \alpha, \gamma) = \frac{R_0}{\mu_e \mu_0^*} \xi_\Delta(x_0, T_c^*, \alpha, \gamma). \quad (25)$$

Масу ядра визначає розв'язок рівняння (19)

$$M_\Delta(x_0, T_c^*, \alpha, \gamma) = 4\pi \int_0^{R_\Delta} dr r^2 \rho(r) = \frac{M_0}{\mu_e^2} \int_0^{\xi_\Delta} d\xi \xi^2 t(\xi/\xi_\Delta) \left\{ \frac{3}{(\mu_0^*)^3} \int_0^\infty dz z^2 n_z(\xi) \right\}. \quad (26)$$

Середнє значення кінетичної енергії електронної підсистеми ядра також є двократним інтегралом,

$$E_{kin}^\Delta(x_0, T_c^*, \alpha, \gamma) = \frac{E_0}{\mu_e^3} \int_0^{\xi_\Delta} d\xi \xi^2 \left\{ \frac{3}{(\mu_0^*)^3} \int_0^\infty dz z^2 n_z(\xi) [(1+z^2)^{1/2} - 1] \right\}, \quad (27)$$

де $E_0 = GM_0^2/R_0$. Повне число електронів у ядрі дорівнює

$$N_\Delta(x_0, T_c^*, \alpha, \gamma) = 4\pi \int_0^{R_\Delta} dr r^2 n(r) = (m_u \mu_e)^{-1} M_\Delta(x_0, T_c^*, \alpha, \gamma). \quad (28)$$

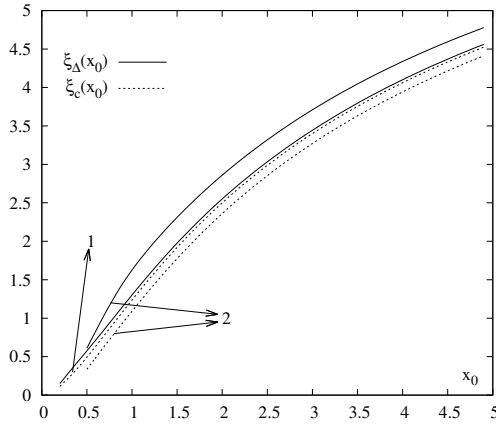


Рис. 5: Залежність розмірів ядра карлика ξ_Δ (суцільні криві), а також його ізотермічної частини ξ_c (пунктирні криві) від параметра x_0 . Криві 1 відповідають $T_c = 2 \cdot 10^7$ К, 2 – $T_c = 5 \cdot 10^7$ К, 3 – $T_c = 2 \cdot 10^8$ К.

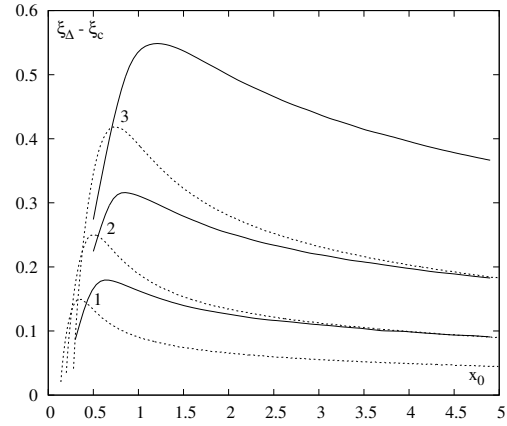


Рис. 6: Залежність товщини перехідного шару (при $\gamma = 0.5$) від параметра x_0 при фіксованих значеннях центральних температур: 1 – $T_c = 2 \cdot 10^7$ К, 2 – $T_c = 5 \cdot 10^7$ К, 3 – $T_c = 2 \cdot 10^8$ К. Пунктирні криві відповідають результатам роботи [11].

Використовуючи рівняння (19), енергію гравітаційної взаємодії речовини ядра також зобразимо у вигляді

$$E_{grav}^\Delta(x_0, T_c^*, \alpha, \gamma) = -\frac{1}{2} G \int \int_{|\mathbf{r}_i| < R_\Delta} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \rho(r_1) \rho(r_2) |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| =$$

$$= \frac{3E_0}{\mu_e^3 (\mu_0^*)^2} \int_0^{\xi_\Delta} d\xi \xi^3 \left[\frac{dy_1}{d\xi} - v(\xi) \right] \int_0^\infty dz z^2 n_z(\xi). \quad (29)$$

