ISSN 1024-588X. Вісник Львівського ун-ту. Серія фізична. 2011. Випуск 46. С. 3–48
Visnyk of the Lviv University. Series Physics. 2011. Issue 46. P. 3–48

УДК 538.941
PACS 05.30.Jp, 67.20.+k, 67.40.−w, 67.40.Db, 67.40.Kh

СТАТИСТИЧНА СУМА БАГАТОБОЗОННОЇ СИСТЕМИ З УРАХУВАННЯМ ПРЯМИХ ТРИ- ТА ЧОТИРИЧАСТИНКОВИХ КОРЕЛЯЦІЙ

І. Вакарчук, О. Григорчак

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Драгоманова, 12, 79005 Львів, Україна
e-mail: G_ Orest@rambler.ru

Запропоновано метод знаходження статистичної суми бозе-частинок, що взаємодіють, для широкого інтервалу температур із врахуванням прямих три- і чотиричастинкових кореляцій. Розрахунок проводили на основі знайденої в попередній роботі матриці густини бозе-частинок. У границі низьких температур отриманий вираз для статистичної суми має очікуваний вигляд $e^{-E_0/T}$, де T — температура системи, E_0 — енергія основного стану в наближенні "двох сум за хвильовим вектором". За високих температур, у квазікласичній межі, отримана формула збігається з виразом для статистичної суми в наближенні хаотичних фаз. Результати роботи можна застосувати для розрахунків термодинамічних і структурних функцій рідкого ^{4}He з метою кількісної перевірки теоретичних і експериментальних даних, особливо в ділянці λ-переходу.

Ключові слова: рідкий ^{4}He, матриця густини, статистична сума.

На основі повної матриці густини можна отримати вичерпну інформацію про термодинамічні та структурні функції бозе-системи. Одним з важливих етапів на цьому шляху є розрахунок статистичної суми, яку можна записати як інтеграл від матриці густини за $3N$-координатами частинок.

Для опису багаточастинкових систем дуже ефективною виявилася ідея колективних змінних, яка продемонструвала свою доцільність і у випадку розрахунку статистичної суми [1, 2]. Однак для систем, які містять ферміони, неможливо знайти статистичну суму в одних лише колективних змінних, що пов'язане з тим, що антисиметрична функція не виражається через колективні змінні. Вихід з цієї ситуації був знайдений у роботах [3, 4], які започаткували дослідження, де для обчислення статистичної суми застосовують колективні змінні та методи вторинного квантування. В роботі [5] статистична сума N атомів, які взаємодіють через далекосяжні і близькосяжні потенціали, приведена до вигляду функціональних інтегралів. В результаті з'явилася можливість розрахунку статистичної суми рідина–газ за допомогою методів, розвинених для моделі Ізінга. Трохи згодом на основі термодинамічних співвідношень, використовуючи метод колективних змінних із виділеною системою відліку, була отримана явна форма функціонала великої статистичної суми, яка дає можливість описувати фазові переходи [6].

Для такої системи, як рідкий ^{4}He, термодинамічні та структурні функції [7], так само як і статистична сума [8] в широкому інтервалі температур були розраховані раніше, однак лише в наближенні парних кореляцій. Проте відомо, що внески багаточастинкових кореляцій у термодинамічні функції рідини в деяких випадках є значними [9, 10]. Врахування тричастинкових кореляцій при розрахунках енергії основного стану, структурного фактора і парної функції розподілу рідкого ^{4}He проведено, зокрема, в роботах [11–13]. В роботах [14, 15] на основі врахування три- і чотиричастинкових кореляцій проведена оцінка заповнення бозе-конденсату в рідкому ^{4}He. Пізніше [16] були знайдені структурні функції і статистична сума рідкого ^{4}He з урахуванням непрямих три- і чотиричастинкових кореляцій в широкому інтервалі температур. Це привело до кращого узгодження теоретичних розрахунків і експериментальних даних, зокрема, для парного структурного фактора [17]. Для більшого узгодження теоретичних і експериментальних висновків відповідні величини потрібно знайти з урахуванням прямих три- і чотиричастинкових кореляцій, що, в свою чергу, пов'язане із врахування наближення "двох сум за хвильовим вектором" [18, 19].

Отже, завданням цієї роботи є розрахунок статистичної суми взаємодіючих бозе-частинок із врахуванням прямих три- і чотиричастинкових кореляції. Вказаної мети було досягнуто за допомогою інтегрування діагональних елементів отриманої в роботі [20] матриці густини в наближенні "двох сум за хвильовим вектором" в широкому інтервалі температур із використанням методу кумулянтних розкладів [21].

Вихідні рівняння. В нашій попередній роботі [20] був знайдений вираз для матриці густини взаємодіючих бозе-частинок із врахуванням прямих три- і чотиричастинкових кореляцій, який у випадку, коли явно не виділяється матриця густини ідеального бозе-газу, має наступний вигляд:

$$R(\rho|\rho') = R_0(\rho|\rho')P(\rho|\rho'), \tag{1}$$

де $R_0(\rho|\rho')$ — матриця густини багатобозонної системи в наближенні парних кореляцій, а $P(\rho|\rho')$ — фактор, який враховує три- і чотиричастинкові кореляції, явний вигляд для якого можна отримати на основі згаданої вище роботи [20]. Величини $\rho_{\mathbf{q}}$ — це коефіцієнти Фур'є флуктуації густини частинок системи:

$$\rho_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_j}. \tag{2}$$

Згідно з означенням статистична сума

$$Z = \int R(\rho|\rho) J(\rho)(d\rho) = \int \overline{R_0}(\rho|\rho)\overline{P}(\rho|\rho)(d\rho), \tag{3}$$

де $J(\rho)$ — вагова функція у наближенні "двох сум за хвильовим вектором" [20,22]:

$$J(\rho) = C\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}} + \frac{1}{6\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\limits_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}\right]. \tag{4}$$

Сталу C можна знайти з умови нормування:

$$\int J(\rho)(d\rho) = V^N. \tag{5}$$

Матриця густини багатобозонної системи в наближенні парних кореляцій має наступний вигляд [8, 23, 24]:

$$\overline{R}_0(\rho|\rho') = e^{-\beta F_0}\prod_{\mathbf{q}\neq 0}{}' \frac{\alpha_q}{\pi}\,\mathrm{th}\left[\frac{\beta E_q}{2}\right]\exp\left(-\frac{1}{4}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\alpha_q}{\mathrm{th}[\beta E_q]}(\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}} + \rho'_{\mathbf{q}}\rho'_{-\mathbf{q}}) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\alpha_q}{\mathrm{sh}[\beta E_q]}(\rho_{\mathbf{q}}\rho'_{-\mathbf{q}} + \rho'_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}})\right), \tag{6}$$

де штрих біля символу добутку означає, що беремо до уваги лише півпростір можливих значень хвильового вектора $\mathbf{q}$.

Вільна енергія

$$F_0 = E_0^B + \frac{1}{\beta}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\ln\left(1 - e^{-\beta E_q}\right),$$

де E_0^B — енергія основного стану багатобозонної системи в наближенні Боголюбова:

$$E_0^B = \frac{N(N-1)}{2V}\nu_0 - \sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\hbar^2 q^2}{8m}(\alpha_q - 1)^2, \tag{7}$$

$$\alpha_q = \sqrt{1 + \frac{4mN}{V\hbar^2 q^2}\nu_q}, \tag{8}$$

$\nu_q = \int e^{-i\mathbf{qr}}\Phi(r)d\mathbf{r}$ — коефіцієнт Фур'є енергії парної взаємодії між частинками. E_q — спектр елементарних збуджень в наближенні Боголюбова:

$$E_q = \alpha_q\varepsilon_q = \alpha_q\frac{\hbar^2 q^2}{2m}. \tag{9}$$

Фактор $\overline{P}(\rho|\rho')$ можна подати в наступний спосіб:

$$\overline{P}(\rho|\rho') = \exp\left[\frac{\overline{c}_0}{N} + \sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{j_1=0}^{1}\overline{c}_2(1^{j_1},-1^{i_1})\rho^{j_1}_{\mathbf{q}_1}\rho^{i_1}_{-\mathbf{q}_1} + \right.$$
$$+\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{1}\overline{c}_3(1^{i_1},2^{i_2},3^{i_3})\rho^{i_1}_{\mathbf{q}_1}\rho^{i_2}_{\mathbf{q}_2}\rho^{i_3}_{\mathbf{q}_3}+$$
$$\left.+\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{i_1,i_2=0}^{1}\sum_{j_1,j_2=0}^{1}\overline{c}_4(1^{j_1},-1^{i_1},2^{j_2},-2^{i_2})\rho^{j_1}_{\mathbf{q}_1}\rho^{i_1}_{-\mathbf{q}_1}\rho^{j_2}_{\mathbf{q}_2}\rho^{i_2}_{-\mathbf{q}_2}\right]. \tag{10}$$

Індекси i_1, i_2, i_3, j_1, j_2 пробігають значення $0, 1$. Значення 1 відповідає присутності штриха біля відповідної величини, а значення 0 — відсутності. Вирази для $\overline{c}_0$, $\overline{c}_2(1^{j_1},-1^{i_1})$, $\overline{c}_3(1^{i_1},2^{i_2},3^{i_3})$, $\overline{c}_4(1^{j_1},-1^{i_1},2^{j_2},-2^{i_2})$ можна відтворити, користуючись роботою [20]. Вони також наведені в **додатку А**.

Математичні аспекти розрахунку статистичної суми. Повернемося до рівняння (3), виконаємо всі необхідні перетворення і спробуємо проінтегрувати вираз, що входить до цього рівняння. Поклавши у виразі (6) $\rho = \rho'$, отримаємо, що

$$\overline{R}_0(\rho|\rho) = e^{-\beta F_0}\prod_{\mathbf{q}\neq 0}{}'\frac{\alpha_q}{\pi}\,\mathrm{th}\left[\frac{\beta E_q}{2}\right]\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\alpha_q\mathrm{th}\left[\frac{\beta}{2}E_q\right]\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}\right). \tag{11}$$

Оскільки знайти точний вираз для інтеграла $\int\overline{R(\rho|\rho)}(d\rho)$ є непосильним завданням, то, враховуючи рівність (11), перепишемо його як середнє за величиною $\exp\left\{-1/2\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\alpha_q\mathrm{th}\,[\beta/2E_q]\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}\right\}$. Тоді

$$Z = \int\overline{R(\rho|\rho)}(d\rho) = e^{-\beta F_0}\prod_{\mathbf{q}\neq 0}{}'\frac{\alpha_q}{\pi}\,\mathrm{th}\left[\frac{\beta E_q}{2}\right]\int\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\alpha_q\mathrm{th}\left[\frac{\beta}{2}E_q\right]\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}\right)(d\rho)\times$$
$$\times\exp\left[\frac{\overline{C}_0}{N}\right]\left\langle\exp\left[2\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\overline{C}_2(\mathbf{q}_1)\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1} + \frac{2}{\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\overline{C}_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3} + \right.\right.$$

$$+\frac{2}{N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\overline{C}_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}\Bigg]\Bigg\rangle_p, \tag{12}$$

де

$$\int\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\alpha_q\mathrm{th}\left[\frac{\beta}{2}E_q\right]\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}\right)(d\rho)=\prod_{\mathbf{q}\neq 0}{}'\frac{\pi}{\alpha_q\,\mathrm{th}\left[\frac{\beta}{2}E_q\right]}; \tag{13}$$

$$\overline{C}_0=\bar{c}_0;\qquad \overline{C}_2(\mathbf{q}_1)=\frac{1}{2}\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{j_1=0}^{1}\bar{c}_2(1^{j1},-1^{i_1});$$

$$\overline{C}_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)=\frac{1}{2}\sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{1}\bar{c}_3(1^{i_1},2^{i_2},3^{i_3});$$

$$\overline{C}_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)=\frac{1}{2}\sum_{i_1,i_2=0}^{1}\sum_{j_1,j_2=0}^{1}\bar{c}_4(1^{j_1},-1^{i_1},2^{j_2},-2^{i_2}). \tag{14}$$

Після цього скористаємося концепцією кумулянтних розкладів, з допомогою якої в прийнятому нами наближенні “двох сум за хвильовим вектором” отримаємо:

$$Z=\int\overline{R(\rho|\rho)}(d\rho)=e^{-\beta F_0}\exp\left[\frac{\overline{C}_0}{N}\right]\exp\Bigg[2\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\overline{C}_2(\mathbf{q}_1)\left\langle\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\right\rangle_p+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\overline{C}_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\left\langle\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3}\right\rangle_p+$$

$$+\frac{2}{N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\overline{C}_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)\left\langle\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}\right\rangle_p+\frac{2}{N}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\overline{C}_3{}^2(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\times$$

$$\times\left(6\left\langle\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_3}\right\rangle_p-\left\langle\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3}\right\rangle_p^2\right)\Bigg], \tag{15}$$

де знак середнього $\langle...\rangle_p$ має такий зміст:

$$\langle...\rangle_p=\frac{\int\exp\left[-\frac{1}{2}\sum\limits_{\mathbf{q}\neq 0}\alpha_q\,\mathrm{th}\left[\frac{\beta}{2}E_q\right]\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}\right](...)(d\rho)}{\int\exp\left[-\frac{1}{2}\sum\limits_{\mathbf{q}\neq 0}\alpha_q\,\mathrm{th}\left[\frac{\beta}{2}E_q\right]\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}\right](d\rho)}.$$

Отже, для наведених вище середніх отримаємо такі вирази:

$$\left\langle\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\right\rangle_p=\frac{1}{\alpha_{q_1}\,\mathrm{th}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]}, \tag{16}$$

$$\langle \rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3}\rangle_p = 0, \tag{17}$$

$$\langle \rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}\rangle_p = \frac{1}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\,\mathrm{th}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]\mathrm{th}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_2}\right]}, \tag{18}$$

$$\langle \rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3}\rho_{-\mathbf{q}_3}\rangle_p = \frac{1}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}\,\mathrm{th}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]\mathrm{th}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_2}\right]\mathrm{th}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]}. \tag{19}$$

Наступний крок на шляху розрахунку статистичної суми полягає в знаходженні явних виразів для C_0, $\overline{C}_2(\mathbf{q}_1)$, $\overline{C}_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)$, $\overline{C}_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)$. Математичні аспекти цих розрахунків наведені в **додатках Б, В, Г, Д**, відповідно.

Підставляючи знайдені величини (Б.1), (Б.4), (Б.5), (Б.6), (Б.7) у вираз (А.1), знайдемо явний вигляд величини $\overline{C}_0$. Так само підставляючи величини (В.1), (В.7), (В.8), (В.9), (В.10) у вираз (А.2), (Г.3) у (А.3) і величини (Ґ.1), (Ґ.7), (Ґ.8), (Ґ.9), (Ґ.10) у вираз (А.4), знайдемо явні вирази, відповідно, для $\overline{C}_2(\mathbf{q}_1)$, $\overline{C}_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)$, $\overline{C}_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)$:

$$\begin{aligned}\overline{C}_0 = &-\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\frac{\hbar^2}{2m}(q_1^2+q_2^2)\frac{J_1(E_{q_1},E_{q_2})}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_1}]\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_2}]}+\\ &+\frac{1}{4}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\substack{\mathbf{q}_3\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{3}\mathrm{sh}[\beta E_{q_j}]}\sum_{\pm_1}\sum_{\pm_2}\frac{\mathrm{sh}[\frac{\beta}{2}(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1})]}{E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1}}\times\\ &\times[\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2(\pm_1\pm_2\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}+1)+\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3(\pm_1\alpha_{q_1}\alpha_{q_3}+1)+\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3(\pm_2\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}+1)]\times\\ &\times(\pm_1)\frac{(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)}{\alpha_{q_3}}\left[\pm_2 P_1(\pm_1 E_{q_1},\pm_2 E_{q_2},E_{q_3})+\frac{1}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}}P_2(\pm_1 E_{q_1},\pm_2 E_{q_2},E_{q_3})\right],\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\overline{C}_2(\mathbf{q}_1) = &-\frac{1}{4N}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\frac{\hbar^2}{2m}(q_1^2+q_2^2)\frac{J_2(E_{q_1},E_{q_2})}{\alpha_{q_2}\,\mathrm{ch}^2[\frac{\beta}{2}E_{q_1}]\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_2}]}+\frac{1}{16N}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\substack{\mathbf{q}_3\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2\times\\ &\times\frac{\alpha_{q_1}}{\mathrm{ch}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]\mathrm{sh}[\beta E_{q_2}]\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_3}]}\sum_{\pm_1}\sum_{\pm_2}\frac{\mathrm{ch}[\frac{\beta}{2}(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2})]}{E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1}}\times\\ &\times[\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2(\pm_1\pm_2\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}+1)+\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3(\pm_1\alpha_{q_1}\alpha_{q_3}+1)+\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3(\pm_2\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}+1)]\times\\ &\times\Bigg[-\pm_1\pm_2\frac{(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)}{\alpha_{q_3}}K_1(\pm_1 E_{q_1},\pm_2 E_{q_2},E_{q_3})-\\ &-\pm_1\frac{(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3)}{\alpha_{q_2}}K_2(\pm_1 E_{q_1},\pm_2 E_{q_2},E_{q_3})+\pm_2\frac{(\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)}{\alpha_{q_1}}K_3(\pm_1 E_{q_1},\pm_2 E_{q_2},E_{q_3})+\\ &+\frac{(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}}K_4(\pm_1 E_{q_1},\pm_2 E_{q_2},E_{q_3})\Bigg],\end{aligned} \tag{21}$$

$$\overline{C}_3(\mathbf{q_1},\mathbf{q_2},\mathbf{q_3}) = -\frac{1}{48}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{3}\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_j}\right]}\sum_{\pm_1}\sum_{\pm_2}\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1})\right]}{E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1}}\times$$
$$\times\left[\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2(\pm_1\pm_2\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}+1)+\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3(\pm_1\alpha_{q_1}\alpha_{q_3}+1)+\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3(\pm_2\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}+1)\right], \tag{22}$$

$$\overline{C}_4(\mathbf{q_1},\mathbf{q_2}) = -\frac{1}{16}\frac{\hbar^2}{2m}(q_1^2+q_2^2)\frac{J_3(E_{q_1},E_{q_2})}{\mathrm{ch}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]\mathrm{ch}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_2}\right]}+\frac{1}{64}\sum_{\substack{\mathbf{q}_3\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2\times$$
$$\times\frac{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}}{\mathrm{ch}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]\mathrm{ch}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_2}\right]}\sum_{\pm_1}\sum_{\pm_2}\frac{1}{E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1}}\times$$
$$\times\left[\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2(\pm_1\pm_2\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}+1)+\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3(\pm_1\alpha_{q_1}\alpha_{q_3}+1)+\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3(\pm_2\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}+1)\right]\times$$
$$\times\left[\pm_1\frac{(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}}I_1(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3})-\right.$$
$$-\pm_1\pm_2\frac{(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)}{\alpha_{q_3}}I_2(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3})+\pm_2\frac{(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3)}{\alpha_{q_2}}I_3(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3})-$$
$$\left.-\frac{(\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)}{\alpha_{q_1}}I_4(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3})\right], \tag{23}$$

де

$$\begin{aligned}
P_1(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3}) &= I_{11}(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3})+I_{12}(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3}),\\
P_2(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3}) &= I_{11}(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3})-I_{12}(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3}),\\
K_1(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3}) &= I_{21}(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3})+I_{22}(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3}),\\
K_2(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3}) &= I_{21}(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3})-I_{22}(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3}),\\
K_3(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3}) &= I_{23}(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3})+I_{24}(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3}),\\
K_4(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3}) &= I_{23}(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3})-I_{24}(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3}),\\
I_1(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3}) &= I_{31}(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3})+I_{32}(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3}),\\
I_2(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3}) &= I_{31}(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3})-I_{32}(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3}),\\
I_3(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3}) &= I_{33}(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3})+I_{34}(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3}),\\
I_4(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3}) &= I_{33}(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3})-I_{34}(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3}).
\end{aligned}$$

