

УДК 524.31.084, 524.384, 524.352.3
PACS 97.20Rp, 97.60Bw

ЕЛЕКТРОН-ЯДЕРНА МОДЕЛЬ ПРИ “КАРЛИКОВИХ” ГУСТИНАХ. БАЗИСНИЙ ПІДХІД

М. Ваврух, Н. Тишко, С. Смеречинський

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
кафедра астрофізики, вул. Кирила і Мефодія, 8, 79005 Львів,
Україна
e-mail: mvavruk@gmail.com*

Математичний апарат базисного підходу, розробленого авторами раніше у мікроскопічній теорії металів, узагальнено на випадок макроскопічно однорідної електрон-ядерної моделі при густинах, характерних для вироджених карликів. Вперше розраховано статичні і динамічні n -частинкові кореляційні функції базисної системи – релятивістського виродженого ідеального електронного газу, аналогічні функції моделі релятивістської однорідної електронної рідини, а також її поправку на локальне поле. У рамках цього підходу розраховано енергію основного стану електрон-ядерної моделі як функцію параметра релятивізму. Одержано рівняння стану моделі, необхідне для розрахунку внутрішньої структури реальних вироджених карликів.

Ключові слова: вироджені карлики, базисний підхід, n -частинкові кореляційні функції, енергія основного стану, рівняння стану при високих густинах.

1 Вступ

Теорія внутрішньої будови холодних вироджених карликів, розроблена Чандрасекаром у 40-х роках минулого століття, ґрунтується на рівнянні стану ідеального виродженого релятивістського електронного газу, що знаходиться у парамагнітній фазі при абсолютному нулі температури [1, 2]. Висока густина речовини у вироджених карликах ($\rho \sim (10^5 - 10^6) \text{г/см}^3$) приводить до того, що існування локалізованих станів є неможливим, всі електрони колективізовані і сильно вироджені. Тому речовина ядер вироджених карликів знаходиться у металічному стані, а швидкості електронів на поверхні Фермі співмірні зі швидкістю світла ($\hbar k_F / m_0 \sim c$). Стандартна модель Чандрасекара – це релятивістський ідеальний вироджений електронний газ і хімічно однорідна ядерна підсистема, яка розглядається як неперервне статичне середовище, що забезпечує гравітаційний тиск зорі. Рівновага між тиском виродженого ідеального релятивістського електронного газу і гравітаційним тиском

визначає всі енергетичні і структурні характеристики зорі. Очевидно, що теорія, яка претендує на інтерпретацію різноманітності спостережуваних даних реальних карликів, повинна враховувати ще багато інших факторів, які ігнорує стандартна теорія Чандрасекара, – вплив неповного електронного виродження (оскільки температури у центрі ядер сягають $10^8 K$), неоднорідного хімічного складу (за рахунок гравітаційної диференціації речовини), осевого обертання цих об'єктів, магнітних полів, міжчастинкових взаємодій та ефектів загальної теорії відносності. Неповне виродження, неоднорідний вздовж радіуса хімічний склад та кулонівські взаємодії між частинками є чинниками, притаманними всім без винятку виродженим карликам. Вплив неповного електронного виродження вивчався у роботах [3, 4], а змінного хімічного складу – у роботі [5]. У роботі Солпітера [6], виконаній у той час, коли ще тільки формувалась сучасна мікроскопічна теорія металів, вперше зроблено оцінки внесків до тиску та енергії у просторово-однорідній електрон-ядерній моделі при високих густинах за рахунок кулонівських взаємодій. У рамках моделі Вігнера-Зейтца та наближення Томаса-Фермі було показано, що кулонівські взаємодії призводять до невеликого зменшення тиску порівняно з тиском ідеального виродженого суттєво релятивістського електронного газу: при значенні параметра релятивізму $x = \hbar k_F / m_0 c = 1$ відхилення складає $\sim 1\%$ у випадку $z = 2$, $\sim 1,5\%$ при $z = 6$, $\sim 2,5\%$ при $z = 12$, $\sim 4\%$ при $z = 26$, де z – порядковий номер хімічного елемента. Ці оцінки використовуються і в сучасній астрофізичній літературі (див. [7]) для обґрунтування моделі Чандрасекара. Знайдене Солпітером рівняння стану використано у роботі [8] для побудови кривої “маса – радіус” і дослідження впливу взаємодій на стійкість вироджених карликів. Міжчастинкові взаємодії розглядались також з приводу побудови теорії охолодження вироджених карликів також на основі моделі Вігнера-Зейтца (див. [7]).