Через це середнє значення повної енергії ядра (із врахуванням енергії спокою електронів та енергії фотонної підсистеми E_Φ) зображається у такому вигляді:

$$\tilde{E}_\Delta(x_0, T_c^*, \alpha, \gamma) = E_{kin}^\Delta + E_{grav}^\Delta + N_\Delta m_0 c^2 + E_\Phi =$$

$$= \frac{3E_0}{\mu_e^3 (\mu_0^*)^3} \int_0^{\xi_\Delta} d\xi \xi^2 \int_0^\infty dz z^2 n_z(\xi) \left\{ (1 + z^2)^{1/2} + \xi \mu_0^* \left[\frac{dy_1}{d\xi} - v(\xi) \right] \right\} + E_\Phi; \quad (30)$$

$$E_\Phi = a \int T^4(r) d\mathbf{r} = \frac{E_0}{(\mu_e \mu_0^*)^3} \frac{(\pi T_c^*)^4}{15} \left\{ \xi_c^3 + 3 \int_{\xi_c}^{\xi_\Delta} d\xi \xi^2 \left[1 + \gamma \left(\frac{\xi - \xi_x}{\xi_\Delta} \right)^2 \right]^{-4} \right\}.$$

Залежність маси ядра від параметра x_0 при фіксованих $T_c, \alpha = 0.5, \gamma = 0.5$ зображено на рис. 7, а залежність $\tilde{E}_\Delta(x_0, T_c^*, \alpha, \gamma)$ від тих же параметрів – на рис. 8. В обох випадках ріст температури призводить до росту характеристики в області малих x_0 і до її спаду в області більших значень цього параметра.

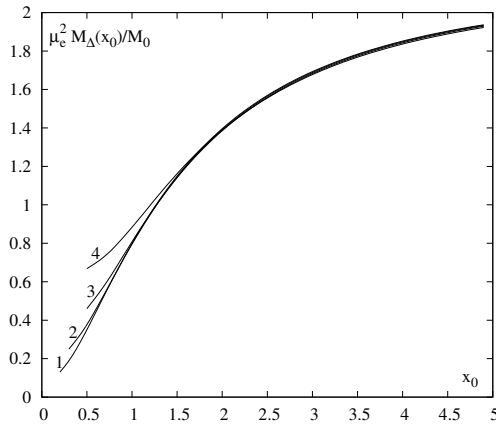


Рис. 7: Залежність маси ядра M_D від параметра x_0 при фіксованих значеннях центральної температури: крива 1 відповідає $T_c = 2 \cdot 10^7$ К, 2 – $T_c = 5 \cdot 10^7$ К, 3 – $T_c = 1 \cdot 10^8$ К, 4 – $T_c = 2 \cdot 10^8$ К. Для всіх кривих $\alpha = 0.5$, $\gamma = 0.5$.

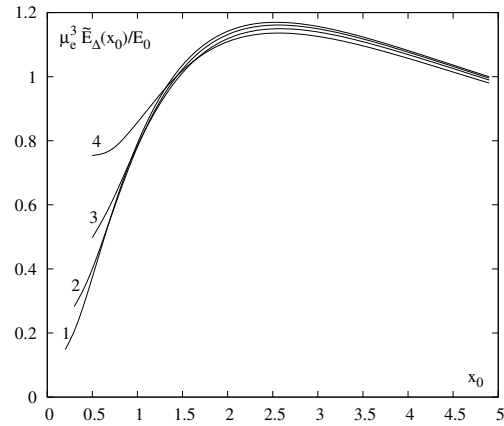


Рис. 8: Залежність повної енергії ядра \tilde{E}_D від параметра x_0 при фіксованих значеннях центральної температури. Індекси відповідають тим самим температурам, що і на попередньому рисунку.

На рисунку 9 зображено масу ядра карлика, розраховану при двох значеннях центральних температур (крива 1 – $T_c = 2 \cdot 10^7$ К, 2 – $T_c = 1 \cdot 10^8$ К) у рамках моделі, розглянутій в даній роботі з одночасним врахуванням неповного виродження електронної підсистеми і неоднорідного хімічного складу речовини ядра карлика (суцільні криві), а також у рамках моделі ізотермічного ядра з однорідним хімічним складом (пунктирні криві) [11]. Із рисунку видно, що маса ядра виродженого карлика при фіксованих значеннях параметрів x_0, T_c у моделі з неоднорідним хімічним складом є вищою за відповідне значення в моделі зі сталим хімічним складом.

4 Висновки

1. У наших попередніх роботах було встановлено, що неповне виродження електронної підсистеми і залежний від координати хімічний склад належать до основних факторів формування структури вироджених карликів, особливо гарячих карликів малих мас.
2. З метою одночасного і рівноправного врахування цих факторів нами запропоновано трифазну багатопараметричну модель, у якій опис окремих областей карлика (ізотермічна центральна область ядра, його перехідна неізотермічна область, а також периферійна область) враховує їхні особливості. Залежність хімічного складу ядра від координати, а також розподіл температури у зовнішній (перехідній) частині ядра моделюється. Розклади Зоммерфельда не використовуються.
3. Досліджено розв'язки рівняння механічної рівноваги ядра у рамках запропоно-

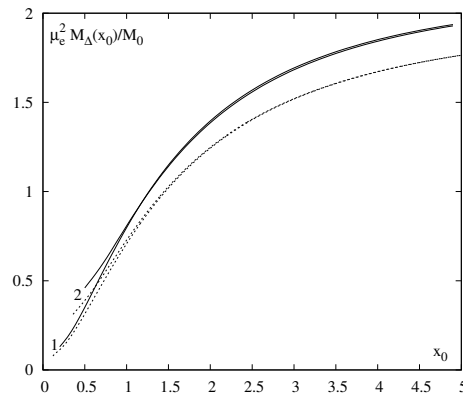


Рис. 9: Порівняння залежності маси ядра від параметра x_0 при фіксованих значеннях центральних температур (крива 1 – $T_c = 2 \cdot 10^7$ К, 2 – $T_c = 1 \cdot 10^8$ К). Суцільні криві – дані цієї роботи, пунктирні – дані роботи [11].