Явні вирази для I_{11}, I_{12}, I_{21}, I_{22}, I_{23}, I_{24}, I_{31}, I_{32}, I_{33}, I_{34}, J_1, J_2, J_3 наведені у **додатку Д**. Як наслідок отримаємо:

$$Z = e^{-\beta F_0}\exp\left[\frac{\overline{C}_0}{N}\right]\exp\left[2\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\frac{\overline{C}_2(\mathbf{q}_1)}{\alpha_{q_1}\mathrm{th}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]}+\frac{2}{N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\frac{\overline{C}_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\mathrm{th}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]\mathrm{th}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_2}\right]}+\right.$$

$$+\frac{12}{N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq0}\sum_{\substack{\mathbf{q}_3\neq0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\frac{\overline{C}_3^{\,2}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}\,\mathrm{th}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]\mathrm{th}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_2}\right]\mathrm{th}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]}\Bigg]. \tag{24}$$

Статистична сума в границі низьких температур. Для того, щоб отримати вираз для статистичної суми в границі низьких температур, потрібно спершу знайти відповідні границі всіх величин, які входять у вирази для $\overline{C}_0$, $\overline{C}_2(\mathbf{q}_1)$, $\overline{C}_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)$, $\overline{C}_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)$. Результати цих розрахунків наведені в **додатку Е**. Використовуючи введені у цьому ж додатку позначення, отримаємо наступні вирази для згаданих вище величин в границі низьких температур:

$$\overline{C}_0=-\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q_1}\neq0}\sum_{\mathbf{q_2}\neq0}\frac{\hbar^2}{2m}(q_1^2+q_2^2)\frac{J_1^0(E_{q_1},E_{q_2})}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}}+\frac{1}{4}\sum_{\mathbf{q}_1\neq0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq0}\sum_{\substack{\mathbf{q}_3\neq0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2\frac{1}{E_{q_3}+E_{q_2}+E_{q_1}}\times$$
$$\times\left[\mathbf{q_1}\mathbf{q_2}(\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}+1)+\mathbf{q_1}\mathbf{q_3}(\alpha_{q_1}\alpha_{q_3}+1)+\mathbf{q_2}\mathbf{q_3}(\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}+1)\right]\frac{(\mathbf{q_1}\mathbf{q_2})}{\alpha_{q_3}}\times$$
$$\times\left[P_1^0(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3})+\frac{1}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}}P_2^0(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3})\right], \tag{25}$$

$$\overline{C}_2(\mathbf{q_1})=-\frac{1}{4N}\sum_{\mathbf{q_2}\neq0}\frac{\hbar^2}{2m}(q_1^2+q_2^2)\frac{J_2^0(E_{q_1},E_{q_2})}{\alpha_{q_2}}+\frac{1}{16N}\sum_{\mathbf{q_2}\neq0}\sum_{\substack{\mathbf{q_3}\neq0\\ \mathbf{q_1}+\mathbf{q_2}+\mathbf{q_3}=0}}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2\frac{\alpha_{q_1}}{E_{q_3}+E_{q_2}+E_{q_1}}\times$$
$$\times\left[\mathbf{q_1}\mathbf{q_2}(\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}+1)+\mathbf{q_1}\mathbf{q_3}(\alpha_{q_1}\alpha_{q_3}+1)+\mathbf{q_2}\mathbf{q_3}(\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}+1)\right]\times$$

$$\times\left[-\frac{(\mathbf{q_1}\mathbf{q_2})}{\alpha_{q_3}}K_1^0(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3})-\frac{(\mathbf{q_1}\mathbf{q_3})}{\alpha_{q_2}}K_2^0(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3})+\right.$$
$$\left.+\frac{(\mathbf{q_2}\mathbf{q_3})}{\alpha_{q_1}}K_3^0(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3})+\frac{(\mathbf{q_1}\mathbf{q_2}+\mathbf{q_1}\mathbf{q_3}+\mathbf{q_2}\mathbf{q_3})}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}}K_4^0(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3})\right], \tag{26}$$

$$\overline{C}_3(\mathbf{q_1},\mathbf{q_2},\mathbf{q_3})=-\frac{1}{12}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\left[\mathbf{q_1}\mathbf{q_2}(\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}+1)+\mathbf{q_1}\mathbf{q_3}(\alpha_{q_1}\alpha_{q_3}+1)+\mathbf{q_2}\mathbf{q_3}(\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}+1)\right]}{E_{q_3}+E_{q_2}+E_{q_1}}, \tag{27}$$

$$\overline{C}_4(\mathbf{q_1},\mathbf{q_2})=-\frac{1}{16}\frac{\hbar^2}{2m}(q_1^2+q_2^2)J_3^0(E_{q_1},E_{q_2})+\frac{1}{64}\sum_{\substack{\mathbf{q_3}\neq0\\ \mathbf{q_1}+\mathbf{q_2}+\mathbf{q_3}=0}}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2\times$$
$$\times\,\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\frac{\left[\mathbf{q_1}\mathbf{q_2}(\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}+1)+\mathbf{q_1}\mathbf{q_3}(\alpha_{q_1}\alpha_{q_3}+1)+\mathbf{q_2}\mathbf{q_3}(\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}+1)\right]}{E_{q_3}+E_{q_2}+E_{q_1}}\times$$

$$\times\left[\frac{(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}}I_1^0(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3})+\frac{(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)}{\alpha_{q_3}}I_2^0(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3})-\right.$$
$$\left.-\frac{(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3)}{\alpha_{q_2}}I_3^0(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3})-\frac{(\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)}{\alpha_{q_1}}I_4^0(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3})\right]. \tag{28}$$

Підставляючи отримані вирази у рівність (24), враховуючи, що $\lim\limits_{\beta\to\infty}\mathrm{th}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_i}\right]=1$, а також виконуючи необхідні перетворення, отримаємо

$$Z=e^{-\beta F_0}\exp\left[-\frac{1}{8N}\sum_{\mathbf{q_1}\neq 0}\sum_{\mathbf{q_2}\neq 0}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{(q_1^2+q_2^2)}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}}(4J_1^0(E_{q_1},E_{q_2})+2J_2^0(E_{q_1},E_{q_2})+\right.$$
$$+2J_2^0(E_{q_2},E_{q_1})+J_3^0(E_{q_1},E_{q_2}))+\frac{1}{32N}\sum_{\substack{\mathbf{q_1}\neq 0\\ \mathbf{q_1}+\mathbf{q_2}+\mathbf{q_3}=0}}\sum_{\mathbf{q_2}\neq 0}\sum_{\mathbf{q_3}\neq 0}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2\frac{1}{E_{q_3}+E_{q_2}+E_{q_1}}\times$$
$$\times\left[\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2(\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}+1)+\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3(\alpha_{q_1}\alpha_{q_3}+1)+\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3(\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}+1)\right]\frac{(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)}{\alpha_{q_3}}\times$$
$$\times\left[8P_1^0(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3})-2K_1^0(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3})-2K_1^0(E_{q_2},E_{q_1},E_{q_3})-\right.$$
$$-2K_2^0(E_{q_1},E_{q_3},E_{q_2})-2K_2^0(E_{q_2},E_{q_3},E_{q_1})+4K_3^0(E_{q_3},E_{q_2},E_{q_1})+$$
$$+I_2^0(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3})-I_3^0(E_{q_1},E_{q_3},E_{q_2})-I_4^0(E_{q_3},E_{q_2},E_{q_1})+\frac{8}{E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3}}+$$
$$+\frac{1}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}}\left(8P_2^0(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3})+4K_4^0(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3})+4K_4^0(E_{q_2},E_{q_3},E_{q_1})+\right.$$
$$+4K_4^0(E_{q_3},E_{q_1},E_{q_2})+I_1^0(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3})+I_1^0(E_{q_2},E_{q_3},E_{q_1})+I_1^0(E_{q_3},E_{q_1},E_{q_2})+$$
$$\left.\left.\left.+\frac{8}{E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3}}\right)\right]\right]. \tag{29}$$

Беручи до уваги рівності

$$4J_1^0(E_{q_1},E_{q_2})+2J_2^0(E_{q_1},E_{q_2})+2J_2^0(E_{q_2},E_{q_1})+J_3^0(E_{q_1},E_{q_2})=\beta,$$

$$8P_1^0(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3})-2K_1^0(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3})-2K_1^0(E_{q_2},E_{q_1},E_{q_3})-$$
$$-2K_2^0(E_{q_1},E_{q_3},E_{q_2})-2K_2^0(E_{q_2},E_{q_3},E_{q_1})+4K_3^0(E_{q_3},E_{q_2},E_{q_1})+$$
$$+I_2^0(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3})-I_3^0(E_{q_1},E_{q_3},E_{q_2})-I_4^0(E_{q_3},E_{q_2},E_{q_1})+$$
$$+\frac{8}{E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3}}=4\beta,$$

$$8P_2^0(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3})+4K_4^0(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3})+4K_4^0(E_{q_2},E_{q_3},E_{q_1})+$$
$$+\,4K_4^0(E_{q_3},E_{q_1},E_{q_2})+I_1^0(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3})+I_1^0(E_{q_2},E_{q_3},E_{q_1})+$$
$$+\,I_1^0(E_{q_3},E_{q_1},E_{q_2})+\frac{8}{E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3}}=4\beta,$$

знайдемо

$$Z=e^{-\beta F_0}\exp\left[-\frac{\beta}{8N}\sum_{\mathbf{q_1}\neq0}\sum_{\mathbf{q_2}\neq0}\frac{\hbar^2}{2m}(q_1^2+q_2^2)\frac{1}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}}+\frac{\beta}{8N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq0}\sum_{\substack{\mathbf{q}_2\neq0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_3\neq0}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2\times\right.$$
$$\left.\times\,\frac{[\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2(\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}+1)+\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3(\alpha_{q_1}\alpha_{q_3}+1)+\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3(\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}+1)]}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}(E_{q_3}+E_{q_2}+E_{q_1})}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)(\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}+1)\right]. \tag{30}$$

Провівши відповідні перетвореннння, отримаємо вираз для статистичної суми в границі низьких температур ($\beta\to\infty$) у такому вигляді:

$$Z=e^{-\beta E_0}, \tag{31}$$

де

$$E_0=E_0^B+\frac{\hbar^2}{48mN}\sum_{\mathbf{q}_1\neq0}\sum_{\substack{\mathbf{q}_2\neq0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_3\neq0}\left[(q_1^2+q_2^2+q_3^2)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_1}}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_2}}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_3}}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\sum_{1\le i<j\le3}(\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j)(\alpha_{q_i}-1)(\alpha_{q_j}-1)\right)^2\Bigg/\left(\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}\sum_{j=1}^{3}q_j^2\alpha_{q_j}\right)\right]+$$
$$+\,\frac{\hbar^2}{24mN}\sum_{\mathbf{q}_1\neq0}\sum_{\substack{\mathbf{q}_2\neq0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_3\neq0}\sum_{1\le i<j\le3}(\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_i}}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_j}}\right)\Bigg\}. \tag{32}$$

Зазначимо також, що після відповідної симетризації за хвильовими векторами $\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3$ величини $\overline{C}_0$, $\overline{C}_2(\mathbf{q}_1)$, $\overline{C}_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)$, $\overline{C}_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)$ у границі низьких температур можна подати так:

$$\lim_{\beta\to\infty}\overline{C}_0=-\beta E_0-\sum_{\mathbf{q}_1\neq0}\frac{a_2(\mathbf{q_1})}{\alpha_{q_1}}-\frac{1}{4N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq0}\frac{a_4(\mathbf{q_1},-\mathbf{q_1},\mathbf{q_2},-\mathbf{q_2})-1}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}}-$$
$$-\,\frac{1}{12N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq0}\sum_{\substack{\mathbf{q}_2\neq0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_3\neq0}\frac{[2a_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)+1]^2}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}}, \tag{33}$$

$$\lim_{\beta\to\infty}\overline{C}_2(\mathbf{q}_1)=\frac{1}{2}a_2(\mathbf{q}_1), \tag{34}$$

$$\lim_{\beta\to\infty}\overline{C}_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)=\frac{1}{12}[2a_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)+1], \tag{35}$$

$$\lim_{\beta\to\infty}\overline{C}_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)=\frac{1}{8}[a_4(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)-1], \tag{36}$$

де

$$a_2(\mathbf{q}_1)=\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\left[\frac{q_2^2}{2q_1^2\alpha_{q_1}}a_4(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)+\frac{(\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2)}{q_1^2\alpha_{q_1}}a_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)\right], \tag{37}$$

$$a_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)=-\frac{\sum\limits_{1\le i<j\le 3}(\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j)(\alpha_{q_i}-1)(\alpha_{q_j}-1)}{2\sum\limits_{j=1}^{3}\mathbf{q}_j^2\alpha_{q_j}}, \tag{38}$$

$$\begin{aligned}
&a_4(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)=\\
&=\frac{(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2)^2a_3^2(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_2)+(\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)^2a_3^2(\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)}{q_1^2\alpha_{q_1}+q_2^2\alpha_{q_2}}-\\
&-\frac{\left[(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_1)(\alpha_{q_1}-1)+(\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2)(\alpha_{q_2}-1)\right]a_3(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_2)}{q_1^2\alpha_{q_1}+q_2^2\alpha_{q_2}}-\\
&-\frac{\left[(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)(\alpha_{q_1}-1)+(\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_1)(\alpha_{q_2}-1)\right]a_3(\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)}{q_1^2\alpha_{q_1}+q_2^2\alpha_{q_2}}.
\end{aligned} \tag{39}$$

Розрахунок статистичної суми у випадку виділення матриці густини ідеального бозе-газу. Отриманий вираз для статистичної суми (24), як буде показано в наступному розділі, не є коректним в границі високих температур, оскільки є розбіжним в цій границі. Щоб уникнути згаданої проблеми і отримати правильні вирази як у границі низьких, так і високих температур, потрібно з матриці густини, на основі якої ми обчислюємо статистичну суму, виділити матрицю густини ідеального бозе-газу, а потім провести розрахунок статистичної суми. Матриця густини із виділеною матрицею густини ідеального бозе-газу така:

$$R(\rho|\rho')=R_N^0(r|r')P_{pair}(\rho|\rho')P(\rho|\rho'), \tag{40}$$

де $R_N^0(r|r')$ — матриця густини бозе-частинок, що не взаємодіють [8]:

$$R_N^0(r|r')=\frac{1}{N!}\left(\frac{m^*}{2\pi\beta\hbar^2}\right)^{\frac{3N}{2}}\sum_Q\exp\left[-\frac{m^*}{2\beta\hbar^2}\sum_{j=1}^{N}(r'_j-r_{Qj})^2\right], \tag{41}$$

$P_{pair}(\rho|\rho')$ — фактор, який фраховує парні кореляції [8]:

$$P_{pair}(\rho|\rho') = \exp\left[-\beta E_0 + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\ln\left[\frac{\alpha_{q_1}\,\mathrm{th}\left(\frac{\beta E_{q_1}}{2}\right)}{\mathrm{th}\left(\frac{\beta\varepsilon_{q_1}}{2}\right)}\right] + \sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\ln\left(\frac{1-e^{-\beta\varepsilon_{q_1}}}{1-e^{-\beta E_{q_1}}}\right)\right]\times$$
$$\times\exp\left[-\frac{1}{4}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\left(\alpha_{q_1}\,\mathrm{cth}[\beta E_{q_1}] - \mathrm{cth}[\beta\varepsilon_{q_1}]\right)\left(\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1} + \rho'_{\mathbf{q}_1}\rho'_{-\mathbf{q}_1}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\left(\frac{\alpha_{q_1}}{\mathrm{sh}[\beta E_{q_1}]} - \frac{1}{\mathrm{sh}[\beta\varepsilon_{q_1}]}\right)\left(\rho'_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1} + \rho_{\mathbf{q}_1}\rho'_{-\mathbf{q}_1}\right)\right], \tag{42}$$

$P(\rho|\rho')$ — фактор, який враховує три- і чотиричастинкові кореляції:

$$P(\rho|\rho') = \exp\left[\frac{\bar c_0 - \bar c_0^0}{N} + \sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{j_1=0}^{1}\left[\bar c_2(1^{j1}, -1^{i_1}) - \bar c_2^0(1^{j1}, -1^{i_1})\right]\rho_{\mathbf{q}_1}^{j_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}^{i_1} + \right.$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{1}\left[\bar c_3(1^{i_1}, 2^{i_2}, 3^{i_3}) - \bar c_3^0(1^{i_1}, 2^{i_2}, 3^{i_3})\right]\rho_{\mathbf{q}_1}^{i_1}\rho_{\mathbf{q}_2}^{i_2}\rho_{\mathbf{q}_3}^{i_3} +$$
$$+ \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{i_1,i_2=0}^{1}\sum_{j_1,j_2=0}^{1}\left[\bar c_4(1^{j_1}, -1^{i_1}, 2^{j_2}, -2^{i_2}) - \bar c_4^0(1^{j_1}, -1^{i_1}, 2^{j_2}, -2^{i_2})\right]\times$$
$$\left.\times\ \rho_{\mathbf{q}_1}^{j_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}^{i_1}\rho_{\mathbf{q}_2}^{j_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}^{i_2}\right]. \tag{43}$$

Величини $\bar c_0^0$, $\bar c_2^0(1^{j_1}, -1^{i_1})$, $\bar c_3^0(1^{i_1}, 2^{i_2}, 3^{i_3})$, $\bar c_4^0(1^{j_1}, -1^{i_1}, 2^{j_2}, -2^{i_2})$ — це ті самі величини $\bar c_0$ (A.1), $\bar c_2(1^{j1}, -1^{i_1})$ (A.2), $\bar c_3(1^{i_1}, 2^{i_2}, 3^{i_3})$ (A.3), $\bar c_4(1^{j_1}, -1^{i_1}, 2^{j_2}, -2^{i_2})$ (A.4), з тією лише відмінністю, що всюди у їхніх виразах покладено $\alpha_{q_1} = \alpha_{q_2} = \alpha_{q_3} = 1$. Запишімо вираз для статистичної суми як інтеграл за $3N$ декартовими змінними, а потім перейдімо до інтегрування за колективними змінними згідно зі схемою, наведеною у роботі [8]:

$$Z = \int d\mathbf{r}_1 ... \int d\mathbf{r}_N R_N^0(r|r) P_{pair}(\rho|\rho) P(\rho|\rho) = Z_N^0 \int J_0(\rho) P_{pair}(\rho|\rho) P(\rho|\rho)(d\rho),$$

де Z_N^0 — статистична сума ідеального бозе-газу, а $J_0(\rho)$ — "температурнозалежний якобіан" переходу від декартових до колективних змінних, в який "заховані" внески від матриці густини ідеального бозе-газу. Його можна подати так [8, 25]:

$$J_0(\rho) = \int d\mathbf{r}_1 ... \int d\mathbf{r}_N R_N^0(r|r) \prod_{\mathbf{q}\neq 0}{}' \delta\left(\rho_{\mathbf{q}} - \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_j}\right). \tag{44}$$

Для того, щоб отримати явний вираз для згаданого вище "температурнозалежного якобіана", запишемо δ-функцію $\delta\left(\rho_{\mathbf{q}} - \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_j}\right)$ як інтеграл за $\omega_{\mathbf{q}}$ і проведемо усереднення з матрицею густини ідеального бозе-газу. Введемо також позначення:

$$\chi_{\mathbf{q}}(r) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_j}. \tag{45}$$