Роль міжчастинкових взаємодій належить до найменш досліджених питань у сучасній теорії вироджених карликів. Разом з тим ці об'єкти за своєю електронною структурою є найпростішими металами. Однак ці метали перебувають під високим тиском, тому їхня електронна підсистема є суттєво релятивістською, що ускладнює задачу. У той же час ці системи є слабо неідеальними – параметр неідеальності щодо міжелектронних взаємодій має порядок α_0 , а щодо електрон-ядерних – $z\alpha_0$ (де $\alpha_0 = e^2/\hbar c$ – стала тонкої структури), що полегшує задачу побудови рівняння стану.

У роботі [9] зроблена спроба розрахунку внеску міжчастинкових взаємодій до повної енергії карлика в рамках теорії збурень. В ролі незбуреної моделі використано стандартну модель Чандрасекара. Такий підхід приводить до завищення ролі міжчастинкових взаємодій, особливо для масивних карликів. Послідовний опис структури виродженого карлика вимагає самоузгодженого врахування кулонівських взаємодій, а саме побудови рівняння стану електрон-ядерної моделі, розв'язання рівняння механічної рівноваги на його основі та наступного розрахунку характеристик зорі.

Метою даної роботи є побудова рівняння стану електрон-ядерної макроскопічно однорідної моделі з кулонівськими взаємодіями при густинах, що відповідають реальному карлику. Розглядається двокомпонентна модель – повністю вироджений релятивістський неідеальний електронний газ і статична ядерна підсистема, що може знаходитись у кристалічному чи рідкому стані. Математичний апарат цієї роботи

– базисний підхід, розвинутий у роботах [10-16] для опису нерелятивістської моделі однорідної електронної рідини і електрон-йонних моделей металів, який адаптовано нами до опису релятивістської електронної підсистеми.

2 Загальні співвідношення

Ми розглядаємо електронейтральну макроскопічно однорідну електрон-ядерну модель, що складається з N_e електронів і $N_n = z^{-1}N_e$ ядер в об'ємі V у термодинамічній границі $N_e, V \rightarrow \infty$, $N_e/V = \text{const}$ і при низьких температурах (набагато нижчих від температури виродження), яка описується гамільтоніаном

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int} + \hat{V}_{nn}, \quad (1)$$

де

$$\hat{H}_0 = \sum_{\mathbf{k}, s} E_k a_{\mathbf{k}, s}^+ a_{\mathbf{k}, s} - \quad (2)$$

гамільтоніан вільних релятивістських електронів ($E_k = [(m_0c^2)^2 + \hbar^2k^2c^2]^{1/2} - m_0c^2$),

$$\hat{H}_{int} = \hat{V}_{ee} + \hat{V}_{en} - \quad (3)$$

сума операторів міжелектронних та електрон-ядерних взаємодій,

$$\begin{aligned} \hat{V}_{ee} &= (2V)^{-1} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} V_q \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \sum_{s_1, s_2} a_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}, s_1}^+ a_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}, s_2}^+ a_{\mathbf{k}_2, s_2} a_{\mathbf{k}_1, s_1}, \\ \hat{V}_{en} &= -zV^{-1} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} V_q S_{\mathbf{q}} \sum_{\mathbf{k}, s} a_{\mathbf{k} + \mathbf{q}, s}^+ a_{\mathbf{k}, s}. \end{aligned} \quad (4)$$

Оператор

$$\hat{V}_{nn} = z^2(2V)^{-1} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} V_q \{S_{\mathbf{q}} S_{-\mathbf{q}} - N_n\} \quad (5)$$

описує кулонівські між'ядерні взаємодії. Тут $S_{\mathbf{q}} = \sum_{j=1}^{N_n} \exp[i(\mathbf{q}, \mathbf{R}_j)]$ – структурний фактор ядерної підсистеми; $V_q = 4\pi e^2/q^2$ – зображення Фур'є потенціалу Кулона; $a_{\mathbf{k}, s}^+$, $a_{\mathbf{k}, s}$ – оператори народження і знищення електронів у квантових станах із заданим хвильовим вектором \mathbf{k} і проекцією спіна s , вони підлягають статистиці Фермі-Дірака.

Для розрахунку статистичної суми електронної підсистеми у полі ядер у великому канонічному ансамблі

$$Z(\mu) = \text{Sp}_e \exp\{-\beta[\hat{H}_0 + \hat{H}_{int} - \mu\hat{N}_e]\}, \quad (6)$$

де

$$\hat{N}_e = \sum_{\mathbf{k}, s} a_{\mathbf{k}, s}^+ a_{\mathbf{k}, s} - \quad (7)$$

оператор числа електронів, μ – змінна хімічного потенціалу і $\beta = (k_B T)^{-1}$, використовуємо базисний підхід, розвинутий для опису нерелятивістської електронної рідини.