ваної моделі з врахуванням неповного виродження і світлового тиску, а також їх відмінності від аналогічних розв'язків у моделях, що розглядалися раніше.

4. Досліджено залежність фізичних характеристик (маса ядра, розміри його областей та повна енергія ядра) від параметрів моделі. Якісна залежність характеристик ядра від параметрів подібна до результатів, одержаних у моделі з ізотермічним ядром.
5. Встановлено, що врахування неоднорідності хімічного складу приводить до зростання товщини перехідного шару ядра, особливо при високих центральних температурах (як для масивних, так і для маломасивних об'єктів), а також до збільшення маси ядра.

Список використаної літератури

1. L.G. Althaus, A.H. Corsico, J. Isern, E. Garcia-Berro, *Astron. Astrophys. Rev.* **18**, 471 (2010).
2. G. Fontaine, P. Brassard, P. Bergeron, *Publ. Astron. Soc. Pacific* **113**, 409 (2001).
3. S. Chandrasekhar, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **91**, 456 (1931).
4. S. Chandrasekhar, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **95**, 226 (1935).
5. S. Chandrasekhar *An Introduction to the Study of Stellar Structure* (Chicago: University of Chicago Press, 1939).
6. P.-E. Tremblay, P. Bergeron, A. Gianninas, *Astroph. J.* **730**, 128 (2011).
7. S. De Gennaro, T. von Hippel, D.E. Winget, *Astron. J.* **135**, 1 (2008).
8. D.J. Eisenstein, J. Liebert, H.C. Harris et al., *Astrophys. J. Supp.* **167**, 40 (2006).

9. М. Ваврух, Н. Тышко, С. Смеречинський, *Астроном. журн.* **88**, 549 (2011).
10. М. Ваврух, С. Смеречинський, *Астроном. журн.* **89**, 407 (2012).
11. М. Ваврух, С. Смеречинський, *Астроном. журн.* **90**, 993 (2013).
12. А. Sommerfeld, *Zeitschrift für Physik* **47**, №1, 1 (1928).

Стаття надійшла до редакції 22.11.2013
прийнята до друку 17.12.2013

THREE-PHASE MODEL IN WHITE DWARF THEORY

M. Vavruk, N. Tyshko, S. Smerechynskyi

*Ivan Franko National University of Lviv
Kyrylo and Methodiy Str., 8, 79005 Lviv, Ukraine
e-mail: mvavruk@gmail.com*

Multiparameter model of low-mass hot white dwarf is proposed, which is the generalized case of set of our previous models. It takes into account two significant effects, which form stellar structure, simultaneously – incomplete degeneration of the electron subsystem in white dwarf interior (finite temperature effects) and non-uniform chemical composition. Macroscopic characteristics of a dwarf (mass, radius, total energy) with partly non-isothermal interior as well as radial dependences of thermodynamical parameters were calculated using hydrostatic equilibrium equation solutions. The comparison was carried out with our previous models, which take into account effects mentioned above as independent.

Key words: low-mass hot white dwarf, degenerate matter, hydrostatic equilibrium equation, chemical potential

**ТРЕХФАЗНАЯ МОДЕЛЬ В ТЕОРИИ ВЫРОЖДЕННЫХ
КАРЛИКОВ****М. Ваврух, Н. Тышко, С. Смеречинский***Львовский национальный университет имени Ивана Франко
ул. Кирилла и Мефодия 8, 79005 Львов, Украина
e-mail: mvavrukh@gmail.com*

Предложена многопараметрическая модель маломассивного горячего вырожденного карлика, обобщающая модели, рассмотренные авторами в предыдущих работах, которая позволяет одновременно учитывать влияние двух важнейших факторов, формирующих структуру этих объектов, а именно – неполного вырождения электронной подсистемы ядра и зависящего от координат химического состава. Найдены решения уравнения механического равновесия и рассчитаны макроскопические характеристики (масса, радиус, полная энергия) карлика с неизотермическим ядром, а также распределение термодинамических параметров вдоль радиуса. Выполнено сравнение с результатами предыдущих работ авторов, в которых учитывались либо неполное электронное вырождение, либо переменный химический состав.

Ключевые слова: маломассивные горячие вырожденные карлики, уравнение равновесия, химический потенциал