Після цього скористаємося концепцією кумулянтних розкладів [21]. Тоді із урахуванням три- і чотиричастинкових кореляцій отримаємо:

$$\begin{aligned} J_0(\rho) = &\int d\mathbf{r}_1 ... \int d\mathbf{r}_N R_N^0(r|r) \prod_{\mathbf{q}\neq 0}{}' \delta\left(\rho_{\mathbf{q}} - \chi_{\mathbf{q}}(r)\right) = \int (d\omega_{\mathbf{q}}) e^{\pi i \sum\limits_{\mathbf{q}\neq 0} \omega_{\mathbf{q}} \rho_{\mathbf{q}}} \exp\Bigg\{ -\pi i \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \omega_{\mathbf{q}} \times \\ &\times \langle \chi_{\mathbf{q}}(r) \rangle + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}_1\neq 0} \sum_{\mathbf{q}_2\neq 0} (\pi i)^2 \omega_{\mathbf{q}_1} \omega_{\mathbf{q}_2} \left[\langle \chi_{\mathbf{q}_1}(r) \chi_{\mathbf{q}_2}(r) \rangle - \langle \chi_{\mathbf{q}_1}(r) \rangle \langle \chi_{\mathbf{q}_2}(r) \rangle \right] - \\ &- \frac{1}{3!} \sum_{\mathbf{q}_1\neq 0} \sum_{\mathbf{q}_2\neq 0} \sum_{\mathbf{q}_3\neq 0} (\pi i)^3 \omega_{\mathbf{q}_1} \omega_{\mathbf{q}_2} \omega_{\mathbf{q}_3} \left[\left\langle \prod_{i=1}^{3} \chi_{\mathbf{q}_i}(r) \right\rangle - \sum_{i=1}^{3} \langle \chi_{\mathbf{q}_i}(r) \rangle \left\langle \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{3} \chi_{\mathbf{q}_j}(r) \right\rangle - \right. \\ &\left. - \prod_{i=1}^{3} \langle \chi_{\mathbf{q}_i}(r) \rangle \right] + \frac{1}{4!} \sum_{\mathbf{q}_1\neq 0} \sum_{\mathbf{q}_2\neq 0} \sum_{\mathbf{q}_3\neq 0} \sum_{\mathbf{q}_4\neq 0} (\pi i)^4 \omega_{\mathbf{q}_1} \omega_{\mathbf{q}_2} \omega_{\mathbf{q}_3} \omega_{\mathbf{q}_4} \left[\left\langle \prod_{i=1}^{4} \chi_{\mathbf{q}_i}(r) \right\rangle - \right. \\ &\left. - \sum_{i=1}^{4} \langle \chi_{\mathbf{q}_i}(r) \rangle \left\langle \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{4} \chi_{\mathbf{q}_j}(r) \right\rangle - \sum_{\substack{2\leq i\neq j<k\leq 4 \\ 1\neq k\neq i}} \langle \chi_{\mathbf{q}_1}(r) \chi_{\mathbf{q}_i}(r) \rangle \langle \chi_{\mathbf{q}_j}(r) \chi_{\mathbf{q}_k}(r) \rangle - \prod_{i=1}^{4} \langle \chi_{\mathbf{q}_i}(r) \rangle \right] \Bigg\}. \end{aligned} \tag{46}$$

Знак середнього $\langle ... \rangle$ має зміст усереднення з матрицею густини ідеального бозе-газу:

$$\langle ... \rangle = \int d\mathbf{r}_1 ... \int d\mathbf{r}_N R_N^0(r|r)(...). \tag{47}$$

Для того, щоб знайти середні від добутків $\chi_{\mathbf{q}}(r)$, запишемо їх в представленні вторинного квантування:

$$\langle \chi_{\mathbf{q}}(r) \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \langle a_{\mathbf{k}}^{+} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}\neq 0} n_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}+\mathbf{q}}. \tag{48}$$

Це означає, що

$$\sum_{\mathbf{q}\neq 0} \langle \chi_{\mathbf{q}}(r) \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \sum_{\mathbf{k}\neq 0} n_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}+\mathbf{q}} = 0. \tag{49}$$

Так само

$$\begin{aligned}
\langle\chi_{\mathbf{q}_1}(r)\chi_{\mathbf{q}_2}(r)\rangle &= \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}_1\neq0}\sum_{\mathbf{k}_2\neq0}\langle a^+_{\mathbf{k}_1}a_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q}_1}a^+_{\mathbf{k}_2}a_{\mathbf{k}_2+\mathbf{q}_2}\rangle = \\
&= \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}_1\neq0}\sum_{\mathbf{k}_2\neq0}\langle a^+_{\mathbf{k}_1}a_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q}_1}\rangle\langle a_{\mathbf{k}_2+\mathbf{q}_2}a^+_{\mathbf{k}_2}\rangle = \\
&= \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}_1\neq0}\sum_{\mathbf{k}_2\neq0} n_{\mathbf{k}_1}(1+n_{\mathbf{k}_2})\delta_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2+\mathbf{q}_2}\delta_{\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_1+\mathbf{q}_1} = \\
&= \left[1+\frac{1}{N}\sum_{\mathbf{k}_1\neq0} n_{\mathbf{k}_1}n_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q}_1}\right]\delta(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2) = S_0(q_1)\delta(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2), \qquad (50)
\end{aligned}$$

де $S_0(q_1)$ — парний структурний фактор ідеального бозе-газу. Аналогічно можемо написати і для середніх від добутку трьох і чотирьох величин $\chi_{\mathbf{q}}(r)$:

$$\begin{aligned}
&\langle\chi_{\mathbf{q}_1}(r)\chi_{\mathbf{q}_2}(r)\chi_{\mathbf{q}_3}(r)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\delta(\mathbf{q_1}+\mathbf{q_2}+\mathbf{q_3}), \\
&\langle\chi_{\mathbf{q}_1}(r)\chi_{\mathbf{q}_2}(r)\chi_{\mathbf{q}_3}(r)\chi_{\mathbf{q}_4}(r)\rangle - \sum_{\substack{2\le i\neq j<k\le4\\ 1\neq k\neq i}}\langle\chi_{\mathbf{q}_1}(r)\chi_{\mathbf{q}_i}(r)\rangle\left\langle\chi_{\mathbf{q}_j}(r)\chi_{\mathbf{q}_k}(r)\right\rangle = \\
&= \frac{1}{N}S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3,\mathbf{q}_4)\delta(\mathbf{q_1}+\mathbf{q_2}+\mathbf{q_3}+\mathbf{q_4}), \qquad (51)
\end{aligned}$$

де $S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3), S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3,-\mathbf{q}_4)$ — відповідно три- і чотиричастинковий незвідні структурні фактори ідеального бозе-газу. Повертаючись до виразу (46), враховуючи зроблені вище перетворення, а також виділяючи ті доданки, які задовольняють прийняте нами наближення "двох сум за хвильовим вектором", для "температурнозалежного якобіана" переходу отримаємо наступний вираз:

$$\begin{aligned}
J_0(\rho) = \int(d\omega_{\mathbf{q}})e^{\pi i\sum\limits_{\mathbf{q}\neq0}\omega_{\mathbf{q}}\rho_{\mathbf{q}}}\exp\Bigg\{&\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq0}(\pi i)^2\omega_{\mathbf{q}}\omega_{-\mathbf{q}}S_0(q) - \frac{1}{3!\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{q}_1\neq0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq0}\sum_{\substack{\mathbf{q}_3\neq0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}(\pi i)^3\times \\
&\times\omega_{\mathbf{q}_1}\omega_{\mathbf{q}_2}\omega_{\mathbf{q}_3}S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3) + \frac{1}{8N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq0}(\pi i)^4\omega_{\mathbf{q}_1}\omega_{-\mathbf{q}_1}\omega_{\mathbf{q}_2}\omega_{-\mathbf{q}_2}\times \\
&\times\, S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)\Bigg\}. \qquad (52)
\end{aligned}$$

Знайдений вираз (52) можна подати, скориставшись результатами роботи [26]:

$$J_0(\rho) = V^N{\prod_{\mathbf{q}\neq0}}'\frac{1}{\pi}\exp\left\{\sum_{n\geq3}\hat{D}_n(\rho)\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq0}\frac{\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}}{S_0(q)}\right\}, \qquad (53)$$

де

$$\hat{D}_n(\rho) = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1,\dots,\mathbf{q}_n\\ \mathbf{q}_1+\dots+\mathbf{q}_n=0}} S_0^{(n)}(\rho_{\mathbf{q}_1},\dots,\rho_{\mathbf{q}_n})\frac{\partial^n}{\partial\rho_{\mathbf{q}_1}\dots\partial\rho_{\mathbf{q}_n}}. \tag{54}$$

Щоб забезпечити прийняте нами наближення, достатньо взяти тільки два члени ряду: $\hat{D}_3(\rho)$, $\hat{D}_4(\rho)$. Отже:

$$J_0(\rho) = V^N {\prod_{\mathbf{q}\neq 0}}' \frac{1}{\pi}\exp\left\{-\frac{1}{3!\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0} S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\frac{\partial^3}{\partial\rho_{\mathbf{q}_1}\partial\rho_{\mathbf{q}_2}\partial\rho_{\mathbf{q}_3}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{8N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0} S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)\frac{\partial^4}{\partial\rho_{\mathbf{q}_1}\partial\rho_{-\mathbf{q}_1}\partial\rho_{\mathbf{q}_2}\partial\rho_{-\mathbf{q}_2}}\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}}{S_0(q)}\right\}. \tag{55}$$

Перенесемо останню експоненту ліворуч і отримаємо:

$$J_0(\rho) = V^N {\prod_{\mathbf{q}\neq 0}}' \frac{1}{\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}}{S_0(q)}\right\}\exp\left\{-\frac{1}{3!\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0} S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\times\right.$$
$$\times\left(\frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{q}_1}} - \frac{\rho_{-\mathbf{q}_1}}{S_0(q_1)}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{q}_2}} - \frac{\rho_{-\mathbf{q}_2}}{S_0(q_2)}\right)\left(\frac{\partial}{\rho_{\mathbf{q}_3}} - \frac{\partial\rho_{-\mathbf{q}_3}}{S_0(q_3)}\right) +$$
$$+\frac{1}{8N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0} S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)\left(\frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{q}_1}} - \frac{\partial\rho_{-\mathbf{q}_1}}{S_0(q_1)}\right)\times$$
$$\left.\times\left(\frac{\partial}{\partial\rho_{-\mathbf{q}_1}} - \frac{\partial\rho_{\mathbf{q}_1}}{S_0(q_1)}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{q}_2}} - \frac{\partial\rho_{-\mathbf{q}_2}}{S_0(q_2)}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\rho_{-\mathbf{q}_2}} - \frac{\partial\rho_{\mathbf{q}_2}}{S_0(q_2)}\right)\right\}. \tag{56}$$

Позначимо

$$\hat{A} = -\frac{1}{3!\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0} S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\left(\frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{q}_1}} - \frac{\rho_{-\mathbf{q}_1}}{S_0(q_1)}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{q}_2}} - \frac{\rho_{-\mathbf{q}_2}}{S_0(q_2)}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{\partial}{\rho_{\mathbf{q}_3}} - \frac{\partial\rho_{-\mathbf{q}_3}}{S_0(q_3)}\right) + \frac{1}{8N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0} S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)\left(\frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{q}_1}} - \frac{\partial\rho_{-\mathbf{q}_1}}{S_0(q_1)}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{\partial}{\partial\rho_{-\mathbf{q}_1}} - \frac{\partial\rho_{\mathbf{q}_1}}{S_0(q_1)}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\rho_{\mathbf{q}_2}} - \frac{\partial\rho_{-\mathbf{q}_2}}{S_0(q_2)}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\rho_{-\mathbf{q}_2}} - \frac{\partial\rho_{\mathbf{q}_2}}{S_0(q_2)}\right). \tag{57}$$

і ввівши параметр λ, скористаємося методом зміщень. Для цього напишімо, що

$$e^{\lambda\hat{A}} = e^{U(\lambda)}\hat{\sigma}(\lambda), \tag{58}$$

де $U(\lambda)$ — це функція змінних ρ, а $\hat{\sigma}(\lambda)$ — деякий невідомий оператор, який можна подати у вигляді експоненти від виразів, що містять похідні за змінними ρ (тому результат дії цього оператора на 1 рівний 1). Продиференціюємо останню рівність за λ і отримаємо:

$$\hat{A}e^{\lambda\hat{A}} = \frac{\partial U(\lambda)}{\partial\lambda}e^{U(\lambda)}\hat{\sigma}(\lambda) + e^{U(\lambda)}\frac{\partial\hat{\sigma}(\lambda)}{\partial\lambda}. \tag{59}$$

Пронесемо функцію $e^{U(\lambda)}$ через оператор $\hat{A}$, а потім скоротимо на цю функцію і знайдемо:

$$\tilde{A}\hat{\sigma} = \frac{\partial U(\lambda)}{\partial\lambda}\hat{\sigma}(\lambda) + \frac{\partial\hat{\sigma}(\lambda)}{\partial\lambda}, \tag{60}$$

де $\tilde{A}$ — це оператор $\hat{A}$, через який пронесено функцію $e^{U(\lambda)}$. Виберемо $U(\lambda)$ у вигляді

$$U(\lambda) = \sum_{\mathbf{q}_1\neq 0} U_2(\mathbf{q}_1)\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1} + \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0} U_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3} +$$
$$+ \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0} U_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}. \tag{61}$$

Тоді для $\tilde{A}$ отримаємо вираз, з якого виділимо неоператорну частину $\tilde{A}_n$ і у прийнятому нами наближенні "двох сум за хвильовим вектором" знайдемо:

$$\tilde{A}_n = -\frac{1}{3!\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0} S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\left[\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_3}\left(2U_2(\mathbf{q}_1) - \frac{1}{S_0(q_1)}\right)\times\right.$$
$$\times\left(2U_2(\mathbf{q}_2) - \frac{1}{S_0(q_2)}\right)\left(2U_2(\mathbf{q}_3) - \frac{1}{S_0(q_3)}\right) + \frac{18}{\sqrt{N}}U_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\times$$
$$\left.\times\left(2U_2(\mathbf{q}_1) - \frac{1}{S_0(q_1)}\right)\left(2U_2(\mathbf{q}_2) - \frac{1}{S_0(q_2)}\right)\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}\right]+$$
$$+\frac{1}{8N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0} S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)\left(2U_2(\mathbf{q}_1) - \frac{1}{S_0(q_1)}\right)\left(2U_2(\mathbf{q}_2) - \frac{1}{S_0(q_2)}\right)\times$$
$$\times\left(2U_2(-\mathbf{q}_1) - \frac{1}{S_0(q_1)}\right)\left(2U_2(-\mathbf{q}_2) - \frac{1}{S_0(q_2)}\right)\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}. \tag{62}$$

Прирівнявши неоператорну частину $\tilde{A}_n$ і вираз для $\partial U(\lambda)/\partial\lambda$, отримаємо такі рівняння:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_2(\mathbf{q}_1)}{\partial\lambda} &= 0,\\
\frac{\partial U_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)}{\partial\lambda} &= -\frac{1}{6}S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\left(2U_2(\mathbf{q}_1)-\frac{1}{S_0(q_1)}\right)\left(2U_2(\mathbf{q}_2)-\frac{1}{S_0(q_2)}\right)\times\\
&\times\left(2U_2(\mathbf{q}_3)-\frac{1}{S_0(q_3)}\right),\\
\frac{\partial U_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)}{\partial\lambda} &= -3S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)U_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\left(2U_2(\mathbf{q}_1)-\frac{1}{S_0(q_1)}\right)\times\\
&\times\left(2U_2(\mathbf{q}_2)-\frac{1}{S_0(q_2)}\right)+\frac{1}{8N}S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)\times\\
&\times\left(2U_2(\mathbf{q}_1)-\frac{1}{S_0(q_1)}\right)^2\left(2U_2(\mathbf{q}_2)-\frac{1}{S_0(q_2)}\right)^2.
\end{aligned}\tag{63}$$

Враховуючи, що при $\lambda = 0$ величини $U_2(\mathbf{q}_1), U_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3), U_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)$ теж рівні нулю, а в знайдених виразах $\lambda = 1$, матимемо:

$$\begin{aligned}
U_2(\mathbf{q}_1) &= 0,\\
U_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3) &= \frac{1}{6}\frac{S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)}{S_0(q_1)S_0(q_2)S_0(q_3)},\\
U_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2) &= -\frac{S_0(q_3)}{4}\left[\frac{S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)}{S_0(q_1)S_0(q_2)S_0(q_3)}\right]^2+\frac{1}{8}\frac{S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)}{S_0^2(q_1)S_0^2(q_2)}.
\end{aligned}\tag{64}$$

Остаточно для якобіана переходу, враховуючи умову нормування, знайдемо такий вираз:

$$\begin{aligned}
J_0(\rho) = V^N{\prod_{\mathbf{q}\neq 0}}'\frac{1}{\pi S_0(q)}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}}{S_0(q)}\right\}\exp\left\{\frac{1}{6N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\left(\frac{\left[S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\right]^2}{S_0(q_1)S_0(q_2)S_0(q_3)}-\right.\right.\\
\left.-\frac{3}{4}\frac{S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)}{S_0(q_1)S_0(q_2)}\right)+\frac{1}{3!\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\frac{S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)}{S_0(q_1)S_0(q_2)S_0(q_3)}\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3}-\\
-\frac{1}{4N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\left(\frac{\left[S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\right]^2}{S_0^2(q_1)S_0^2(q_2)S_0(q_3)}-\frac{1}{2}\frac{S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)}{S_0^2(q_1)S_0^2(q_2)}\right)\times\\
\left.\times\,\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}\right\}.
\end{aligned}\tag{65}$$

Користуючись наведеною вище схемою розрахунку статистичної суми, беручи до уваги вираз для матриці густини і "температурнозалежного якобіана", отримаємо:

$$
\begin{aligned}
Z = \int R(\rho|\rho)J(\rho)(d\rho) = Z_N^0 \int P_{pair}(\rho|\rho)P(\rho|\rho)J_0(\rho)(d\rho) = \\
= Z_N^0 \exp\left[\frac{C_0}{N} + \frac{1}{6N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\left(\frac{\left[S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\right]^2}{S_0(q_1)S_0(q_2)S_0(q_3)} - \frac{3}{4}\frac{S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)}{S_0(q_1)S_0(q_2)}\right)\right]\times \\
\times \exp\Bigg\{2\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0} C_2(\mathbf{q}_1)\left\langle \rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\right\rangle + \frac{2}{N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\Big[\, C_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2) \; - \\
- \frac{1}{8}\frac{\left[S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\right]^2}{S_0^2(q_1)S_0^2(q_2)S_0(q_3)} + \frac{1}{16}\frac{S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)}{S_0^2(q_1)S_0^2(q_2)}\Big]\left\langle \rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}\right\rangle + \\
+ \frac{2}{\sqrt{N}}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\substack{\mathbf{q}_3\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\left[C_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3) + \frac{1}{12}\frac{S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)}{S_0(q_1)S_0(q_2)S_0(q_3)}\right]\left\langle \rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3}\right\rangle + \\
+ \frac{2}{N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\substack{\mathbf{q}_3\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\left[C_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3) + \frac{1}{12}\frac{S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)}{S_0(q_1)S_0(q_2)S_0(q_3)}\right]^2 \times \\
\times \left[6\left\langle \rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_3}\right\rangle - \left\langle \rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3}\right\rangle^2\right]\Bigg\}, \qquad (66)
\end{aligned}
$$

де $C_i = \overline{C}_i - \overline{C}_i^0, i = 0, 2, 3, 4$. Вирази для $\overline{C}_i^0$ можемо отримати із відповідних величин $\overline{C}_i$, якщо в їхніх виразах всюди покласти $\alpha_{q_1} = \alpha_{q_2} = \alpha_{q_3} = 1$. В написаному вище виразі (66) знак середнього $\langle ... \rangle$ має такий зміст:

$$
\langle ... \rangle = \frac{\int \exp\left[-\frac{1}{2}\sum\limits_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\lambda_q S_0(q)+1}{S_0(q)}\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}\right](...)(d\rho)}{\int \exp\left[-\frac{1}{2}\sum\limits_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\lambda_q S_0(q)+1}{S_0(q)}\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}\right](d\rho)},
$$

де

$$
\lambda_q = \Big(\alpha_{q_1}\,\mathrm{th}[\beta E_{q_1}] - \mathrm{th}[\beta \varepsilon_{q_1}]\Big). \qquad (67)
$$

Тому

$$
\left\langle \rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\right\rangle = \frac{S_0(q_1)}{1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)}, \qquad (68)
$$

$$
\left\langle \rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3}\right\rangle = 0, \qquad (69)
$$

$$\langle\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}\rangle=\frac{S_0(q_1)S_0(q_2)}{[1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)]\,[1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)]},\tag{70}$$

$$\langle\rho_{\mathbf{q}_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3}\rho_{-\mathbf{q}_3}\rangle=\frac{S_0(q_1)}{1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)}\frac{S_0(q_2)}{1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)}\frac{S_0(q_3)}{1+\lambda_{q_3}S_0(q_3)}.\tag{71}$$

Після проведених розрахунків отримаємо наступний вираз для статистичної суми:

$$\begin{aligned}
Z=Z_N^0\exp\Bigg\{&-\beta E_0^B+\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq0}\ln\left[\frac{\alpha_q\,\mathrm{th}\left(\frac{\beta E_q}{2}\right)}{\mathrm{th}\left(\frac{\beta\varepsilon_q}{2}\right)}\right]+\sum_{\mathbf{q}\neq0}\ln\left(\frac{1-e^{-\beta\varepsilon_q}}{1-e^{-\beta E_q}}\right)-\\
&-\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq0}\ln\left[1+\lambda_q S_0(q)\right]+\frac{1}{6N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq0}\left(\frac{\left[S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\right]^2}{S_0(q_1)S_0(q_2)S_0(q_3)}-\right.\\
&\left.-\frac{3}{4}\frac{S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)}{S_0(q_1)S_0(q_2)}\right)+\frac{1}{8N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq0}\left[\prod_{i=1}^{2}\frac{\lambda_{q_i}}{1+\lambda_{q_i}S_0(q_i)}\right]S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)-\\
&-\frac{1}{3!}\frac{1}{2N}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq0}\left[\prod_{i=1}^{3}\frac{\lambda_{q_i}}{1+\lambda_{q_i}S_0(q_i)}+\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{1+\lambda_{q_i}S_0(q_i)}\right]\left[S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\right]^2\Bigg\}\times\\
\times\exp\Bigg\{&C_0+2\sum_{\mathbf{q}_1\neq0}\frac{C_2(\mathbf{q}_1)S_0(q_1)}{1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)}+\frac{2}{N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq0}C_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)\frac{S_0(q_1)}{1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)}\times\\
&\times\frac{S_0(q_2)}{1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)}+\frac{2}{N}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq0}\frac{C_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)}{[1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)][1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)][1+\lambda_{q_3}S_0(q_3)]}+\\
&+\frac{12}{N}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq0}C_3^2(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\frac{S_0(q_1)S_0(q_2)S_0(q_3)}{[1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)][1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)][1+\lambda_{q_3}S_0(q_3)]}\Bigg\}.
\end{aligned}\tag{72}$$

Проаналізуймо отриманий результат (72) в границі низьких температур. У цій границі $S_0(q)=1$, $S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)=1$, $S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)=0$, тому вирази для середніх (68), (69) (70), (71) у зазначеній границі збігаються з відповідними середніми (16), (17), (18), (19), розрахованими з матрицею густини в наближенні парних кореляцій без виділеної матриці густини ідеального бозе-газу. Беручи до уваги знайдені вирази (33), (34), (35), (36), (37), (38), (39), а також той факт, що в границі низьких температур статистична сума ідеального бозе-газу $Z_N^0=1$, дійдемо висновку, що знайдений вираз для статистичної суми (72) в границі низьких температур набуває вигляду:

$$Z = e^{-\beta E_0}, \tag{73}$$

де E_0 задається вже знайденою раніше формулою (32).