Для переходу до так званого частотного зображення використовуємо традиційне представлення взаємодії у статистичному операторі на основі гамільтоніана $\hat{\mathcal{H}}_\mu = \hat{H}_0 - \mu \hat{N}_e$, а саме

$$\begin{aligned} \exp\{-\beta(\hat{H}_0 + \hat{H}_{int} - \mu \hat{N}_e)\} &= \exp[-\beta \hat{\mathcal{H}}_\mu] \hat{S}_\beta, \\ \hat{S}_\beta &= T_\beta \exp\left\{-\int_0^\beta \hat{H}_{int}(\beta') d\beta'\right\}, \\ H_{int}(\beta') &= (2V)^{-1} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} V_q \hat{\rho}_{\mathbf{q}}(\beta') \hat{\rho}_{-\mathbf{q}}(\beta') - zV^{-1} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} V_q S_{-\mathbf{q}} \hat{\rho}_{\mathbf{q}}(\beta'). \end{aligned} \quad (8)$$

Оператор T_β є дещо узагальненим оператором хронологічного впорядкування, що має такі властивості:

$$\begin{aligned} T_\beta\{C_1(\beta_1)C_2(\beta_2)\} &= \begin{cases} C_1(\beta_1)C_2(\beta_2) & \text{при } \beta_1 > \beta_2; \\ -C_2(\beta_2)C_1(\beta_1) & \text{при } \beta_1 < \beta_2; \end{cases} \quad (9) \\ T_\beta\{a_{\mathbf{k}_1, s_1}(\beta_1) a_{\mathbf{k}_2, s_2}^+(\beta_1)\} &= -a_{\mathbf{k}_2, s_2}^+(\beta_1) a_{\mathbf{k}_1, s_1}(\beta_1), \end{aligned}$$

де $C(\beta') = a_{\mathbf{k}, s}(\beta')$ або $a_{\mathbf{k}, s}^+(\beta')$.

Перейдемо від операторів $a_{\mathbf{k}, s}(\beta')$ до нових фермі-амплітуд $a_{\mathbf{k}, s}(\nu_i)$ [10, 14],

$$a_{\mathbf{k}, s}(\beta') = \sum_{\nu_*} a_{\mathbf{k}, s}(\nu_*) \Psi_{\nu_*}(\beta'), \quad (10)$$

де функції

$$\Psi_{\nu_*}(\beta') = \beta^{-1/2} \exp(-i\nu_* \beta') \quad (11)$$

утворюють повну і ортогональну систему функцій змінної β' на інтервалі $(0 \leq \beta' \leq \beta)$ і у випадку $\nu_* = (2n + 1)\pi\beta^{-1}$ (частоти Фермі-Мацубари; $n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$) задовольняють умову періодичності $\Psi_{\nu_*}(\beta' + \beta) = -\Psi_{\nu_*}(\beta')$. Перетворення, обернене до співвідношення (10), а саме

$$a_{\mathbf{k}, s}(\nu_*) = \int_0^\beta a_{\mathbf{k}, s}(\beta') \Psi_{\nu_*}^*(\beta') d\beta' \quad (12)$$

дозволяє встановити правило обчислення середніх, побудованих на операторах $a_{\mathbf{k}, s}(\nu_*)$:

$$-\left\langle T_\beta\{a_{\mathbf{k}_1, s_1}(\nu_1) a_{\mathbf{k}_2, s_2}^+(\nu_2)\} \right\rangle_{\mathcal{H}_\mu} = G_{\mathbf{k}_1, s_1}(\nu_1) \delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \delta_{s_1, s_2} \delta_{\nu_1, \nu_2}, \quad (13)$$

де $G_{\mathbf{k}_1, s_1}(\nu_*) = \{i\nu_* - E_k + \mu\}^{-1}$ – спектральне (імпульсно-частотне) зображення одночастинкових функцій Гріна ідеальної моделі електронів (без взаємодії), яка відіграє роль базисної для опису моделі електронної рідини (моделі з гамільтоніаном

$\hat{H}_0 + \hat{V}_{ee}$), яка, в свою чергу, виконує роль базисної при описі електрон-ядерних взаємодій.

В термінах операторів $a_{\mathbf{k},s}(\nu_*)$

$$\begin{aligned} Z(\mu) &= Z_0(\mu) \langle T_\beta \{ \hat{S}_{ee} \hat{S}_{en} \} \rangle_0 = \\ &= Z_0(\mu) \langle T_\beta \{ \hat{S}_{ee} \} \rangle_0 \langle T_\beta \{ \hat{S}_{en} \} \rangle_e, \end{aligned} \quad (14)$$

де

$$\begin{aligned} \hat{S}_{ee} &= \exp \left\{ -(2\beta V)^{-1} \sum_{\nu; \mathbf{q} \neq 0} V_{\mathbf{q}} \hat{\rho}_{\mathbf{q},\nu} \rho_{-\mathbf{q},-\nu} \right\}, \\ \hat{S}_{en} &= \exp \left\{ z V^{-1} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} V_{\mathbf{q}} S_{-\mathbf{q}} \hat{\rho}_{\mathbf{q},0} \right\}, \\ \hat{\rho}_{\mathbf{q},\nu} &= \sum_{\mathbf{k}; \nu_*; s} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q},s}^+(\nu_* + \nu) a_{\mathbf{k},s}(\nu_*), \end{aligned} \quad (15)$$

причому у формулах (15) ν є різницею двох частот Фермі-Мацубари і через це є парною ($\nu = 2\pi n\beta^{-1}$, $n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$). У формулі (14) символ $\langle \dots \rangle_0$ означає статистичне засереднення за станами ідеальної моделі електронів, а символ $\langle \dots \rangle_e$ – аналогічне засереднення за станами неідеальної моделі (електронної рідини),

$$\langle T_\beta \hat{S}_{en} \rangle_e \equiv \langle T_\beta \{ \hat{S}_{ee} \hat{S}_{en} \} \rangle_0 \{ \langle T_\beta \hat{S}_{ee} \rangle_0 \}^{-1}, \quad (16)$$

при цьому

$$Z_0(\mu) = \text{Sp}_e e^{-\beta \hat{\mathcal{H}}_\mu} = e^{-\beta \Omega_0(\mu)} \quad (17)$$

є статистичною сумою ідеальної моделі, а

$$\Omega_0(\mu) = -\beta^{-1} \sum_{\mathbf{k},s} \ln \{ 1 + \exp[\beta(\mu - E_k)] \} - \quad (18)$$

її термодинамічним потенціалом.

Розкладаючи оператор \hat{S}_{en} у формулі (16) в ряд, виконуючи засереднення за станами моделі електронної рідини почленно і зображаючи результат в експонентній формі, знаходимо, що

$$\begin{aligned} \langle T_\beta \hat{S}_{en} \rangle_e &= \exp \left\{ \beta \sum_{n \geq 2} (n! V^n)^{-1} z^n \sum_{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n} V_{\mathbf{q}_1} \dots V_{\mathbf{q}_n} S_{-\mathbf{q}_1} \dots S_{-\mathbf{q}_n} \times \right. \\ &\times \delta_{\mathbf{q}_1 + \dots + \mathbf{q}_n, 0} \tilde{\mu}_n(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n | 0, \dots, 0) \left. \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

де

$$\tilde{\mu}_n(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n | 0, \dots, 0) = \beta^{-1} \langle T_\beta \{ \hat{\rho}_{\mathbf{q}_1,0} \dots \hat{\rho}_{\mathbf{q}_n,0} \} \rangle_e^{\text{ЗВ}} \quad (20)$$

є зв'язною частиною середнього від добутку n операторів $\hat{\rho}_{\mathbf{q},0}$ – статичною границею n -частинкової кореляційної функції моделі електронної рідини. Вираз (19) визначає

внесок до термодинамічного потенціалу електрон-ядерних взаємодій при їх базисному описі.

Середнє $\langle T_\beta \hat{S}_{ee} \rangle_0$, яке визначає внесок міжелектронних взаємодій до термодинамічного потенціалу моделі електронної рідини, можна розрахувати або у рамках теорії збурень, або ж методом динамічних колективних змінних [13, 14]. Цей внесок виражається у термінах n -частинкових динамічних кореляційних функцій ідеальної системи

$$\tilde{\mu}_n^0(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{\beta} \langle T_\beta \{ \hat{\rho}_{\mathbf{q}_1, \nu_1} \dots \hat{\rho}_{\mathbf{q}_n, \nu_n} \} \rangle_0^{\text{ЗВ}}, \quad (21)$$

де $y_i \equiv (\mathbf{q}_i, \nu_i)$. Функції (21) є спектральним зображенням кумулянтних n -частинкових кореляційних функцій ідеальної моделі електронів [11]. Оскільки модель (1)-(5) розглядається в області термодинамічних параметрів, де вона є слабо неідеальною, то при записі термодинамічного потенціалу досить враховувати як статичні, так і динамічні кореляційні функції двочастинкові, три- та чотиричастинкові. В теорії нерелятивістської електронної рідини таке наближення має назву наближення post-RPA [13] і узагальнює добре відоме наближення хаотичних фаз (RPA).