Статистична сума в границі високих температур. Для статистичної суми (72), розрахованої на основі матриці густини з виділеною матрицею густини ідеального бозе-газу, за високих температур в квазікласичній границі внески від три- і чотричастинкових кореляцій є малими. Залишаються лише внески від парних кореляцій. Так в згаданій границі знайдений вираз для статистичної суми (72) переходить в уже відомий [8]:

$$Z = Z_N^0 \exp\left\{-\beta\frac{N(N-1)}{2V}\nu_0 - \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\left[\ln\left(1+\beta\frac{N}{V}\nu_q\right) - \beta\frac{N}{V}\nu_q\right]\right\}, \tag{74}$$

де

$$Z_N^0 = \frac{V^N}{N!}\left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2}\right)^{3N/2}. \tag{75}$$

Натомість, якщо в виразі для статистичної суми (24), розрахованої на основі матриці густини без виділеної матриці густини ідеального бозе-газу, спрямувати $T \to \infty$ ($\beta \to 0$), то ми знайдемо:

$$Z \underset{\beta\to 0}{=} e^{-\beta F_0} \exp\left[\frac{1}{2\beta}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\substack{\mathbf{q}_3\neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\frac{(\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)^2}{\alpha_{q_1}E_{q_1}} - \frac{1}{2\beta}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{(q_1^2+q_2^2)}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}E_{q_1}E_{q_2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{2\beta}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\substack{\mathbf{q}_3\neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2\frac{(\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)^2}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}E_{q_1}E_{q_2}E_{q_3}} + O(\beta)\right]. \tag{76}$$

При цьому ми скористалися виразами для величин $\overline{C}_0$, $\overline{C}_2(\mathbf{q}_1)$, $\overline{C}_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)$, $\overline{C}_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)$ в границі високих температур, отриманими з допомогою результатів, наведених в **додатку Є**:

$$\overline{C}_0 \underset{\beta\to 0}{=} O(\beta), \qquad \overline{C}_2(\mathbf{q_1}) \underset{\beta\to 0}{=} \frac{1}{8}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\substack{\mathbf{q}_3\neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}(\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)^2 + O(\beta^2),$$
$$\overline{C}_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3) \underset{\beta\to 0}{=} -\frac{\beta}{8}\frac{\hbar^2}{2m}(\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3),$$
$$\overline{C}_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2) \underset{\beta\to 0}{=} -\frac{\beta}{16}\sum_{\mathbf{q_1}\neq 0}\sum_{\mathbf{q_2}\neq 0}\frac{\hbar^2}{2m}(q_1^2+q_2^2) + O(\beta^3). \tag{77}$$

Аналізуючи рівність (76), дійдемо висновку, що вираз для статистичної суми (24), який розрахований на основі матриці густини без виділеної матриці густини ідеального бозе-газу, є розбіжним в границі високих температур, а тому і некоректним у цій границі, як уже зазначалося вище.

Висновок. У статті, якщо керуватися виразом для матриці густини бозе-частинок, що взаємодіють, у координатному зображенні для широкого інтервалу температур із врахуванням прямих три- і чотиричастинкових кореляцій в наближенні "двох сум за хвильовим вектором" [20], нам вдалося розрахувати статистичну суму в цьому ж наближенні. Отриманий результат проаналізовано в границі високих і низьких температур. В граничному випадку низьких температур, $\beta \to \infty$, вираз для знайденої статистичної суми має очікуваний вигляд больцманівського фактора з енергією основного стану: $e^{-E_0/T}$, де T — температура системи, E_0 — енергія основного стану в наближенні "двох сум за хвильовим вектором", і узгоджується з виразом, який можна отримати на основі роботи [27]. За високих температур у квазікласичній межі отриманий вираз збігається із виразом для статистичної суми в наближенні парних кореляцій [8] і має вигляд добутку статистичної суми ідеального газу на фактор, що враховує внесок від парних кореляцій.

Отримані результати можуть бути застосовані для розрахунку термодинамічних і структурних функцій, таких як енергія, теплоємність, парний структурний фактор, що і буде предметом нашої наступної статті. Зазначимо також, що знайдений вираз для статистичної суми у постRPA-наближенні є досить громіздким, а тому безпосередньо його проаналізувати і працювати з ним є досить складно, однак це завдання для обчислювальної машини, що стане необхідним інструментом у наших подальших дослідженнях.

Додаток А

$$\bar{c}_0 = -\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\frac{\hbar^2}{2m}(\mathbf{q}_1^2+\mathbf{q}_2^2)\overline{Y}_1^{00}(1',1,2',2) + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\substack{\mathbf{q}_3\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)\times$$
$$\times\sum_{j=0}^{1}\left[\sum_{\substack{1\le a<b\le 3\\ a,b\neq c\le 3}}(\mathbf{q}_a\mathbf{q}_b)\overline{Y}^{00}\begin{pmatrix}1' & 2' & 3'\\ a^j & b^j & c^j\end{pmatrix} + (\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)\overline{Y}^{10}\begin{pmatrix}1' & 2' & 3'\\ 1^j & 2^j & 3^j\end{pmatrix}+\right.$$
$$\left.+\sum_{\substack{1\le a<b\le 3\\ a,b\neq c\le 3}}(\mathbf{q}_a\mathbf{q}_b)\overline{Y}^{01}\begin{pmatrix}1' & 2' & 3'\\ a^j & b^j & c^j\end{pmatrix} + (\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)\overline{Y}^{11}\begin{pmatrix}1' & 2' & 3'\\ 1^j & 2^j & 3^j\end{pmatrix}\right], \tag{A.1}$$

$$\bar{c}_2(1^{j_1},-1^{i_1}) = -\frac{1}{2N}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\frac{\hbar^2}{2m}(\mathbf{q}_1^2+\mathbf{q}_2^2)\overline{Y}_1^{10}(1^{j_1},1^{i_1},2',2)+$$

$$+\frac{1}{8N}\sum_{\substack{\mathbf{q}_2\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2\sum_{\substack{i=0\\ i_2=i_3=1-i\\ j_2=j_3=i}}^{1}\sum_{j=0}^{1}\left[\sum_{\substack{1\le\mu<\nu\le 3\\ \mu,\nu\neq\eta\le 3}}\sum_{\substack{1\le a<b\le 3\\ a,b\neq c\le 3}}(\mathbf{q}_\mu\mathbf{q}_\nu)(\mathbf{q}_a\mathbf{q}_b)\times\right.$$

$$\times(-1)^{i_\mu+i_\nu+j_a+j_b}\overline{Y}_2^{00}\begin{pmatrix}\mu^{|i-i_\mu|} & \nu^{|i-i_\nu|} & \eta^{|i-i_\eta|}\\ a^{|j-j_a|} & b^{|j-j_b|} & c^{|j-j_c|}\end{pmatrix}+$$

$$+\sum_{\substack{1\le\mu<\nu\le 3\\ \mu,\nu\neq\eta\le 3}}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)(-1)^{i_\mu+i_\nu}\overline{Y}_2^{10}\begin{pmatrix}\mu^{|i-i_\mu|} & \nu^{|i-i_\nu|} & \eta^{|i-i_\eta|}\\ 1^{|j-j_1|} & 2^{|i-j|} & 3^{|i-j|}\end{pmatrix}+$$

$$+\sum_{\substack{1\le a<b\le 3\\ a,b\neq c\le 3}}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)(-1)^{j_a+j_b}\overline{Y}_2^{01}\begin{pmatrix}1^{|i-i_1|} & 2' & 3'\\ a^{|j-j_a|} & b^{|j-j_b|} & c^{|j-j_c|}\end{pmatrix}+$$

$$\left.+(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)^2\overline{Y}_2^{11}\begin{pmatrix}1^{|i-i_1|} & 2' & 3'\\ 1^{|j-j_1|} & 2^{|i-j|} & 3^{|i-j|}\end{pmatrix}\right], \tag{A.2}$$

$$\overline{c}_3(1^{i_1},2^{i_2},3^{i_3})=-\frac{1}{12}\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{\substack{1\le a<b\le 3\\ a,b\neq c\le 3}}(\mathbf{q}_a\mathbf{q}_b)\overline{Y}_3(a^{i_a},b^{i_b},c^{i_c}), \tag{A.3}$$

$$\overline{c}_4(1^{j_1},-1^{i_1},2^{j_2},-2^{i_2})=-\frac{1}{8}\frac{\hbar^2}{2m}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)\overline{Y}_1^{11}(1^{j_1},1^{i_1},2^{j_2},2^{i_2})+$$

$$+\frac{1}{16}\sum_{\substack{\mathbf{q}_3\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2\sum_{\substack{i=0\\ i_3=1-i\\ j_3=i}}^{1}\sum_{j=0}^{1}\left[\sum_{\substack{1\le\mu<\nu\le 3\\ \mu,\nu\neq\eta\le 3}}\sum_{\substack{1\le a<b\le 3\\ a,b\neq c\le 3}}(\mathbf{q}_\mu\mathbf{q}_\nu)(\mathbf{q}_a\mathbf{q}_b)\times\right.$$

$$\times(-1)^{i_\mu+i_\nu+j_a+j_b}\overline{Y}_4^{00}\begin{pmatrix}\mu^{|i-i_\mu|} & \nu^{|i-i_\nu|} & \eta^{|i-i_\eta|}\\ a^{|j-j_a|} & b^{|j-j_b|} & c^{|j-j_c|}\end{pmatrix}+$$

$$+\sum_{\substack{1\le\mu<\nu\le 3\\ \mu,\nu\neq\eta\le 3}}(\mathbf{q}_\mu\mathbf{q}_\nu)(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)(-1)^{i_\mu+i_\nu}\overline{Y}_4^{10}\begin{pmatrix}\mu^{|i-i_\mu|} & \nu^{|i-i_\nu|} & \eta^{|i-i_\eta|}\\ 1^{|j-j_1|} & 2^{|j-j_2|} & 3^{|i-j|}\end{pmatrix}+$$

$$+\sum_{\substack{1\le a<b\le 3\\ a,b\neq c\le 3}}(\mathbf{q}_a\mathbf{q}_b)(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)(-1)^{j_a+j_b}\overline{Y}_4^{01}\begin{pmatrix}1^{|i-i_1|} & 2^{|i-i_2|} & 3'\\ a^{|j-j_a|} & b^{|j-j_b|} & c^{|j-j_c|}\end{pmatrix}+$$

$$\left.+(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)^2\overline{Y}_4^{11}\begin{pmatrix}1^{|i-i_1|} & 2^{|i-i_2|} & 3'\\ 1^{|j-j_1|} & 2^{|j-j_2|} & 3^{|i-j|}\end{pmatrix}\right]. \tag{A.4}$$

У поданих вище виразах ми ввели такі позначення:

$$\overline{Y}^{p_1p_2}\begin{pmatrix} \mu^{|i-i_\mu|} & \nu^{|i-i_\nu|} & \eta^{|i-i_\eta|} \\ a^{|j-j_a|} & b^{|j-j_b|} & c^{|j-j_c|} \end{pmatrix} = \frac{(\alpha_{q_a}\alpha_{q_b})^{1-p_1} I^{p_1p_2}\begin{pmatrix} \mu^{|i-i_\mu|} & \nu^{|i-i_\nu|} & \eta^{|i-i_\eta|} \\ a^{|j-j_a|} & b^{|j-j_b|} & c^{|j-j_c|} \end{pmatrix}}{\prod\limits_{l=1}^{3} \mathrm{sh}[\beta E_{q_l}](\alpha_{q_1}\alpha_{q_2})^{p_2}\alpha_{q_3}}, \tag{A.5}$$

$$\overline{Y}_1^{p_1p_2}(1^{j_1},1^{i_1},2^{j_2},2^{i_2}) = \frac{L_3(1^{j_1},1^{i_1},2^{j_2},2^{i_2})}{(\mathrm{sh}[\beta E_{q_1}])^{1+p_1}(\mathrm{sh}[\beta E_{q_2}])^{1+p_2}\alpha_{q_1}^{1-p_1}\alpha_{q_2}^{1-p_2}}, \tag{A.6}$$

$$\overline{Y}_2^{p_1p_2}\begin{pmatrix} \mu^{|i-i_\mu|} & \nu^{|i-i_\nu|} & \eta^{|i-i_\eta|} \\ a^{|j-j_a|} & b^{|j-j_b|} & c^{|j-j_c|} \end{pmatrix} = \frac{(\alpha_{q_a}\alpha_{q_b})^{1-p_1} I^{p_1p_2}\begin{pmatrix} \mu^{|i-i_\mu|} & \nu^{|i-i_\nu|} & \eta^{|i-i_\eta|} \\ a^{|j-j_a|} & b^{|j-j_b|} & c^{|j-j_c|} \end{pmatrix}}{\mathrm{sh}[\beta E_{q_1}]\prod\limits_{l=1}^{3} \mathrm{sh}[\beta E_{q_l}](\alpha_{q_2}\alpha_{q_3})^{p_2}\alpha_{q_1}^{p_2-1}\alpha_{q_\eta}^{1-p_2}}, \tag{A.7}$$

$$\overline{Y}_3(a^{i_a},b^{i_b},c^{i_c}) = \frac{\alpha_{q_a}\alpha_{q_b}(-1)^{i_1+i_2}L_1(a^{i_a},b^{i_b},c^{i_c}) + L_2(1^{i_1},2^{i_2},3^{i_3})}{\prod\limits_{l=1}^{3}\mathrm{sh}[\beta E_{q_l}]}, \tag{A.8}$$

$$\overline{Y}_4^{p_1p_2}\begin{pmatrix} \mu^{|i-i_\mu|} & \nu^{|i-i_\nu|} & \eta^{|i-i_\eta|} \\ a^{|j-j_a|} & b^{|j-j_b|} & c^{|j-j_c|} \end{pmatrix} = \frac{(\alpha_{q_a}\alpha_{q_b})^{1-p_1} I^{p_1p_2}\begin{pmatrix} \mu^{|i-i_\mu|} & \nu^{|i-i_\nu|} & \eta^{|i-i_\eta|} \\ a^{|j-j_a|} & b^{|j-j_b|} & c^{|j-j_c|} \end{pmatrix}}{\prod\limits_{l=1}^{2}\mathrm{sh}[\beta E_{q_l}]\prod\limits_{m=1}^{3} \mathrm{sh}[\beta E_{q_m}](\alpha_{q_1}\alpha_{q_2})^{p_2-1}\alpha_{q_3}^{p_2}\alpha_{q_\eta}^{1-p_2}}, \tag{A.9}$$

де

$$L_1(1^{i_1},2^{i_2}|3^{i_3}) = \int\limits_0^\beta F_1(1^{i_1},2^{i_2}|3^{i_3};\beta_1)d\beta_1, \tag{A.10}$$

$$L_2(1^{i_1},2^{i_2},3^{i_3}) = \int\limits_0^\beta S_1(1^{i_1},2^{i_2}|3^{i_3};\beta_1)d\beta_1, \tag{A.11}$$

$$L_3(1^{j_1},1^{i_1},2^{j_2},2^{i_2}) = \int\limits_0^\beta S_1(1^{j_1},1^{i_1},2^{j_2},2^{i_2};\beta_1)d\beta_1, \tag{A.12}$$

$$I^{00}\begin{pmatrix} \mu^{i_\mu} & \nu^{i_\nu} & \eta^{i_\eta} \\ a^{j_a} & b^{j_b} & c^{j_c} \end{pmatrix} = \int\limits_0^\beta d\beta_1 \int\limits_0^{\beta_1} d\beta_2 F_2(\mu^{i_\mu},\nu^{i_\nu}|\eta^{i_\eta}) F_1(a^{j_a}, b^{j_b}|c^{j_c}),$$
$$I^{10}\begin{pmatrix} \mu^{i_\mu} & \nu^{i_\nu} & \eta^{i_\eta} \\ a^{j_a} & b^{j_b} & c^{j_c} \end{pmatrix} = \int\limits_0^\beta d\beta_1 \int\limits_0^{\beta_1} d\beta_2 F_2(\mu^{i_\mu},\nu^{i_\nu}|\eta^{i_\eta}) S_1(a^{j_a}, b^{j_b}, c^{j_c}),$$
$$I^{01}\begin{pmatrix} \mu^{i_\mu} & \nu^{i_\nu} & \eta^{i_\eta} \\ a^{j_a} & b^{j_b} & c^{j_c} \end{pmatrix} = \int\limits_0^\beta d\beta_1 \int\limits_0^{\beta_1} d\beta_2 S_2(\mu^{i_\mu},\nu^{i_\nu},\eta^{i_\eta}) F_1(a^{j_a}, b^{j_b}|c^{j_c}),$$
$$I^{11}\begin{pmatrix} \mu^{i_\mu} & \nu^{i_\nu} & \eta^{i_\eta} \\ a^{j_a} & b^{j_b} & c^{j_c} \end{pmatrix} = \int\limits_0^\beta d\beta_1 \int\limits_0^{\beta_1} d\beta_2 S_2(\mu^{i_\mu},\nu^{i_\nu},\eta^{i_\eta}) S_1(a^{j_a}, b^{j_b}, c^{j_c}). \qquad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{sh}\left[\left(\beta - \frac{\beta_j}{2}\right) E_{q_i}\right] = S_j(i), \qquad \mathrm{sh}\left[\frac{\beta_j}{2} E_{q_i}\right] = S_j(i'),\\
&\mathrm{ch}\left[\left(\beta - \frac{\beta_j}{2}\right) E_{q_i}\right] = C_j(i), \qquad \mathrm{ch}\left[\frac{\beta_j}{2} E_{q_i}\right] = C_j(i'),\\
&S_j(i_1)S_j(i_2')\dots S_j(i_n) = S_j(i_1, i_2', \dots, i_n),\\
&C_j(i_1)C_j(i_k')S_j(i_{k+1})\dots S_j(i_n') = F_j(i_1,\dots,i_k'|i_{k+1},\dots,i_n'),
\end{aligned} \qquad (\text{A.14})$$