У наближенні post-RPA термодинамічний потенціал системи електронів у полі статичних ядер записується у вигляді

$$\begin{aligned} \Omega(\mu) &= -\beta^{-1} \cdot \ln Z(\mu) = \\ &= \Omega_e(\mu) - \sum_{n=2}^4 \frac{z^n}{n!} V^{-n} \sum_{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n} V_{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n} S_{-\mathbf{q}_1} \dots S_{-\mathbf{q}_n} \tilde{\mu}_n(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n | 0), \end{aligned} \quad (22)$$

де

$$\Omega_e(\mu) = \Omega_0(\mu) + (2\beta)^{-1} \sum_{\mathbf{q}, \nu} \ln \left\{ 1 + \frac{V_q}{V} \tilde{\mu}_2^0(y, -y) \right\} + \Omega_1(\mu) + \Omega_2(\mu) - \quad (23)$$

термодинамічний потенціал моделі електронної рідини, причому

$$\begin{aligned} \Omega_1(\mu) &= -\frac{1}{8} (\beta V)^{-2} \sum_{y_1, y_2} \tilde{\mu}_4^0(y_1, -y_1, y_2, -y_2) \tilde{V}(y_1) \tilde{V}(y_2), \\ \Omega_2(\mu) &= \frac{1}{12} \beta^2 V^{-3} \sum_{y_1, y_2, y_3} \delta_{y_1+y_2+y_3, 0} \tilde{\mu}_3^0(y_1, y_2, y_3) \times \\ &\times \tilde{\mu}_3^0(-y_1, -y_2, -y_3) \tilde{V}(y_1) \tilde{V}(y_2) \tilde{V}(y_3), \end{aligned} \quad (24)$$

а $\tilde{V}(y)$ є динамічно екранованим у наближенні хаотичних фаз потенціалом міжелектронної взаємодії,

$$\tilde{V}(y) \equiv V_q \varepsilon^{-1}(y), \quad \varepsilon(y) = 1 + \frac{V_q}{V} \tilde{\mu}_2^0(y, -y), \quad (25)$$

де $\varepsilon(y)$ – функція діелектричної проникності у цьому наближенні.

Зображення Фур'є двочастинкової кореляційної функції моделі електронної рідини $\mu_2(r) = \mathcal{F}_2(r) - 1$ (де $\mathcal{F}_2(r)$ – бінарна функція розподілу)

$$\tilde{\mu}_2(\mathbf{q}, -\mathbf{q}) = \left\{ \text{Sp} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N}_e)} \right\}^{-1} \text{Sp} \left\{ \hat{I}_2(\mathbf{q}, -\mathbf{q}) e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N}_e)} \right\},$$

$$\hat{I}_2(\mathbf{q}, -\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \sum_{s_1, s_2} a_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}, s_1}^+ a_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}, s_2}^+ a_{\mathbf{k}_2, s_2} a_{\mathbf{k}_1, s_1} \quad (26)$$

можна розрахувати за відомим термодинамічним потенціалом, оскільки

$$\tilde{\mu}_2(\mathbf{q}, -\mathbf{q}) = V \frac{\delta}{\delta V_q} \Omega(\mu) = \beta^{-1} \sum_{\nu} \mu_2(y, -y). \quad (27)$$

Функція $\tilde{\mu}_2(\mathbf{q}, -\mathbf{q})$ є аналогом $\tilde{\mu}_2^0(\mathbf{q}, -\mathbf{q})$ ідеальної системи і в лінійному наближенні відносно внесків $\Omega_1(\mu)$, $\Omega_2(\mu)$

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_2(y, -y) &= M_2(y, -y) \left\{ 1 + \frac{V_q}{V} M_2(y, -y) \right\}^{-1}, \\ M_2(y, -y) &= \tilde{\mu}_2^0(y, -y) + \mathcal{M}_{2,1}(y, -y) + \mathcal{M}_{2,2}(y, -y), \\ \mathcal{M}_{2,1}(y, -y) &= -(2\beta V)^{-1} \sum_{y_1} \tilde{\mu}_4^0(y - y_1, y_1 - y_1) \tilde{V}(y_1), \\ \mathcal{M}_{2,2}(y, -y) &= (2\beta V^2)^{-1} \sum_{y_1} \tilde{\mu}_3^0(y, y_1, -y - y_1) \times \\ &\times \tilde{\mu}_3^0(-y, -y_1, y + y_1) \tilde{V}(y_1) \tilde{V}(y + y_1). \end{aligned} \quad (28)$$