причому j, i пробігають, відповідно, значення: $j = 1, 2; i = 1, 2, 3.$

Додаток Б

Розрахуємо $\overline{C}_0$, використовуючи явний вигляд $\overline{c}_0$ (A.1) і беручи до уваги введені позначення (A.5), (A.6), (A.12), (A.13).

$$\overline{Y}_1^{00}(1', 1, 2', 2) = \frac{L_3(1', 1, 2', 2)}{\mathrm{sh}[\beta E_{q_1}]\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_2}]\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}} = $$
$$= \frac{\int\limits_0^\beta \mathrm{sh}[(\beta-\beta_1)E_{q_1}]\mathrm{sh}[\beta_1 E_{q_1}]\mathrm{sh}[(\beta-\beta_1)E_{q_2}]\mathrm{sh}[\beta_1 E_{q_2}]d\beta_1}{\mathrm{sh}[\beta E_{q_1}]\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_2}]\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}}. \qquad (\text{Б.1})$$

$$\sum_{j=0}^{1} \overline{Y}^{00}\begin{pmatrix} 1' & 2' & 3' \\ a^j & b^j & c^j \end{pmatrix} = \frac{\alpha_{q_a}\alpha_{q_b}}{\alpha_{q_3}\prod\limits_{l=1}^{3}\mathrm{sh}[\beta E_{q_l}]}\left[I^{00}\begin{pmatrix} 1' & 2' & 3' \\ a & b & c \end{pmatrix} + I^{00}\begin{pmatrix} 1' & 2' & 3' \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}\right]. \qquad (\text{Б.2})$$

Користуючись співвідношеннями

$$\operatorname{ch}\left[\left(\beta-\frac{\beta_1}{2}\right)E_{q_a}\right]\operatorname{ch}\left[\left(\beta-\frac{\beta_1}{2}\right)E_{q_b}\right]\operatorname{sh}\left[\left(\beta-\frac{\beta_1}{2}\right)E_{q_c}\right]=$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{\pm_1}\sum_{\pm_2}\operatorname{sh}\left[\left(\beta-\frac{\beta_1}{2}\right)(E_{q_c}\pm_1 E_{q_b}\pm_2 E_{q_a})\right],$$
$$\operatorname{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_a}\right]\operatorname{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_b}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_c}\right]=\frac{1}{4}\sum_{\pm_1}\sum_{\pm_2}\operatorname{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}(E_{q_c}\pm_1 E_{q_b}\pm_2 E_{q_a})\right],$$
$$\operatorname{sh}\left[\left(\beta-\frac{\beta_1}{2}\right)(E_{q_c}\pm_1 E_{q_b}\pm_2 E_{q_a})\right]+\operatorname{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}(E_{q_c}\pm_1 E_{q_b}\pm_2 E_{q_a})\right]=$$
$$=2\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_c}\pm_1 E_{q_b}\pm_2 E_{q_a})\right]\operatorname{ch}\left[(\beta-\beta_1)(E_{q_c}\pm_1 E_{q_b}\pm_2 E_{q_a})\right], \tag{Б.3}$$

знайдемо, що

$$I^{00}\begin{pmatrix}1' & 2' & 3'\\ a & b & c\end{pmatrix}+I^{00}\begin{pmatrix}1' & 2' & 3'\\ a' & b' & c'\end{pmatrix}=$$
$$=\int_0^\beta \operatorname{ch}\left[\left(\beta-\frac{\beta_1}{2}\right)E_{q_a}\right]\operatorname{ch}\left[\left(\beta-\frac{\beta_1}{2}\right)E_{q_b}\right]\operatorname{sh}\left[\left(\beta-\frac{\beta_1}{2}\right)E_{q_c}\right]d\beta_1\times$$
$$\times\int_0^{\beta_1}\operatorname{ch}\left[\frac{\beta_2}{2}E_{q_1}\right]\operatorname{ch}\left[\frac{\beta_2}{2}E_{q_2}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{\beta_2}{2}E_{q_3}\right]d\beta_2+\int_0^\beta\operatorname{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_a}\right]\operatorname{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_b}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_c}\right]d\beta_1\times$$
$$\times\int_0^{\beta_1}\operatorname{ch}\left[\frac{\beta_2}{2}E_{q_a}\right]\operatorname{ch}\left[\frac{\beta_2}{2}E_{q_b}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{\beta_2}{2}E_{q_c}\right]d\beta_2=\frac{1}{2}\sum_{\pm_1}\sum_{\pm_2}\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_c}\pm_1 E_{q_b}\pm_2 E_{q_a})\right]\times$$
$$\times\int_0^\beta\operatorname{ch}[(\beta-\beta_1)(E_{q_c}\pm_1 E_{q_b}\pm_2 E_{q_a})]\,d\beta_1\int_0^{\beta_1}\operatorname{ch}\left[\frac{\beta_2}{2}E_{q_1}\right]\operatorname{ch}\left[\frac{\beta_2}{2}E_{q_2}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{\beta_2}{2}E_{q_3}\right]d\beta_2.$$

В останньому подвійному інтегралі змінимо порядок інтегрування і отримаємо:

$$I^{00}\begin{pmatrix}1' & 2' & 3'\\ a & b & c\end{pmatrix}+I^{00}\begin{pmatrix}1' & 2' & 3'\\ a' & b' & c'\end{pmatrix}=$$
$$=\frac{1}{2}\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_c}\pm_1 E_{q_b}\pm_2 E_{q_a})\right]\int_0^\beta\operatorname{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_1}\right]\operatorname{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_2}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]d\beta_1\times$$
$$\times\int_{\beta_1}^\beta\operatorname{ch}\left[(\beta-\beta_2)(E_{q_c}\pm_1 E_{q_b}\pm_2 E_{q_a})\right]d\beta_2=\sum_{\pm_1}\sum_{\pm_2}\frac{\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_c}\pm_1 E_{q_b}\pm_2 E_{q_a})\right]}{E_{q_c}\pm_1 E_{q_b}\pm_2 E_{q_a}}\times$$
$$\times\int_0^\beta\operatorname{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_1}\right]\operatorname{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_2}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\operatorname{sh}\left[(\beta-\beta_1)(E_{q_c}\pm_1 E_{q_b}\pm_2 E_{q_a})\right]d\beta_1.$$

Отже,

$$\sum_{j=0}^{1}\overline{Y}^{00}\begin{pmatrix}1' & 2' & 3'\\ a^j & b^j & c^j\end{pmatrix}=\frac{\alpha_{q_a}\alpha_{q_b}}{\alpha_{q_3}\prod\limits_{l=1}^{3}\mathrm{sh}[\beta E_{q_l}]}\sum_{\pm_1}\sum_{\pm_2}\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_c}\pm_1 E_{q_b}\pm_2 E_{q_a})\right]}{E_{q_c}\pm_1 E_{q_b}\pm_2 E_{q_a}}\times$$
$$\times\int\limits_0^{\beta}\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_1}\right]\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_2}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\mathrm{sh}[(\beta-\beta_1)\left(E_{q_c}\pm_1 E_{q_b}\pm_2 E_{q_a}\right)]\,d\beta_1. \tag{Б.4}$$

В такий же спосіб можна показати, що

$$\sum_{j=0}^{1}\overline{Y}^{01}\begin{pmatrix}1' & 2' & 3'\\ a^j & b^j & c^j\end{pmatrix}=\frac{\alpha_{q_a}\alpha_{q_b}}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}\prod\limits_{l=1}^{3}\mathrm{sh}[\beta E_{q_l}]}\sum_{\pm_1}\sum_{\pm_2}\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_c}\pm_1 E_{q_b}\pm_2 E_{q_a})\right]}{E_{q_c}\pm_1 E_{q_b}\pm_2 E_{q_a}}\times$$
$$\times\int\limits_0^{\beta}\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_1}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_2}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\mathrm{sh}[(\beta-\beta_1)\left(E_{q_c}\pm_1 E_{q_b}\pm_2 E_{q_a}\right)]\,d\beta_1, \tag{Б.5}$$

$$\sum_{j=0}^{1}\overline{Y}^{10}\begin{pmatrix}1' & 2' & 3'\\ 1^j & 2^j & 3^j\end{pmatrix}=\frac{1}{\alpha_{q_3}\prod\limits_{l=1}^{3}\mathrm{sh}[\beta E_{q_l}]}\sum_{\pm_1}\sum_{\pm_2}\frac{\pm_1\pm_2\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_c}\pm_1 E_{q_b}\pm_2 E_{q_a})\right]}{E_{q_c}\pm_1 E_{q_b}\pm_2 E_{q_a}}\times$$
$$\times\int\limits_0^{\beta}\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_1}\right]\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_2}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\mathrm{sh}[(\beta-\beta_1)\left(E_{q_c}\pm_1 E_{q_b}\pm_2 E_{q_a}\right)]\,d\beta_1, \tag{Б.6}$$

$$\sum_{j=0}^{1}\overline{Y}^{11}\begin{pmatrix}1' & 2' & 3'\\ 1^j & 2^j & 3^j\end{pmatrix}=\frac{1}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}\prod\limits_{l=1}^{3}\mathrm{sh}[\beta E_{q_l}]}\sum_{\pm_1}\sum_{\pm_2}\frac{\pm_1\pm_2\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_c}\pm_1 E_{q_b}\pm_2 E_{q_a})\right]}{E_{q_c}\pm_1 E_{q_b}\pm_2 E_{q_a}}\times$$
$$\times\int\limits_0^{\beta}\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_1}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_2}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\mathrm{sh}[(\beta-\beta_1)\left(E_{q_c}\pm_1 E_{q_b}\pm_2 E_{q_a}\right)]\,d\beta_1, \tag{Б.7}$$

Додаток В

Розрахуємо $\overline{C}_2(\mathbf{q}_1)$, використовуючи явний вигляд $\overline{c}_2$ (А.2) і беручи до уваги введені позначення (А.6), (А.7), (А.12), (А.13).

$$\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{j_1=0}^{1}\overline{Y}_1^{00}(1^{i_1},1^{j_1},2',2)=\frac{\sum\limits_{i_1=0}^{1}\sum\limits_{j_1=0}^{1}L_3(1^{i_1},1^{j_1},2',2)}{\mathrm{sh}^2[\beta E_{q_1}]\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_2}]\alpha_{q_2}}=\frac{L_3(1+1',1+1',2',2)}{\mathrm{sh}^2[\beta E_{q_1}]\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_2}]\alpha_{q_2}}=$$

$$=\frac{\int\limits_0^\beta(\mathrm{sh}\,[(\beta-\beta_1)E_{q_1}]+\mathrm{sh}\,[\beta_1E_{q_1}])^2\,\mathrm{sh}\,[(\beta-\beta_1)E_{q_2}]\,\mathrm{sh}\,[\beta_1E_{q_2}]\,d\beta_1}{\mathrm{sh}^2[\beta E_{q_1}]\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_2}]\alpha_{q_2}}=$$

$$=\frac{\int\limits_0^\beta\mathrm{ch}^2\left[\left(\frac{\beta}{2}-\beta_1\right)E_{q_1}\right]\mathrm{sh}\,[(\beta-\beta_1)E_{q_2}]\,\mathrm{sh}\,[\beta_1E_{q_2}]\,d\beta_1}{\mathrm{sh}^2[\beta E_{q_1}]\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_2}]\alpha_{q_2}}. \tag{B.1}$$

$$\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{j_1=0}^{1}\sum_{\substack{i=0\\ i_2=i_3=1-i\\ j_2=j_3=i}}^{1}\sum_{j=0}^{1}(-1)^{i_\mu+i_\nu+j_a+j_b}\overline{Y}_2^{00}\begin{pmatrix}\mu^{|i-i_\mu|} & \nu^{|i-i_\nu|} & \eta^{|i-i_\eta|}\\ a^{|j-j_a|} & b^{|j-j_b|} & c^{|j-j_c|}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{\alpha_{q_1}\alpha_{q_a}\alpha_{q_b}}{\mathrm{sh}[\beta E_{q_1}]\prod\limits_{l=1}^{3}\mathrm{sh}[\beta E_{q_l}]\alpha_{q_\eta}}\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{j_1=0}^{1}(-1)^{i_\mu+i_\nu+j_a+j_b}\left[\underset{\substack{i_2=i_3=1\\ j_2=j_3=0}}{I^{00}}\begin{pmatrix}\mu^{i_\mu} & \nu^{i_\nu} & \eta^{i_\eta}\\ a^{j_a} & b^{j_b} & c^{j_c}\end{pmatrix}+\right.$$

$$+\underset{\substack{i_2=i_3=1\\ j_2=j_3=0}}{I^{00}}\begin{pmatrix}\mu^{i_\mu} & \nu^{i_\nu} & \eta^{i_\eta}\\ a^{1-j_a} & b^{1-j_b} & c^{1-j_c}\end{pmatrix}+\underset{\substack{i_2=i_3=0\\ j_2=j_3=1}}{I^{00}}\begin{pmatrix}\mu^{1-i_\mu} & \nu^{1-i_\nu} & \eta^{1-i_\eta}\\ a^{j_a} & b^{j_b} & c^{j_c}\end{pmatrix}+$$

$$\left.+\underset{\substack{i_2=i_3=0\\ j_2=j_3=1}}{I^{00}}\begin{pmatrix}\mu^{1-i_\mu} & \nu^{1-i_\nu} & \eta^{1-i_\eta}\\ a^{1-j_a} & b^{1-j_b} & c^{1-j_c}\end{pmatrix}\right]=2\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{j_1=0}^{1}(-1)^{i_\mu+i_\nu+j_a+j_b}\times$$

$$\times\left[\underset{\substack{i_2=i_3=1\\ j_2=j_3=0}}{I^{00}}\begin{pmatrix}\mu^{i_\mu} & \nu^{i_\nu} & \eta^{i_\eta}\\ a^{j_a} & b^{j_b} & c^{j_c}\end{pmatrix}+\underset{\substack{i_2=i_3=1\\ j_2=j_3=1}}{I^{00}}\begin{pmatrix}\mu^{i_\mu} & \nu^{i_\nu} & \eta^{i_\eta}\\ a^{j_a} & b^{j_b} & c^{j_c}\end{pmatrix}\right]. \tag{B.2}$$

Нехай $\mu=1,\nu=2,\eta=3,a=1,b=2,c=3$. Тоді

$$2\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{j_1=0}^{1}\left[(-1)^{i_1+j_1+1}I^{00}\begin{pmatrix}1^{i_1} & 2' & 3'\\ 1^{j_1} & 2 & 3\end{pmatrix}+(-1)^{i_1+j_1+2}I^{00}\begin{pmatrix}1^{i_1} & 2' & 3'\\ 1^{j_1} & 2' & 3'\end{pmatrix}\right]=$$

$$=-I^{00}\begin{pmatrix}1-1' & 2' & 3'\\ 1-1' & 2 & 3\end{pmatrix}+I^{00}\begin{pmatrix}1-1' & 2' & 3'\\ 1-1' & 2' & 3'\end{pmatrix}, \tag{B.3}$$

де

$$I^{00}\begin{pmatrix}1-1' & 2' & 3'\\ 1-1' & 2 & 3\end{pmatrix}=\int\limits_0^{\beta}\left(\mathrm{ch}\left[\left(\beta-\frac{\beta_1}{2}\right)E_{q_1}\right]-\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_1}\right]\right)\mathrm{ch}\left[\left(\beta-\frac{\beta_1}{2}\right)E_{q_2}\right]\times$$
$$\times\,\mathrm{ch}\left[\left(\beta-\frac{\beta_1}{2}\right)E_{q_3}\right]d\beta_1\int\limits_0^{\beta_1}\left(\mathrm{ch}\left[\left(\beta-\frac{\beta_2}{2}\right)E_{q_1}\right]-\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_2}{2}E_{q_1}\right]\right)\times$$
$$\times\,\mathrm{ch}\left[\left(\beta-\frac{\beta_2}{2}\right)E_{q_2}\right]\mathrm{ch}\left[\left(\beta-\frac{\beta_2}{2}\right)E_{q_3}\right]d\beta_2, \tag{B.4}$$

$$I^{00}\begin{pmatrix}1-1' & 2' & 3'\\ 1-1' & 2' & 3'\end{pmatrix}=\int\limits_0^{\beta}\left(\mathrm{ch}\left[\left(\beta-\frac{\beta_1}{2}\right)E_{q_1}\right]-\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_1}\right]\right)\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_2}\right]\times$$
$$\times\,\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]d\beta_1\int\limits_0^{\beta_1}\left(\mathrm{ch}\left[\left(\beta-\frac{\beta_2}{2}\right)E_{q_1}\right]-\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_2}{2}E_{q_1}\right]\right)\times$$
$$\times\,\mathrm{ch}\left[\left(\beta-\frac{\beta_2}{2}\right)E_{q_2}\right]\mathrm{ch}\left[\left(\beta-\frac{\beta_2}{2}\right)E_{q_3}\right]d\beta_2. \tag{B.5}$$

Використовуючи співвідношення

$$\mathrm{ch}\left[\left(\beta-\frac{\beta_1}{2}\right)E_{q_1}\right]-\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_1}\right]=2\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]\mathrm{sh}\left[\left(\frac{\beta-\beta_1}{2}\right)E_{q_1}\right],$$
$$\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_2}\right]\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]=\frac{1}{2}\left(\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}(E_{q_3}+E_{q_2})\right]+\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}(E_{q_3}-E_{q_2})\right]\right),$$

$$\mathrm{ch}\left[\left(\beta-\frac{\beta_1}{2}\right)E_{q_2}\right]\mathrm{ch}\left[\left(\beta-\frac{\beta_1}{2}\right)E_{q_3}\right]=\frac{1}{2}\left(\mathrm{sh}\left[\left(\beta-\frac{\beta_1}{2}\right)(E_{q_3}+E_{q_2})\right]+\right.$$
$$\left.+\,\mathrm{sh}\left[\left(\beta-\frac{\beta_1}{2}\right)(E_{q_3}-E_{q_2})\right]\right),$$

$$\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}(E_{q_3}\pm E_{q_2})\right]-\mathrm{sh}\left[\left(\beta-\frac{\beta_1}{2}\right)(E_{q_3}\pm E_{q_2})\right]=-2\,\mathrm{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)(E_{q_3}\pm E_{q_2})\right]\times$$
$$\times\,\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_3}\pm E_{q_2})\right],$$

$$\mathrm{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)(E_{q_3}\pm E_{q_2})\right]=\frac{1}{2}\left(\mathrm{ch}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)(E_{q_3}\pm E_{q_2}+E_{q_1})\right]-\right.$$
$$\left.-\,\mathrm{ch}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)(E_{q_3}\pm E_{q_2}-E_{q_1})\right]\right),$$

і змінюючи порядок інтегрування у виразах (B.4) і (B.5), отримаємо:

$$-I^{00}\begin{pmatrix} 1-1' & 2' & 3' \\ 1-1' & 2 & 3 \end{pmatrix} + I^{00}\begin{pmatrix} 1-1' & 2' & 3' \\ 1-1' & 2' & 3' \end{pmatrix} = -4\,\mathrm{sh}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]\times$$
$$\times\sum_{\pm_1}\sum_{\pm_2}\frac{\pm_1\,\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2})\right]}{E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1}}\int\limits_0^\beta \mathrm{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_2}\right]\times$$
$$\times\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\mathrm{sh}\left[(\beta-\beta_1)\left(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1}\right)\right]d\beta_1. \tag{B.6}$$

Тому

$$\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{j_1=0}^{1}\sum_{\substack{i=0\\ i_2=i_3=1-i\\ j_2=j_3=i}}^{1}\sum_{j=0}^{1}(-1)^{i_1+i_2+j_1+j_2}\overline{Y}_2^{00}\begin{pmatrix} 1^{|i-i_1|} & 2^{|i-i_2|} & 3^{|i-i_3|} \\ 1^{|j-j_1|} & 2^{|j-j_2|} & 3^{|j-j_3|} \end{pmatrix} =$$
$$=\frac{-4\alpha_{q_1}^2\alpha_{q_2}\,\mathrm{sh}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]}{\alpha_{q_3}\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_1}]\prod\limits_{l=1}^{3}\mathrm{sh}[\beta E_{q_l}]}\sum_{\pm_1}\sum_{\pm_2}\frac{\pm_1\,\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2})\right]}{E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1}}\times$$
$$\times\int\limits_0^\beta \mathrm{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_2}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\mathrm{sh}[(\beta-\beta_1)\left(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1}\right)]\,d\beta_1.$$

Схожі розрахунки можна провести і для інших значень μ,ν,η,a,b,c. Як наслідок отримаємо такий результат:

$$\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{j_1=0}^{1}\sum_{\substack{i=0\\ i_2=i_3=1-i\\ j_2=j_3=i}}^{1}\sum_{j=0}^{1}\sum_{\substack{1\le\mu<\nu\le3\\ \mu,\nu\ne\eta\le3}}\sum_{\substack{1\le a<b\le3\\ a,b\ne c\le3}}(\mathbf{q}_\mu\mathbf{q}_\nu)(\mathbf{q}_a\mathbf{q}_b)(-1)^{i_\mu+i_\nu+j_a+j_b}\times$$
$$\times\,\overline{Y}_2^{00}\begin{pmatrix} \mu^{|i-i_\mu|} & \nu^{|i-i_\nu|} & \eta^{|i-i_\eta|} \\ a^{|j-j_a|} & b^{|j-j_b|} & c^{|j-j_c|} \end{pmatrix}=\frac{-8\alpha_{q_1}\,\mathrm{sh}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]}{\mathrm{sh}[\beta E_{q_1}]\prod\limits_{l=1}^{3}\mathrm{sh}[\beta E_{q_l}]}\sum_{\pm_1}\sum_{\pm_2}\frac{\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2})\right]}{E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1}}\times$$
$$\times\left[\pm_1(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)^2\frac{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}}{\alpha_{q_3}}\int\limits_0^\beta \mathrm{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_2}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\times\right.$$
$$\times\,\mathrm{sh}\left[(\beta-\beta_1)\left(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1}\right)\right]d\beta_1\pm_1(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3)\alpha_{q_1}\int\limits_0^\beta \mathrm{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right]\times$$
$$\times\,\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_2}\right]\mathrm{sh}[(\beta-\beta_1)\left(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1}\right)]\,d\beta_1\mp_1(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)(\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)\alpha_{q_2}\times$$

$$\times \int\limits_0^\beta \mathrm{ch}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right]\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_2}\right]\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\mathrm{sh}[(\beta-\beta_1)\,(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1})]\,d\beta_1+$$

$$\pm_1\pm_2(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3)\alpha_{q_1}\int\limits_0^\beta \mathrm{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right]\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_2}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\times$$

$$\times\,\mathrm{sh}[(\beta-\beta_1)\,(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1})]\,d\beta_1\pm_1\pm_2(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3)^2\frac{\alpha_{q_1}\alpha_{q_3}}{\alpha_{q_2}}\int\limits_0^\beta \mathrm{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right]\times$$

$$\times\,\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_2}\right]\mathrm{sh}[(\beta-\beta_1)\,(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1})]d\beta_1\mp_1\pm_2(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3)(\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)\alpha_{q_3}\times$$

$$\times \int\limits_0^\beta \mathrm{ch}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right]\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_2}\right]\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\mathrm{sh}[(\beta-\beta_1)\,(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1})]\,d\beta_1+$$

$$+\,(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)(\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)\alpha_{q_2}\int\limits_0^\beta \mathrm{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right]\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_2}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\times$$

$$\times\,\mathrm{sh}\left[(\beta-\beta_1)\,(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1})\right]d\beta_1+(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3)(\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)\alpha_{q_3}\int\limits_0^\beta \mathrm{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right]\times$$

$$\times\,\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_2}\right]\mathrm{sh}\left[(\beta-\beta_1)\,(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1})\right]d\beta_1-(\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)^2\frac{\alpha_{q_1}\alpha_{q_3}}{\alpha_{q_2}}\times$$

$$\left.\times \int\limits_0^\beta \mathrm{ch}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right]\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_2}\right]\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\mathrm{sh}[(\beta-\beta_1)\,(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1})]d\beta_1\right]. \tag{B.7}$$

Відповідно

$$\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{j_1=0}^{1}\sum_{\substack{i=0\\ i_2=i_3=1-i\\ j_2=j_3=i}}^{1}\sum_{j=0}^{1}\sum_{\substack{1\le\mu<\nu\le 3\\ \mu,\nu\ne\eta\le 3}}(\mathbf{q}_\mu\mathbf{q}_\nu)(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)(-1)^{i_\mu+i_\nu}\times$$

$$\times\,\overline{Y}_2^{10}\begin{pmatrix}\mu^{|i-i_\mu|} & \nu^{|i-i_\nu|} & \eta^{|i-i_\eta|}\\ 1^{|j-j_1|} & 2^{|i-j|} & 3^{|i-j|}\end{pmatrix}=\frac{-8\alpha_{q_1}\,\mathrm{sh}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]}{\mathrm{sh}[\beta E_{q_1}]\prod\limits_{l=1}^{3}\mathrm{sh}[\beta E_{q_l}]}\sum_{\pm_1}\sum_{\pm_2}\frac{\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2})\right]}{E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1}}\times$$

$$\times\,(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)\left[\pm_2\frac{(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)}{\alpha_{q_3}}\int\limits_0^\beta \mathrm{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right]\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_2}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\times\right.$$

$$\times \operatorname{sh}[(\beta-\beta_1)\,(E_{q_3} \pm_2 E_{q_2} \pm_1 E_{q_1})]\,d\beta_1 \pm_2 \frac{(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3)}{\alpha_{q_2}} \int\limits_0^\beta \operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right] \operatorname{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right] \times$$

$$\times \operatorname{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_2}\right] \operatorname{sh}[(\beta-\beta_1)\,(E_{q_3} \pm_2 E_{q_2} \pm_1 E_{q_1})]\,d\beta_1 \mp_2 \frac{(\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)}{\alpha_{q_1}} \int\limits_0^\beta \operatorname{ch}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right] \times$$

$$\times \operatorname{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_2}\right] \operatorname{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right] \operatorname{sh}\left[(\beta-\beta_1)\,(E_{q_3} \pm_2 E_{q_2} \pm_1 E_{q_1})\right] d\beta_1 \Bigg], \tag{B.8}$$

$$\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{j_1=0}^{1}\sum_{\substack{i=0\\ i_2=i_3=1-i\\ j_2=j_3=i}}^{1}\sum_{j=0}^{1}\sum_{\substack{1\le a<b\le 3\\ a,b\ne c\le 3}} (\mathbf{q}_a\mathbf{q}_b)(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)(-1)^{j_a+j_b}\times$$

$$\times \overline{Y}_2^{01}\begin{pmatrix} 1^{|i-i_1|} & 2' & 3' \\ a^{|j-j_a|} & b^{|j-j_b|} & c^{|j-j_c|} \end{pmatrix} = \frac{8\operatorname{sh}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]}{\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}\operatorname{sh}[\beta E_{q_1}]\prod\limits_{l=1}^{3}\operatorname{sh}[\beta E_{q_l}]}\times$$

$$\times \sum_{\pm_1}\sum_{\pm_2} \frac{\operatorname{ch}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_3} \pm_2 E_{q_2})\right]}{E_{q_3} \pm_2 E_{q_2} \pm_1 E_{q_1}} (\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)\Big[\ \pm_1 (\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\ \times$$

$$\times \int\limits_0^\beta \operatorname{ch}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right] \operatorname{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_2}\right] \operatorname{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right] \operatorname{sh}[(\beta-\beta_1)\,(E_{q_3} \pm_2 E_{q_2} \pm_1 E_{q_1})]\,d\beta_1\ +$$

$$\pm_1 \pm_2 (\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3)\alpha_{q_1}\alpha_{q_3} \int\limits_0^\beta \operatorname{ch}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right] \operatorname{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_2}\right] \operatorname{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right] \times$$

$$\times \operatorname{sh}\left[(\beta-\beta_1)\,(E_{q_3} \pm_2 E_{q_2} \pm_1 E_{q_1})\right] d\beta_1 \mp_2 (\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)\alpha_{q_2}\alpha_{q_3} \int\limits_0^\beta \operatorname{ch}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right] \times$$

$$\times \operatorname{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_2}\right] \operatorname{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right] \operatorname{sh}\left[(\beta-\beta_1)\,(E_{q_3} \pm_2 E_{q_2} \pm_1 E_{q_1})\right] d\beta_1 \Bigg], \tag{B.9}$$

$$\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{j_1=0}^{1}\sum_{\substack{i=0\\ i_2=i_3=1-i\\ j_2=j_3=i}}^{1}\sum_{j=0}^{1} (\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)^2\,\overline{Y}_2^{11}\begin{pmatrix} 1^{|i-i_1|} & 2' & 3' \\ 1^{|j-j_1|} & 2^{|i-j|} & 3^{|i-j|} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{8\operatorname{sh}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]}{\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}\operatorname{sh}[\beta E_{q_1}]\prod\limits_{l=1}^{3}\operatorname{sh}[\beta E_{q_l}]} \sum_{\pm_1}\sum_{\pm_2} \frac{\pm_2\operatorname{ch}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_3} \pm_2 E_{q_2})\right]}{E_{q_3} \pm_2 E_{q_2} \pm_1 E_{q_1}} (\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)^2\times$$

$$\times \int\limits_0^{\beta} \mathrm{ch}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_2}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\mathrm{sh}[(\beta-\beta_1)\left(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1}\right)]\,d\beta_1. \tag{В.10}$$

Додаток Г

Розрахуємо $\overline{C}_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)$, використовуючи явний вигляд $\overline{c}_3$ (А.3) і беручи до уваги введені позначення (А.8), (А.10), (А.11).

$$\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{i_2=0}^{1}\sum_{i_3=0}^{1}\overline{Y}_3(a^{i_a},b^{i_b},c^{i_c}) =$$
$$= \sum_{i_1=0}^{1}\sum_{i_2=0}^{1}\sum_{i_3=0}^{1}\frac{\alpha_{q_a}\alpha_{q_b}(-1)^{i_1+i_2}L_1(a^{i_a},b^{i_b},c^{i_c})+L_2(1^{i_1},2^{i_2},3^{i_3})}{\prod\limits_{l=1}^{3}\mathrm{sh}[\beta E_{q_l}]}. \tag{Г.1}$$

Нехай $a=1, b=2, c=3$. Тоді

$$\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{i_2=0}^{1}\sum_{i_3=0}^{1}(-1)^{i_1+i_2}L_1(1^{i_1},2^{i_2},3^{i_3}) = L_1(1-1',2-2',3+3') =$$
$$= \int\limits_0^{\beta}\left(\mathrm{ch}[(\beta-\beta_1)E_{q_1}]-\mathrm{ch}[\beta_1 E_{q_1}]\right)\left(\mathrm{ch}[(\beta-\beta_1)E_{q_2}]-\mathrm{ch}[\beta_1 E_{q_2}]\right)\times$$
$$\times\left(\mathrm{sh}[(\beta-\beta_1)E_{q_3}]+\mathrm{sh}[\beta_1 E_{q_3}]\right)d\beta_1 = 8\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_2}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]\times$$
$$\times\int\limits_{-\frac{\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}}\mathrm{sh}[\beta_1 E_{q_1}]\,\mathrm{sh}[\beta_1 E_{q_2}]\,\mathrm{ch}[\beta_1 E_{q_3}]d\beta_1. \tag{Г.2}$$

Схожі розрахунки можемо провести і для інших значень a,b,c, а також для $L_2(1^{i_1},2^{i_2},3^{i_3})$. Отримаємо:

$$\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{i_2=0}^{1}\sum_{i_3=0}^{1}\sum_{\substack{1\le a<b\le 3\\ a,b\neq c\le 3}}(\mathbf{q}_a\mathbf{q}_b)\overline{Y}_3(a^{i_a},b^{i_b},c^{i_c}) = \frac{8\prod\limits_{l=1}^{3}\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_l}\right]}{\prod\limits_{l=1}^{3}\mathrm{sh}[\beta E_{q_l}]}\left[(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\times\right.$$
$$\times\int\limits_{-\frac{\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}}\mathrm{sh}[\beta_1 E_{q_1}]\mathrm{sh}[\beta_1 E_{q_2}]\mathrm{ch}[\beta_1 E_{q_3}]d\beta_1+(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3)\alpha_{q_1}\alpha_{q_3}\int\limits_{-\frac{\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}}\mathrm{sh}[\beta_1 E_{q_1}]\mathrm{sh}[\beta_1 E_{q_3}]\mathrm{ch}[\beta_1 E_{q_2}]d\beta_1+$$

$$+ (\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}\int\limits_{-\frac{\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}} \mathrm{sh}[\beta_1 E_{q_2}]\,\mathrm{sh}[\beta_1 E_{q_3}]\,\mathrm{ch}[\beta_1 E_{q_1}]d\beta_1 + (\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1\mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)\times$$

$$\left.\times\int\limits_{-\frac{\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}} \mathrm{ch}[\beta_1 E_{q_1}]\,\mathrm{ch}[\beta_1 E_{q_2}]\,\mathrm{ch}[\beta_1 E_{q_3}]d\beta_1\right]. \qquad (\Gamma.3)$$

Додаток Ґ

Розрахуємо $\overline{C}_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)$, використовуючи явний вигляд $\overline{c}_4$ (A.4) і беручи до уваги введені позначення (A.6), (A.9), (A.12), (A.13).

$$\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{j_1=0}^{1}\sum_{i_2=0}^{1}\sum_{j_2=0}^{1}\overline{Y}_1^{11}(1^{i_1},1^{j_1},2^{i_2},2^{j_2}) = \frac{\sum\limits_{i_1=0}^{1}\sum\limits_{j_1=0}^{1}\sum\limits_{i_2=0}^{1}\sum\limits_{j_2=0}^{1} L_3(1^{i_1},1^{j_1},2^{i_2},2^{j_2})}{\mathrm{sh}^2[\beta E_{q_1}]\,\mathrm{sh}^2[\beta E_{q_2}]} =$$

$$= \frac{L_3(1+1',1+1',2+2',2+2')}{\mathrm{sh}^2[\beta E_{q_1}]\,\mathrm{sh}^2[\beta E_{q_2}]} = \frac{1}{\mathrm{sh}^2[\beta E_{q_1}]\,\mathrm{sh}^2[\beta E_{q_2}]}\times$$

$$\times\int\limits_0^\beta \left(\mathrm{sh}\left[(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right] + \mathrm{sh}\left[\beta_1 E_{q_1}\right]\right)^2\left(\mathrm{sh}\left[(\beta-\beta_1)E_{q_2}\right] + \mathrm{sh}\left[\beta_1 E_{q_2}\right]\right)^2 d\beta_1 =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{sh}^2[\beta E_{q_1}]\,\mathrm{sh}^2[\beta E_{q_2}]}\int\limits_0^\beta \mathrm{ch}^2\left[\left(\frac{\beta}{2}-\beta_1\right)E_{q_1}\right]\mathrm{ch}^2\left[\left(\frac{\beta}{2}-\beta_1\right)E_{q_2}\right]d\beta_1. \qquad (\text{Ґ}.1)$$

$$\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{j_1=0}^{1}\sum_{i_2=0}^{1}\sum_{j_2=0}^{1}\sum_{\substack{i=0\\ i_3=1-i}}^{1}\sum_{\substack{j=0\\ j_3=i}}^{1}(-1)^{i_\mu+i_\nu+j_a+j_b}\overline{Y}_4^{00}\begin{pmatrix}\mu^{|i-i_\mu|} & \nu^{|i-i_\nu|} & \eta^{|i-i_\eta|}\\ a^{|j-j_a|} & b^{|j-j_b|} & c^{|j-j_c|}\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\alpha_{q_a}\alpha_{q_b}}{\alpha_{q_\eta}\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_1}]\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_2}]\prod\limits_{l=1}^{3}\mathrm{sh}[\beta E_{q_l}]}\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{j_1=0}^{1}\sum_{i_2=0}^{1}\sum_{j_2=0}^{1}(-1)^{i_\mu+i_\nu+j_a+j_b}\times$$

$$\times\left[\underset{\substack{i_3=1\\ j_3=0}}{I^{00}}\begin{pmatrix}\mu^{i_\mu} & \nu^{i_\nu} & \eta^{i_\eta}\\ a^{j_a} & b^{j_b} & c^{j_c}\end{pmatrix} + \underset{\substack{i_3=1\\ j_3=0}}{I^{00}}\begin{pmatrix}\mu^{i_\mu} & \nu^{i_\nu} & \eta^{i_\eta}\\ a^{1-j_a} & b^{1-j_b} & c^{1-j_c}\end{pmatrix} +\right.$$

$$\left. + \underset{\substack{i_3=0\\ j_3=1}}{I^{00}}\begin{pmatrix}\mu^{1-i_\mu} & \nu^{1-i_\nu} & \eta^{1-i_\eta}\\ a^{j_a} & b^{j_b} & c^{j_c}\end{pmatrix} + \underset{\substack{i_3=0\\ j_3=1}}{I^{00}}\begin{pmatrix}\mu^{1-i_\mu} & \nu^{1-i_\nu} & \eta^{1-i_\eta}\\ a^{1-j_a} & b^{1-j_b} & c^{1-j_c}\end{pmatrix}\right] =$$

$$= 2\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{j_1=0}^{1}\sum_{i_2=0}^{1}\sum_{j_2=0}^{1}(-1)^{i_\mu+i_\nu+j_a+j_b}\left[\underset{\substack{i_3=1\\j_3=0}}{I^{00}}\begin{pmatrix} \mu^{i_\mu} & \nu^{i_\nu} & \eta^{i_\eta} \\ a^{j_a} & b^{j_b} & c^{j_c}\end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + \underset{\substack{i_3=1\\j_3=1}}{I^{00}}\begin{pmatrix} \mu^{i_\mu} & \nu^{i_\nu} & \eta^{i_\eta} \\ a^{j_a} & b^{j_b} & c^{j_c}\end{pmatrix}\right]. \qquad (\text{Ґ}.2)$$

Нехай $\mu = 1, \nu = 2, \eta = 3, a = 1, b = 2, c = 3$. Тоді

$$2\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{j_1=0}^{1}\sum_{i_2=0}^{1}\sum_{j_2=0}^{1}\left[(-1)^{i_1+j_1+1}I^{00}\begin{pmatrix} 1^{i_1} & 2^{i_2} & 3' \\ 1^{j_1} & 2^{j_1} & 3\end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + (-1)^{i_1+j_1+2}I^{00}\begin{pmatrix} 1^{i_1} & 2^{i_2} & 3' \\ 1^{j_1} & 2^{j_2} & 3'\end{pmatrix}\right] =$$

$$= 2I^{00}\begin{pmatrix} 1-1' & 2-2' & 3' \\ 1-1' & 2-2' & 3\end{pmatrix} + 2I^{00}\begin{pmatrix} 1-1' & 2-2' & 3' \\ 1-1' & 2-2' & 3'\end{pmatrix} =$$

$$= 2I^{00}\begin{pmatrix} 1-1' & 2-2' & 3' \\ 1-1' & 2-2' & 3+3'\end{pmatrix} = \int_0^\beta \left(\operatorname{ch}\left[\left(\beta - \frac{\beta_1}{2}\right)E_{q_1}\right] - \operatorname{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_1}\right]\right)\times$$

$$\times\left(\operatorname{ch}\left[\left(\beta - \frac{\beta_1}{2}\right)E_{q_2}\right] - \operatorname{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_2}\right]\right)\operatorname{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]d\beta_1\times$$

$$\times\int_0^{\beta_1}\left(\operatorname{ch}\left[\left(\beta - \frac{\beta_2}{2}\right)E_{q_1}\right] - \operatorname{ch}\left[\frac{\beta_2}{2}E_{q_1}\right]\right)\left(\operatorname{ch}\left[\left(\beta - \frac{\beta_2}{2}\right)E_{q_2}\right] - \operatorname{ch}\left[\frac{\beta_2}{2}E_{q_2}\right]\right)\times$$

$$\times\left(\operatorname{sh}\left[\left(\beta - \frac{\beta_2}{2}\right)E_{q_3}\right] + \operatorname{sh}\left[\frac{\beta_2}{2}E_{q_3}\right]\right)d\beta_2. \qquad (\text{Ґ}.3)$$