Звідси випливає, що $M_2(y, -y)$ є поляризаційним оператором слабо неідеальної системи у наближенні post-RPA. Для статичних кореляційних функцій $\tilde{\mu}_n(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n | 0, \dots, 0)$ при $n = 3, 4$, що фігурують у формулах (19), (22), використаємо наближення хаотичних фаз – статичні границі функцій

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_3(y_1, y_2, y_3) &= \tilde{\mu}_3^0(y_1, y_2, y_3) \prod_{i=1}^3 \varepsilon^{-1}(y_i), \\ \tilde{\mu}_4(y_1, \dots, y_4) &= \tilde{\mu}_4^0(y_1, y_2, y_3, y_4) \prod_{i=1}^4 \varepsilon^{-1}(y_i). \end{aligned} \quad (29)$$

3 Багаточастинкові кореляційні функції ідеального релятивістського виродженого електронного газу

Кореляційні функції $\tilde{\mu}_n(y_1, \dots, y_n)$ при $2 \leq n \leq 4$ для нерелятивістського ідеального електронного газу добре відомі. Функція $\tilde{\mu}_2^0(y, -y)$ – поляризаційний оператор наближення хаотичних фаз – розрахована у роботі [16] для випадку абсолютного нуля температури. Статичну тричастинкову кореляційну функцію розраховано в роботі [17], а в роботах [18, 19] досліджено статичні функції третього і четвертого порядку при $T = 0K$ – так звані багатохвостки теорії збурень за потенціалом електрон-йонних взаємодій у напівфеноменологічній теорії металів. Динамічні три- та чотиричастинкові функції $\tilde{\mu}_3^0(y_1, y_2, -y_1 - y_2)$ і $\tilde{\mu}_4^0(y_1, -y_1, y_2, -y_2)$ розраховано у роботах [20, 21] (див. також [14]). Дослідження динамічних і статичних функцій при відмінних від нуля температурах виконано у роботах [22, 23]. Розрахунки енергетичних характеристик електрон-ядерної моделі при густинах, які відповідають

виродженим карликам, вимагають розрахунку функцій $\tilde{\mu}_n^0(y_1, \dots, y_n)$ для ідеальної фермі-системи з

одночастинковим спектром $E_k = [(m_0c^2)^2 + \hbar^2k^2c^2]^{1/2} - m_0c^2$. У цій роботі ми розрахуємо їх у наближенні повного виродження – для основного стану моделі.

Згідно з означенням (21) $\tilde{\mu}_n^0(y_1, \dots, y_n)$ є дійсними величинами і зображаються у вигляді згорток одночастинкових функцій Гріна ідеальної моделі:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_2^0(y, -y) &= -\beta^{-1} \sum_{\mathbf{k}; s; \nu_*} G_{\mathbf{k}, s}(\nu_*) G_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, s}(\nu_* + \nu); \\ \tilde{\mu}_3^0(y_1, y_2, y_3) &= 2\beta^{-1} \delta_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3, 0} \delta_{\nu_1+\nu_2+\nu_3, 0} \sum_{\mathbf{k}, s; \nu_*} G_{\mathbf{k}, s}(\nu_*) \times \\ &\times G_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_1, s}(\nu_* + \nu_1) G_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_2, s}(\nu_* - \nu_2); \\ \tilde{\mu}_4^0(y_1, -y_1, y_2, -y_2) &= \beta^{-1} \sum_{\mathbf{k}, s; \nu_*} G_{\mathbf{k}, s}(\nu_*) G_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_1, s}(\nu_* - \nu_1) \times \\ &\times \sum_{\sigma=\pm 1} G_{\mathbf{k}-\sigma\mathbf{q}_2, s}(\nu_* - \sigma\nu_2) \{2G_{\mathbf{k}, s}(\nu_*) + G_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_1+\sigma\mathbf{q}_2, s}(\nu_* + \nu_1 + \sigma\nu_2)\} \end{aligned} \quad (30)$$

і т.д. Розкладаючи добутки функцій Гріна на прості множники і використовуючи співвідношення

$$\beta^{-1} \sum_{\nu_*} G_{\mathbf{k}, s} = n_{\mathbf{k}, s} = \{1 + \exp[\beta(E_k - \mu)]\}^{-1}, \quad (31)$$