Використовуючи співвідношення

$$\operatorname{ch}\left[\left(\beta - \frac{\beta_i}{2}\right)E_{q_j}\right] - \operatorname{ch}\left[\frac{\beta_i}{2}E_{q_j}\right] = 2\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_j}\right]\operatorname{ch}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_i)E_{q_j}\right],$$

$$\operatorname{sh}\left[\left(\beta - \frac{\beta_2}{2}\right)E_{q_3}\right] + \operatorname{sh}\left[\frac{\beta_2}{2}E_{q_3}\right] = 2\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]\operatorname{ch}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_2)E_{q_3}\right],$$

$$\operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_2)E_{q_1}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_2)E_{q_2}\right]\operatorname{ch}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_2)E_{q_3}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{\pm_1}\sum_{\pm_2}\pm_1\pm_2\operatorname{ch}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_2)(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1})\right]. \qquad (\text{Ґ}.4)$$

і змінюючи межі інтегрування, отримаємо:

$$2I^{00}\begin{pmatrix} 1-1' & 2-2' & 3' \\ 1-1' & 2-2' & 3\end{pmatrix} = 32\operatorname{sh}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]\operatorname{sh}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_2}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]\times$$

$$\times \sum_{\pm_1}\sum_{\pm_2}\frac{\pm_1\pm_2}{E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1}}\int\limits_0^\beta \mathrm{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_2}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\times$$

$$\times\,\mathrm{ch}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1})\right]d\beta_1. \qquad (\Gamma.5)$$

Натомість

$$\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{j_1=0}^{1}\sum_{i_2=0}^{1}\sum_{j_2=0}^{1}\sum_{\substack{i=0\\ i_3=1-i\\ j_3=i}}^{1}\sum_{j=0}^{1}(-1)^{i_\mu+i_\nu+j_a+j_b}\overline{Y}_4^{00}\begin{pmatrix}1^{|i-i_1|} & 2^{|i-i_2|} & 3^{|i-i_3|}\\ 1^{|j-j_1|} & 2^{|j-j_2|} & 3^{|j-j_3|}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{32\alpha_{q_1}^2\alpha_{q_2}^2\,\mathrm{sh}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]\mathrm{sh}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_2}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]}{\alpha_{q_3}\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_1}]\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_2}]\prod\limits_{l=1}^{3}\mathrm{sh}[\beta E_{q_l}]}\sum_{\pm_1}\sum_{\pm_2}\frac{\pm_1\pm_2}{E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1}}\times$$

$$\times\int\limits_0^\beta \mathrm{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_2}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\times$$

$$\times\,\mathrm{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1})\right]d\beta_1. \qquad (\Gamma.6)$$

Отже,

$$\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{j_1=0}^{1}\sum_{i_2=0}^{1}\sum_{j_2=0}^{1}\sum_{\substack{i=0\\ i_3=1-i\\ j_3=i}}^{1}\sum_{j=0}^{1}\sum_{\substack{1\le\mu<\nu\le3\\ \mu,\nu\ne\eta\le3}}\sum_{\substack{1\le a<b\le3\\ a,b\ne c\le3}}(\mathbf{q}_\mu\mathbf{q}_\nu)(\mathbf{q}_a\mathbf{q}_b)(-1)^{i_\mu+i_\nu+j_a+j_b}\times$$

$$\times\,\overline{Y}_4^{00}\begin{pmatrix}\mu^{|i-i_\mu|} & \nu^{|i-i_\nu|} & \eta^{|i-i_\eta|}\\ a^{|j-j_a|} & b^{|j-j_b|} & c^{|j-j_c|}\end{pmatrix}=\frac{32\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\,\mathrm{sh}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]\mathrm{sh}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_2}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]}{\mathrm{sh}[\beta E_{q_1}]\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_2}]\prod\limits_{l=1}^{3}\mathrm{sh}[\beta E_{q_l}]}\times$$

$$\times\sum_{\pm_1}\sum_{\pm_2}\frac{1}{E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1}}\left\{\pm_1\pm_2(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)^2\frac{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}}{\alpha_{q_3}}\int\limits_0^\beta \mathrm{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right]\times\right.$$

$$\times\,\mathrm{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_2}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1})\right]d\beta_1+$$

$$\mp_1\pm_2(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3)\alpha_{q_1}\int\limits_0^\beta \mathrm{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right]\mathrm{ch}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_2}\right]\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\times$$

$$\times\,\mathrm{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1})\right]d\beta_1\mp_1\pm_2(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3)\alpha_{q_2}\int\limits_0^\beta \mathrm{ch}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right]\times$$

$$\times \operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_2}\right]\operatorname{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1})\right]d\beta_1+$$

$$\pm_1(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3)(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)\alpha_{q_1}\int_0^\beta \operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_2}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\times$$

$$\times \operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1})\right]d\beta_1\mp_1(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3)^2\frac{\alpha_{q_1}\alpha_{q_3}}{\alpha_{q_2}}\int_0^\beta \operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right]\times$$

$$\times \operatorname{ch}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_2}\right]\operatorname{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1})\right]d\beta_1+$$

$$\mp_1(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3)(\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)\alpha_{q_3}\int_0^\beta \operatorname{ch}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_2}\right]\operatorname{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\times$$

$$\times \operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1})\right]d\beta_1\mp_2(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)(\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)\alpha_{q_2}\int_0^\beta \operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right]\times$$

$$\times \operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_2}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1})\right]d\beta_1+$$

$$\pm_2(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3)(\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)\alpha_{q_3}\int_0^\beta \operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right]\operatorname{ch}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_2}\right]\operatorname{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\times$$

$$\times \operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1})\right]d\beta_1\mp_2(\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)^2\frac{\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}}{\alpha_{q_1}}\int_0^\beta \operatorname{ch}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right]\times$$

$$\times \operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_2}\right]\operatorname{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1})\right]d\beta_1\Bigg\}. \quad (\text{Ґ}.7)$$

Отож

$$\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{j_1=0}^{1}\sum_{i_2=0}^{1}\sum_{j_2=0}^{1}\sum_{\substack{i=0\\ i_3=1-i\\ j_3=i}}^{1}\sum_{j=0}^{1}\sum_{\substack{1\le\mu<\nu\le3\\ \mu,\nu\ne\eta\le3}}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)(-1)^{i_\mu+i_\nu}\times$$

$$\times\overline{Y}_4^{10}\begin{pmatrix}\mu^{|i-i_\mu|} & \nu^{|i-i_\nu|} & \eta^{|i-i_\eta|}\\ 1^{|j-j_1|} & 2^{|j-j_2|} & 3^{|i-j|}\end{pmatrix}=\frac{32\operatorname{sh}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]\operatorname{sh}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_2}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]}{\operatorname{sh}[\beta E_{q_1}]\operatorname{sh}[\beta E_{q_2}]\prod\limits_{l=1}^{3}\operatorname{sh}[\beta E_{q_l}]}\times$$

$$\times\sum_{\pm_1}\sum_{\pm_2}\frac{(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)}{E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1}}\Bigg\{\frac{(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)}{\alpha_{q_3}}\int_0^\beta \operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_2}\right]\times$$

$$\times \operatorname{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1})\right]d\beta_1-\frac{(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3)}{\alpha_{q_2}}\int\limits_0^\beta \operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right]\times$$

$$\times \operatorname{ch}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_2}\right]\operatorname{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1})\right]d\beta_1-$$

$$-\frac{(\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)}{\alpha_{q_1}}\int\limits_0^\beta \operatorname{ch}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_2}\right]\operatorname{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\times$$

$$\times \operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1})\right]d\beta_1\Bigg\}, \tag{Ґ.8}$$

$$\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{j_1=0}^{1}\sum_{i_2=0}^{1}\sum_{j_2=0}^{1}\sum_{\substack{i=0\\ i_3=1-i\\ j_3=i}}^{1}\sum_{j=0}^{1}\sum_{\substack{1\le a<b\le 3\\ a,b\neq c\le 3}}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)(-1)^{j_a+j_b}\times$$

$$\times\overline{Y}_4^{01}\begin{pmatrix} 1^{|i-i_1|} & 2^{|i-i_2|} & 3' \\ a^{|j-j_a|} & b^{|j-j_b|} & c^{|j-j_c|}\end{pmatrix}=\frac{32\operatorname{sh}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]\operatorname{sh}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_2}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]}{\alpha_{q_3}\operatorname{sh}[\beta E_{q_1}]\operatorname{sh}[\beta E_{q_2}]\prod\limits_{l=1}^{3}\operatorname{sh}[\beta E_{q_l}]}\times$$

$$\times\sum_{\pm_1}\sum_{\pm_2}\frac{(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)}{E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1}}\Bigg\{\pm_1\pm_2(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\int\limits_0^\beta \operatorname{ch}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right]\times$$

$$\times \operatorname{ch}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_2}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1})\right]d\beta_1+$$

$$\pm_1(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3)\alpha_{q_1}\alpha_{q_3}\int\limits_0^\beta \operatorname{ch}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right]\operatorname{ch}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_2}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]+$$

$$\times \operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1})\right]d\beta_1\pm_2(\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)\alpha_{q_1}\alpha_{q_3}\int\limits_0^\beta \operatorname{ch}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right]\times$$

$$\times \operatorname{ch}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_2}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1})\right]d\beta_1\Bigg\}, \tag{Ґ.9}$$

$$\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{j_1=0}^{1}\sum_{i_2=0}^{1}\sum_{j_2=0}^{1}\sum_{\substack{i=0\\ i_3=1-i\\ j_3=i}}^{1}\sum_{j=0}^{1}(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)^2\overline{Y}_4^{11}\begin{pmatrix} 1^{|i-i_1|} & 2^{|i-i_2|} & 3' \\ 1^{|j-j_1|} & 2^{|j-j_2|} & 3^{|i-j|}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{32\operatorname{sh}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]\operatorname{sh}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_2}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]}{\alpha_{q_3}\operatorname{sh}[\beta E_{q_1}]\operatorname{sh}[\beta E_{q_2}]\prod\limits_{l=1}^{3}\operatorname{sh}[\beta E_{q_l}]}\sum_{\pm_1}\sum_{\pm_2}\frac{(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3+\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3)^2}{E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1}}\int\limits_0^\beta \operatorname{ch}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right]\times$$

$$\times \operatorname{ch}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_2}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)(E_{q_3}\pm_2 E_{q_2}\pm_1 E_{q_1})\right]d\beta_1. \qquad (Ґ.10)$$

Додаток Д

$$I_{11}(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3}) =$$
$$= \int\limits_0^\beta \operatorname{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}(E_{q_1}+E_{q_2})\right]\operatorname{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)(E_{q_3}+E_{q_2}+E_{q_1})\right]d\beta_1 =$$
$$= \frac{\beta}{4}\operatorname{ch}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3})\right] + \frac{E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3}}{4E_{q_3}(E_{q_1}+E_{q_2})}\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_1}+E_{q_2}-E_{q_3})\right] -$$
$$- \frac{2E_{q_3}(E_{q_1}+E_{q_2})+(E_{q_1}+E_{q_2}-E_{q_3})(E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3})}{4E_{q_3}(E_{q_1}+E_{q_2})(E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3})}\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3})\right], \qquad (Д.1)$$

$$I_{12}(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3}) =$$
$$= \int\limits_0^\beta \operatorname{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}(E_{q_1}-E_{q_2})\right]\operatorname{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)(E_{q_3}+E_{q_2}+E_{q_1})\right]d\beta_1 -$$
$$- \frac{E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3}}{4E_{q_2}(E_{q_1}+E_{q_3})}\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_3}-E_{q_2}+E_{q_1})\right] - \frac{E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3}}{4E_{q_1}(E_{q_2}+E_{q_3})}\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_3}+E_{q_2}-E_{q_1})\right] +$$
$$+ \frac{E_{q_3}(E_{q_1}^2+E_{q_2}^2+E_{q_1}E_{q_3}+E_{q_2}E_{q_3})}{4E_{q_1}E_{q_2}(E_{q_1}+E_{q_3})(E_{q_2}+E_{q_3})}\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3})\right], \qquad (Д.2)$$

$$I_{21}(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3}) =$$
$$= \int\limits_0^\beta \operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}(E_{q_3}+E_{q_2})\right]\operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)(E_{q_3}+E_{q_2}+E_{q_1})\right]d\beta_1 =$$
$$= -\frac{\beta}{4}\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_2}+E_{q_3})\right] + \frac{E_{q_2}+E_{q_3}}{4E_{q_1}(E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3})}\operatorname{ch}\left[\frac{\beta}{2}(2E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3})\right] -$$
$$- \frac{E_{q_3}+E_{q_2}}{4E_{q_1}(E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3})}\operatorname{ch}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_2}+E_{q_3})\right], \qquad (Д.3)$$

$$I_{22}(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3}) =$$
$$= \int\limits_0^\beta \operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}(E_{q_3}-E_{q_2})\right]\operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)(E_{q_3}+E_{q_2}+E_{q_1})\right]d\beta_1 =$$

$$=\frac{E_{q_1}(E_{q_3}-E_{q_2})(E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3})}{4E_{q_2}E_{q_3}(E_{q_1}+E_{q_2})(E_{q_1}+E_{q_3})}\,\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_3}-E_{q_2})\right]+$$
$$+\frac{E_{q_3}-E_{q_2}}{4(E_{q_1}+E_{q_2})(E_{q_1}+E_{q_3})}\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_3}+E_{q_2}+2E_{q_1})\right]-\frac{E_{q_3}-E_{q_2}}{4E_{q_2}E_{q_3}}\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_2}+E_{q_3})\right], \tag{Д.4}$$

$$I_{23}(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3})=$$
$$=\int\limits_0^{\beta}\mathrm{ch}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right]\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}(E_{q_3}+E_{q_2})\right]\mathrm{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)(E_{q_3}+E_{q_2}+E_{q_1})\right]d\beta_1=$$
$$=\frac{\beta}{4}\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_2}+E_{q_3})\right]-\frac{E_{q_3}+E_{q_2}+2E_{q_1}}{4E_{q_1}(E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3})}\,\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_2}+E_{q_3})\right]+$$
$$+\frac{E_{q_3}+E_{q_2}+2E_{q_1}}{4E_{q_1}(E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3})}\,\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_2}+E_{q_3}+2E_{q_1})\right], \tag{Д.5}$$

$$I_{24}(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3})=$$
$$=\int\limits_0^{\beta}\mathrm{ch}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)E_{q_1}\right]\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}(E_{q_3}-E_{q_2})\right]\mathrm{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)(E_{q_3}+E_{q_2}+E_{q_1})\right]d\beta_1-$$
$$-\frac{E_{q_2}E_{q_3}(E_{q_2}+E_{q_3}+2E_{q_1})+(E_{q_1}+E_{q_2})(E_{q_1}+E_{q_3})(E_{q_2}+E_{q_3})}{4E_{q_2}E_{q_3}(E_{q_1}+E_{q_2})(E_{q_1}+E_{q_3})}\,\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_3}-E_{q_2})\right]+$$
$$+\frac{E_{q_3}+E_{q_2}+2E_{q_1}}{4(E_{q_1}+E_{q_2})(E_{q_1}+E_{q_3})}\,\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_3}+E_{q_2}+2E_{q_1})\right]+\frac{E_{q_3}+E_{q_2}}{4E_{q_2}E_{q_3}}\,\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_2}+E_{q_3})\right], \tag{Д.6}$$

$$I_{31}(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3})=$$
$$=\int\limits_0^{\beta}\mathrm{ch}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)(E_{q_1}+E_{q_2})\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)(E_{q_3}+E_{q_2}+E_{q_1})\right]d\beta_1=$$
$$=\frac{\beta}{4}\,\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]-\frac{(2E_{q_1}+2E_{q_2}+E_{q_3})E_{q_3}+2(E_{q_1}+E_{q_2})(E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3})}{4(E_{q_1}+E_{q_2})(E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3})E_{q_3}}\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]+$$
$$+\frac{E_{q_3}}{4(E_{q_1}+E_{q_2})(E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3})}\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(2E_{q_1}+2E_{q_2}+E_{q_3})\right], \tag{Д.7}$$

$$I_{32}(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3})=$$
$$=\int\limits_0^{\beta}\mathrm{ch}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)(E_{q_1}-E_{q_2})\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)(E_{q_3}+E_{q_2}+E_{q_1})\right]d\beta_1-$$

$$-\frac{E_{q_1}E_{q_2}(E_{q_1}+E_{q_2}+2E_{q_3})+(E_{q_1}+E_{q_3})(E_{q_2}+E_{q_3})(E_{q_2}+E_{q_1})}{4E_{q_1}E_{q_2}(E_{q_1}+E_{q_3})(E_{q_2}+E_{q_3})}\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]+$$
$$+\frac{E_{q_3}}{4E_{q_1}(E_{q_1}+E_{q_3})}\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_3}+2E_{q_1})\right]+\frac{E_{q_3}}{4E_{q_2}(E_{q_2}+E_{q_3})}\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_3}+2E_{q_2})\right], \tag{Д.8}$$

$$I_{33}(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3})=$$
$$=\int_0^\beta \mathrm{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)(E_{q_1}+E_{q_2})\right]\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)(E_{q_3}+E_{q_2}+E_{q_1})\right]d\beta_1=$$
$$=-\frac{\beta}{4}\,\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]-\frac{E_{q_3}^2+2(E_{q_1}+E_{q_2})(E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3})}{4(E_{q_1}+E_{q_2})(E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3})E_{q_3}}\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]+$$
$$+\frac{E_{q_3}+2E_{q_2}+2E_{q_1}}{4(E_{q_1}+E_{q_2})(E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3})}\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_3}+2E_{q_2}+2E_{q_1})\right], \tag{Д.9}$$

$$I_{34}(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3})=$$
$$=\int_0^\beta \mathrm{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)(E_{q_1}-E_{q_2})\right]\mathrm{ch}\left[\frac{\beta_1}{2}E_{q_3}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)(E_{q_3}+E_{q_2}+E_{q_1})\right]d\beta_1=$$
$$=-\frac{E_{q_1}E_{q_2}(E_{q_1}-E_{q_2})+(E_{q_1}+E_{q_3})(E_{q_2}+E_{q_3})(E_{q_2}-E_{q_1})}{4E_{q_1}E_{q_2}(E_{q_1}+E_{q_3})(E_{q_2}+E_{q_3})}\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]+$$
$$+\frac{2E_{q_1}+E_{q_3}}{4E_{q_1}(E_{q_1}+E_{q_3})}\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_3}+2E_{q_1})\right]-\frac{2E_{q_2}+E_{q_3}}{4E_{q_2}(E_{q_2}+E_{q_3})}\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_3}+2E_{q_2})\right], \tag{Д.10}$$

$$J_1(E_{q_1},E_{q_2})=\int_0^\beta \mathrm{sh}[(\beta-\beta_1)E_{q_1}]\,\mathrm{sh}[\beta_1E_{q_1}]\,\mathrm{sh}[(\beta-\beta_1)E_{q_2}]\,\mathrm{sh}[\beta_1E_{q_2}]=$$
$$=\frac{\beta}{4}\,\mathrm{ch}[\beta E_{q_1}]\,\mathrm{ch}[\beta E_{q_2}]-\frac{\mathrm{ch}[\beta E_{q_1}]\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_2}]}{4E_{q_2}}-\frac{\mathrm{ch}[\beta E_{q_2}]\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_1}]}{4E_{q_1}}+$$
$$+\frac{\mathrm{sh}[\beta(E_{q_1}+E_{q_2})]}{8(E_{q_1}+E_{q_2})}-\frac{\mathrm{sh}[\beta(E_{q_1}-E_{q_2})]}{8(E_{q_1}-E_{q_2})}, \tag{Д.11}$$

$$J_2(E_{q_1},E_{q_2})=\int_0^\beta \mathrm{ch}^2\left[\left(\frac{\beta}{2}-\beta_1\right)E_{q_1}\right]\mathrm{sh}[(\beta-\beta_1)E_{q_2}]\,\mathrm{sh}[\beta_1E_{q_2}]d\beta_1=$$
$$=\frac{\beta}{4}\,\mathrm{ch}[\beta E_{q_2}]-\frac{1}{4E_{q_2}}\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_2}]+\frac{1}{4E_{q_1}}\,\mathrm{ch}[\beta E_{q_2}]\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_1}]-$$

$$
-\frac{1}{8(E_{q_1}+E_{q_2})}\,\mathrm{sh}[\beta(E_{q_1}+E_{q_2})]-\frac{1}{8(E_{q_1}-E_{q_2})}\,\mathrm{sh}[\beta(E_{q_1}-E_{q_2})],
\tag{Д.12}
$$

$$
\begin{aligned}
J_3(E_{q_1},E_{q_2}) &= \int_0^{\beta} \mathrm{ch}^2\left[\left(\frac{\beta}{2}-\beta_1\right)E_{q_1}\right]\mathrm{ch}^2\left[\left(\frac{\beta}{2}-\beta_1\right)E_{q_2}\right]d\beta_1 = \\
&= \frac{\beta}{4}+\frac{1}{4E_{q_2}}\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_2}]+\frac{1}{4E_{q_1}}\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_1}]+ \\
&+\frac{1}{8(E_{q_1}+E_{q_2})}\,\mathrm{sh}[\beta(E_{q_1}+E_{q_2})]+\frac{1}{8(E_{q_1}-E_{q_2})}\,\mathrm{sh}[\beta(E_{q_1}-E_{q_2})].
\end{aligned}
\tag{Д.13}
$$

Додаток Е

$$
\lim_{\beta\to\infty}\frac{J_1(E_{q_1},E_{q_2})}{\mathrm{sh}[\beta E_{q_1}]\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_2}]}=\frac{\beta}{4}+\frac{1}{4(E_{q_1}+E_{q_2})}-\frac{1}{4E_{q_1}}-\frac{1}{4E_{q_2}}\equiv J_1^0(E_{q_1},E_{q_2}).
$$

$$
\lim_{\beta\to\infty}\frac{J_2(E_{q_1},E_{q_2})}{\mathrm{ch}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]\mathrm{sh}[\beta E_{q_2}]}=\frac{E_{q_2}}{2E_{q_1}(E_{q_1}+E_{q_2})}\equiv J_2^0(E_{q_1},E_{q_2}).
$$

$$
\lim_{\beta\to\infty}\frac{J_3(E_{q_1},E_{q_2})}{\mathrm{ch}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]\mathrm{ch}^2[\frac{\beta}{2}E_{q_2}]}=\frac{1}{(E_{q_1}+E_{q_2})}\equiv J_3^0(E_{q_1},E_{q_2}).
$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\beta\to\infty}\frac{P_1(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3})\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_3}\pm_2E_{q_2}\pm_1E_{q_1})\right]}{\mathrm{sh}[\beta E_{q_1}]\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_2}]\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_3}]} = \\
&=\delta_{+,\pm_1}\delta_{+,\pm_2}\left[\frac{\beta}{2}-\frac{2E_{q_3}(E_{q_1}+E_{q_2})+(E_{q_1}+E_{q_2}-E_{q_3})(E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3})}{2E_{q_3}(E_{q_1}+E_{q_2})(E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3})}+\right.\\
&\left.+\frac{E_{q_3}(E_{q_1}^2+E_{q_2}^2+E_{q_1}E_{q_3}+E_{q_2}E_{q_3})}{2E_{q_1}E_{q_2}(E_{q_1}+E_{q_3})(E_{q_2}+E_{q_3})}\right]\equiv P_1^0(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3})\delta_{+,\pm_1}\delta_{+,\pm_2}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\beta\to\infty}\frac{P_2(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3})\,\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_3}\pm_2E_{q_2}\pm_1E_{q_1})\right]}{\mathrm{sh}[\beta E_{q_1}]\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_2}]\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_3}]} = \\
&=\delta_{+,\pm_1}\delta_{+,\pm_2}\left[\frac{\beta}{2}-\frac{2E_{q_3}(E_{q_1}+E_{q_2})+(E_{q_1}+E_{q_2}-E_{q_3})(E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3})}{2E_{q_3}(E_{q_1}+E_{q_2})(E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3})}-\right.\\
&\left.-\frac{E_{q_3}(E_{q_1}^2+E_{q_2}^2+E_{q_1}E_{q_3}+E_{q_2}E_{q_3})}{2E_{q_1}E_{q_2}(E_{q_1}+E_{q_3})(E_{q_2}+E_{q_3})}\right]\equiv P_2^0(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3})\delta_{+,\pm_1}\delta_{+,\pm_2}.
\end{aligned}
$$

$$\lim_{\beta\to\infty}\frac{K_1(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3})\,\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_3}\pm_2E_{q_2})\right]}{\mathrm{ch}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]\mathrm{sh}[\beta E_{q_2}]\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_3}]}=\delta_{+,\pm_1}\delta_{+,\pm_2}\left[\frac{E_{q_2}+E_{q_3}}{E_{q_1}(E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3})}+\right.$$
$$\left.+\ \frac{E_{q_3}-E_{q_2}}{E_{q_1}(E_{q_1}+E_{q_2})(E_{q_1}+E_{q_3})}\right]\equiv\delta_{+,\pm_1}\delta_{+,\pm_2}K_1^0(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3}).$$

$$\lim_{\beta\to\infty}\frac{K_2(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3})\,\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_3}\pm_2E_{q_2})\right]}{\mathrm{ch}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]\mathrm{sh}[\beta E_{q_2}]\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_3}]}=\delta_{+,\pm_1}\delta_{+,\pm_2}\left[\frac{E_{q_2}+E_{q_3}}{E_{q_1}(E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3})}-\right.$$
$$\left.-\ \frac{E_{q_3}-E_{q_2}}{E_{q_1}(E_{q_1}+E_{q_2})(E_{q_1}+E_{q_3})}\right]\equiv\delta_{+,\pm_1}\delta_{+,\pm_2}K_2^0(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3}).$$

$$\lim_{\beta\to\infty}\frac{K_3(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3})\,\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_3}\pm_2E_{q_2})\right]}{\mathrm{ch}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]\mathrm{sh}[\beta E_{q_2}]\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_3}]}=\delta_{+,\pm_1}\delta_{+,\pm_2}\left[\frac{2E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3}}{E_{q_1}(E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3})}+\right.$$
$$\left.+\ \frac{2E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3}}{(E_{q_1}+E_{q_2})(E_{q_1}+E_{q_3})}\right]\equiv\delta_{+,\pm_1}\delta_{+,\pm_2}K_3^0(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3}).$$

$$\lim_{\beta\to\infty}\frac{K_4(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3})\,\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_3}\pm_2E_{q_2})\right]}{\mathrm{ch}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]\mathrm{sh}[\beta E_{q_2}]\,\mathrm{sh}[\beta E_{q_3}]}=\delta_{+,\pm_1}\delta_{+,\pm_2}\left[\frac{2E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3}}{E_{q_1}(E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3})}-\right.$$
$$\left.-\ \frac{2E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3}}{(E_{q_1}+E_{q_2})(E_{q_1}+E_{q_3})}\right]\equiv\delta_{+,\pm_1}\delta_{+,\pm_2}K_4^0(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3}).$$

$$\lim_{\beta\to\infty}\frac{I_1(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3})}{\mathrm{ch}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]\mathrm{ch}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_2}\right]\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]}=\lim_{\beta\to\infty}\frac{I_2(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3})}{\mathrm{ch}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]\mathrm{ch}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_2}\right]\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]}=$$
$$=\delta_{+,\pm_1}\delta_{+,\pm_2}\frac{4E_{q_3}}{(E_{q_1}+E_{q_2})(E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3})}\equiv\delta_{+,\pm_1}\delta_{+,\pm_2}I_1^0(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3}).$$

$$\lim_{\beta\to\infty}\frac{I_3(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3})}{\mathrm{ch}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]\mathrm{ch}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_2}\right]\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]}=\lim_{\beta\to\infty}\frac{I_4(\pm_1E_{q_1},\pm_2E_{q_2},E_{q_3})}{\mathrm{ch}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]\mathrm{ch}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_2}\right]\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]}=$$
$$=\delta_{+,\pm_1}\delta_{+,\pm_2}\frac{8E_{q_1}+8E_{q_2}+4E_{q_3}}{(E_{q_1}+E_{q_2})(E_{q_1}+E_{q_2}+E_{q_3})}\equiv\delta_{+,\pm_1}\delta_{+,\pm_2}I_3^0(E_{q_1},E_{q_2},E_{q_3}).$$

Додаток Є

$$J_1(E_{q_1}, E_{q_2}) \underset{\beta\to 0}{=} o(\beta^4).$$

$$J_2(E_{q_1}, E_{q_2}) \underset{\beta\to 0}{=} \frac{1}{6}E_{q_2}^2\beta^3 + o(\beta^3).$$

$$J_3(E_{q_1}, E_{q_2}) \underset{\beta\to 0}{=} \beta + \frac{1}{12}(E_{q_1}^2 + E_{q_2}^2)\beta^3 + o(\beta^3).$$

$$P_1(\pm_1 E_{q_1}, \pm_2 E_{q_2}, E_{q_3}) \underset{\beta\to 0}{=} \frac{1}{12}E_{q_3}(E_{q_3} \pm_2 E_{q_2} \pm_1 E_{q_1})\beta^3 + o(\beta^3).$$

$$P_2(\pm_1 E_{q_1}, \pm_2 E_{q_2}, E_{q_3}) \underset{\beta\to 0}{=} o(\beta^3).$$

$$K_1(\pm_1 E_{q_1}, \pm_2 E_{q_2}, E_{q_3}) \underset{\beta\to 0}{=} o(\beta^3).$$

$$K_2(\pm_1 E_{q_1}, \pm_2 E_{q_2}, E_{q_3}) \underset{\beta\to 0}{=} o(\beta^3).$$

$$K_3(\pm_1 E_{q_1}, \pm_2 E_{q_2}, E_{q_3}) \underset{\beta\to 0}{=} \frac{1}{2}(E_{q_3} \pm_2 E_{q_2} \pm_1 E_{q_1})\beta^2 + o(\beta^3).$$

$$K_4(\pm_1 E_{q_1}, \pm_2 E_{q_2}, E_{q_3}) \underset{\beta\to 0}{=} o(\beta^3).$$

$$I_1(\pm_1 E_{q_1}, \pm_2 E_{q_2}, E_{q_3}) \underset{\beta\to 0}{=} \frac{1}{12}E_{q_3}(E_{q_3} \pm_2 E_{q_2} \pm_1 E_{q_1})\beta^3 + o(\beta^3).$$

$$I_2(\pm_1 E_{q_1}, \pm_2 E_{q_2}, E_{q_3}) \underset{\beta\to 0}{=} o(\beta^3).$$

$$I_3(\pm_1 E_{q_1}, \pm_2 E_{q_2}, E_{q_3}) \underset{\beta\to 0}{=} \pm_1\frac{1}{6}E_{q_1}(E_{q_3} \pm_2 E_{q_2} \pm_1 E_{q_1})\beta^3 + o(\beta^3).$$

$$I_4(\pm_1 E_{q_1}, \pm_2 E_{q_2}, E_{q_3}) \underset{\beta\to 0}{=} \pm_2\frac{1}{6}E_{q_2}(E_{q_3} \pm_2 E_{q_2} \pm_1 E_{q_1})\beta^3 + o(\beta^3). \qquad (\text{Є}.1)$$

---

1. *Юхновский И.Р.* Применение коллективных переменных и учет короткодействующих сил в теории систем заряженных частиц / И.Р. Юхновский // Журн. эксп. теор. физ. – 1958. – Т. 34, № 2. – С. 379–389.
2. *Юхновський І.Р.* До статистичної теорії систем взаємодіючих іонів та дипольних частинок / І.Р. Юхновський // Укр. фіз. журн. – 1961. – Т. 6, № 3. – С. 333–339.
3. *Юхновський І.Р.* Статистичний оператор та колективні змінні. І. Перетворення зміщення / І.Р. Юхновський // Укр. фіз. журн. – 1964. – Т. 9, № 7. – С. 702–714.
4. *Юхновський І.Р.* Квантова статистична сума і колективні змінні. ІІ. Функція переходу до колективних змінних / І.Р. Юхновський // Укр. фіз. журн. – 1964. – Т. 9, № 8. – С. 827–838.

5. *Идзик И.М.* Критическая точка системы жидкость–газ в методе коллективных переменных / И.М. Идзик, В.А. Коломиец, И.Р. Юхновский // Теор. мат. физ. – 1987. – Т. 73, № 2. – С. 264—280.
6. *Пацаган О.В.* Функционал большой статистической суммы в методе коллективных переменных с выделенной системой отсчета многокомпонентная система / О.В. Пацаган, И.Р. Юхновский // Теор. мат. физ. – 1990. – Т. 83, № 1. – С. 72–82.
7. *Вакарчук І.О.* Кінетична енергія і теплоємність рідкого ^{4}He / І.О. Вакарчук, Р.О. Притула, А.А. Ровенчак // Журн. фіз. досл. – 2007. – Т. 11, № 3. – С. 259–267.
8. *Vakarchuk I.O.* A self-consistent theory of liquid ^{4}He / I.O. Vakarchuk // J. Phys. Stud. – 2004. – Vol. 8, № 3. – С. 223–240.
9. *Темперли Г.* Физика простых жидкостей / Г. Темперли, Дж. Роулисона, Дж. Рашбрука. – М. : Мир, 1971. – 400 с.
10. *Крокстон К.* Физика жидкого состояния / К. Крокстон. – М. : Мир, 1978. – 400 с.
11. *Chang C.C.* Energy and structure of the ground state of liquid ^{4}He / C.C. Chang, C.E. Campbell // Phys. Rev. B. – 1977. – Vol. 15, № 9. – P. 4238–4255.
12. *Lee F. J.* Perturbation corrections to the variational ground-state energy of liquid ^{4}He / F. J. Lee, D. K. Lee // Phys. Rev. B. – 1977. – Vol. 15, № 11. – P. 5296–5301.
13. *Krotscheck E.* Optimal three-body correlations and elementary diagrams in liquid ^{4}He / E. Krotscheck // Phys. Rev. B. – 1986. – Vol. 33, № 5. – P. 3158–3167.
14. *Вакарчук И.А.* К проблеме бозе-эйнштейновской конденсации в жидком ^{4}He / И.А. Вакарчук // Укр. физ. журн. – 1984. – Т. 29, № 7. – С. 1112–1113.
15. *Вакарчук И.А.* Бозе-конденсат в жидком He^4 / И.А. Вакарчук // Теор. мат. физ. – 1985. – Т. 65, № 2. – С. 285–295.
16. *Вакарчук І.О.* Структурні функції рідкого ^{4}He з урахуванням непрямих три- і чотиричастинкових кореляцій / І.О. Вакарчук, Р.О. Притула // Журн. фіз. досл. – 2008. – Т. 12, № 4. – С. 4001 (12 с.).
17. *Robkoff H.N.* Structure-factor measurements in ^{4}He at saturated vapor pressure for $1.38 < T < 4.24K$ / H.N. Robkoff, R.B. Hallock // Phys. Rev. B. – 1981. – Vol. 24, № 1. – P. 159–182.
18. *Вакарчук И.А.* Свободная энергия многобозонной системы при низких температурах / И.А. Вакарчук, П.А. Глушак // Теор. мат. физ. – 1988. – Т. 75, № 1. – С. 101–113.
19. *И.А. Вакарчук.* Микроскопическая теория бозе-жидкости: дис. доктора физ.-мат. наук / И.А. Вакарчук. – К., 1979. – 270 с.
20. *Вакарчук І.О.* Повна матриця густини багатобозонної системи з урахуванням три- та чотиричастинкових прямих кореляцій / І.О. Вакарчук, О.І. Григорчак // Журн. фіз. досл. – 2009. – Т. 13, № 3. – С. 3004 (28 с.).
21. *Исихара А.* Статистическая физика / А. Исихара. – М. : Мир, 1973. – 472 с.
22. *Вакарчук І.О.* Квантова механіка / І.О. Вакарчук. – Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2007. – 848 с.

23. *Вакарчук И.А.* Матрицы плотности многобозонной системы при низких температурах / И.А. Вакарчук // Теор. мат. физ. – 1975. – Т. 23, № 2. – С. 260–272.
24. *Penrose O.* On the quantum mechanics of helium II / O. Penrose // Philos. Mag. – 1951. – Vol. 42. – P. 1373–1377.
25. *Зубарев Д.Н.* Вычисление конфигурационных интегралов для системы частиц с кулоновским взаимодействием / Д.Н. Зубарєв // ДАН СССР. – 1954. – Т. 95, № 4. – С. 757–760.
26. *Юхновський І.Р.* Метод смещений и коллективных переменных. Препринт Института теоретической физики АН УССР / І.Р. Юхновський. – К. : ИТФ–71–26 Р., 1971. – 82 с.
27. *Вакарчук И.А.* Микроскопическая теория энергетического спектра жидкого He^4. II / И.А. Вакарчук, И.Р. Юхновский // Теор. мат. физ. – 1980. – Т. 42, № 1. – С. 112–123.

PARTITION FUNCTION OF MANY-BOSON SYSTEM WITH DIRECT THREE- AND FOUR-PARTICLE CORRELATIONS TAKEN INTO ACCOUNT

I. Vakarchuk, O. Hryhorchak

Ivan Franko National University of Lviv
Drahomanov str., 12, 79005 Lviv, Ukraine
e-mail: G_ Orest@rambler.ru

In this article we suggest a method for obtaining the partition function of interacting Bose-particles with taking into account direct three- and four-particle correlations. The method is valid for a wide temperature domain. The calculation of the partition function is carried out on the basis of the density matrix of interacting Bose-particles obtained in a previous work. The expression calculated for the partition function in the low-temperature limit is given by $e^{-E_0/T}$, where T is the temperature of system and E_0 the ground-state energy in the approximation of "two sums over the wave vector". For the high temperatures, i.e. in the quasi-classical limit, the formula obtained by us coincides with the classical expression for the partition function in the random-phase approximation. The results of this work can be applied when calculating thermodynamic and structural functions of liquid ^{4}He, in order to compare the theoretical and experimental results quantitatively, especially in the region of λ-transition.

Key words: liquid ^{4}He, density matrix, partition function.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ СУММА МНОГОБОЗОННОЙ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ ПРЯМЫХ ТРЕХ- И ЧЕТЫРЕХЧАСТИЧНЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ

И. Вакарчук, О. Григорчак

Львовский национальный университет имени Ивана Франко
ул. Драгоманова, 12, 79005 Львов, Украина
e-mail: G_Orest@rambler.ru

Предложен метод расчета статистической суммы взаимодействующих бозе-частиц для широкого интервала температур с учетом прямых трех- и четырехчастичных корреляций. Расчет производился на основе найденной в предыдущей работе матрицы плотности взаимодействующих бозе-частиц. В границе низких температур полученное выражение для статистической суммы имеет ожидаемый вид $E^{-E_0/T}$, где T — температура системы, E_0 — энергия основного состояния в приближении "двух сумм по волновому вектору". При высоких температурах в квазиклассическом пределе полученная нами формула совпадает с выражением для статистической суммы в приближении хаотических фаз. Результаты работы могут быть применены для расчета термодинамических и структурных функций жидкого ^{4}He с целью количественной проверки теоретических и экспериментальных данных, особенно в области λ-перехода.

Ключевые слова: жидкий ^{4}He, матрица плотности, статистическая сумма.

Статтю отримано: 1.02.2011
Прийнято до друку: 14.07.2011