одержуємо таке зображення функцій $\tilde{\mu}_n^0(y_1, \dots, y_n)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_2(y, -y) &= \gamma_2(y) = -2\text{Re} \sum_{\mathbf{k}, s} n_{\mathbf{k}, s} \{i\nu + E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}\}^{-1}, \\ \tilde{\mu}_3^0(y_1, y_2, y_3) &= \delta_{y_1+y_2+y_3, 0} \{\gamma_3(y_1, -y_2) + \gamma_3(y_2, -y_3) + \gamma_3(y_3, -y_1)\}; \\ \gamma_3(y_1, y_2) &= 2\text{Re} \sum_{\mathbf{k}, s} n_{\mathbf{k}, s} \{i\nu_1 + E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_1}\}^{-1} \cdot \{i\nu_2 + E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_2}\}^{-1}; \dots \end{aligned} \quad (32)$$

3.1 Двочастинкова кореляційна функція

Переходячи від суми за вектором \mathbf{k} до інтеграла, використаємо сферичну систему координат, вісь OZ якої напрямлена вздовж вектора \mathbf{q} і “релятивістські” безрозмірні змінні

$$k_* = \frac{|\mathbf{k}|\hbar}{m_0c}, \quad q_* = \frac{|\mathbf{q}|\hbar}{m_0c}, \quad \nu_* = \frac{\nu}{m_0c^2}. \quad (33)$$

Інтегруючи за кутовими змінними вектора \mathbf{k} , одержуємо зображення $\tilde{\mu}_2^0(y, -y)$ у вигляді одновимірного інтеграла:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_2^0(y, -y) &= \frac{3N_e}{m_0c^2x^2} J_2(q_*, \nu_* | x), \\ J_2(q_*, \nu_* | x) &= (xq_*)^{-1} \int_0^\infty dk_* k_* n(k_*) A(k_* | q_*, \nu_*), \end{aligned} \quad (34)$$

$$A(k_*|q_*, \nu_*) = \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma \left\{ [1 + (k_* + \sigma q_*)^2]^{1/2} - \nu_* \arctg[\nu_*^{-1} \eta_\sigma(k_*, q_*)] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (1 + k_*^2)^{1/2} \ln[\nu_*^2 + \eta_\sigma^2(k_*, q_*)] \right\}, \\ \eta_\sigma(k_*, q_*) = [1 + (k_* + \sigma q_*)^2]^{1/2} - [1 + k_*^2]^{1/2}.$$

Одержаний вираз точний, але наступне точне інтегрування за змінною k_* навіть у випадку $T = 0K$ є дуже громіздким. У зв'язку з цим ми одержимо наближені аналітичні вирази для $\tilde{\mu}_2^0(y, -y)$ як у статичному, так і в динамічному випадках. Насамперед розглянемо статичний випадок, записуючи $\tilde{\mu}_2^0(q, -q|0, 0)$ у вигляді

$$\tilde{\mu}_2^0(q, -q|0, 0) = 2 \sum_{\mathbf{k}, s} n_{\mathbf{k}, s} \{ \tilde{E}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \tilde{E}_{\mathbf{k}} \} \{ \tilde{E}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^2 - \tilde{E}_{\mathbf{k}}^2 \}^{-1}, \\ \tilde{E}_{\mathbf{k}} = \{ (m_0 c^2)^2 + \hbar^2 k^2 c^2 \}^{1/2} = m_0 c^2 (1 + k_*^2)^{1/2}. \quad (35)$$

У змінних (33) і при $T = 0K$

$$J_2(q_*, 0|x) = (2xq_*)^{-1} \int_0^x dk_* k_* \int_{-1}^1 dt (t + q_*/2k_*)^{-1} \\ \times \{ (1 + k_*^2 + q_*^2 + 2k_* q_* t)^{1/2} + (1 + k_*^2)^{1/2} \}. \quad (36)$$

Для спрощення запису надалі будемо опускати зірочки. Квадратний корінь розкладемо у ряд за степенями змінної t , внаслідок чого безрозмірна функція $J_2(q_*, 0|x)$ зображається рядом

$$J_2(q, 0|x) = \sum_{n \geq 0} J_{2,n}(q|x), \quad (37)$$

де

$$J_{2,0}(q|x) = (2xq)^{-1} \int_0^x dk k \{ (1 + k^2 + q^2)^{1/2} + (1 + k^2)^{1/2} \} I_0(q/2k), \quad (38)$$

а при $n \geq 1$

$$J_{2,n}(q|x) = x^{-1} (2q)^{n-1} (n!)^{-1} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \dots \left(\frac{1}{2} - (n-1) \right) \\ \times \int_0^x dk k^{n+1} (1 + k^2 + q^2)^{1/2-n} I_n(q/2k). \quad (39)$$

Тут введено функції

$$I_n(\alpha) = \int_{-1}^1 dt t^n (t + \alpha)^{-1}, \quad (40)$$

які задовольняють такі рекурентні співвідношення:

$$I_0(\alpha) = \ln \left| \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right|; \quad (41)$$

$$I_{2n-1}(\alpha) = 2(2n-1)^{-1} - \alpha I_{2n-2}(\alpha), \quad I_{2n}(\alpha) = -\alpha I_{2n-1}(\alpha) \quad \text{при } n \geq 1.$$

Всі члени ряду (37) виражаються в елементарних функціях. Перші три доданки є такими:

$$J_{2,0}(q|x) = \frac{1}{6qx} \{ (1+x^2+q^2)^{3/2} + (1+x^2)^{3/2} \} L_1(x|q) \quad (42)$$

$$- \frac{1}{6qx} \{ \Phi_{3/2}(x|1+q^2|q/2) - \Phi_{3/2}(x|1+q^2|-q/2) + \Phi_{3/2}(x|1|q/2) - \Phi_{3/2}(x|1|-q/2) \};$$

$$\Phi_{3/2}(x|\alpha|\gamma) = \frac{1}{3} \{ (\alpha+x^2)^{3/2} - \alpha^{3/2} \} + (\alpha+x^2)^{1/2} \left(\alpha + \gamma^2 - \frac{\gamma}{2}x \right) - \alpha^{1/2}(\alpha + \gamma^2)$$

$$- (\alpha + \gamma^2)^{3/2} L_4(x|\alpha|\gamma) - \gamma \left(\frac{3}{2}\alpha + \gamma^2 \right) L_3(x|\alpha);$$

$$J_{2,1}(q|x) = \frac{1}{2}(1+x^2+q^2)^{1/2} - \frac{1}{2x}(1+q^2)L_2(x|q) - \frac{q}{x}(1+q^2+x^2)^{1/2}L_1(x|q) \\ + \frac{q}{4x} \{ \Phi_{1/2}(x|1+q^2|q/2) - \Phi_{1/2}(x|1+q^2|-q/2) \}; \quad (43)$$

$$\Phi_{1/2}(x|\alpha|\gamma) = (\alpha+x^2)^{1/2} - \alpha^{1/2} - (\alpha+\gamma^2)^{1/2}L_4(x|\alpha|\gamma) - \gamma L_3(x|\alpha);$$

$$J_{2,2}(q|x) = \frac{q^2}{4x} \left\{ -x(1+q^2+x^2)^{1/2} + L_2(x|q) + \frac{q}{4}(1+q^2+x^2)^{-1/2}L_1(x|q) \right. \\ \left. - \frac{q}{4} [\Phi_{-1/2}(x|1+q^2|q/2) - \Phi_{-1/2}(x|1+q^2|-q/2)] \right\}; \quad (44)$$

$$\Phi_{-1/2}(x|\alpha|\gamma) = -(\alpha+\gamma^2)^{-1/2}L_4(x|\alpha|\gamma).$$

У формулах (42)–(44) використано такі позначення:

$$L_1(x|q) = \ln \left| \frac{x+q/2}{x-q/2} \right|; \quad L_2(x|q) = \ln \left[\frac{x+(1+x^2+q^2)^{1/2}}{(1+q^2)^{1/2}} \right]; \\ L_3(x|\alpha) = \ln \left[\frac{x+(\alpha+x^2)^{1/2}}{\alpha^{1/2}} \right]; \quad (45) \\ L_4(x|\alpha|\gamma) = \ln \left[\frac{\gamma}{x+\gamma} \frac{\alpha - \gamma x + (\alpha+x^2)^{1/2}(\alpha+\gamma^2)^{1/2}}{\alpha + \alpha^{1/2}(\alpha+\gamma^2)^{1/2}} \right].$$

Рисунок 1, на якому зображено послідовність функцій $\sum_{n=0}^{n_0} J_{2,n}(q|x)$, свідчить про дуже добру збіжність ряду (37). Доданок $J_{2,0}(q|x)$ є визначальним і суттєво відхиляється від “точної” кривої, розрахованої чисельним інтегруванням за формулою (36) (хрестики), лише в області невеликих значень q . Доданок $J_{2,1}(q|x)$ є основною

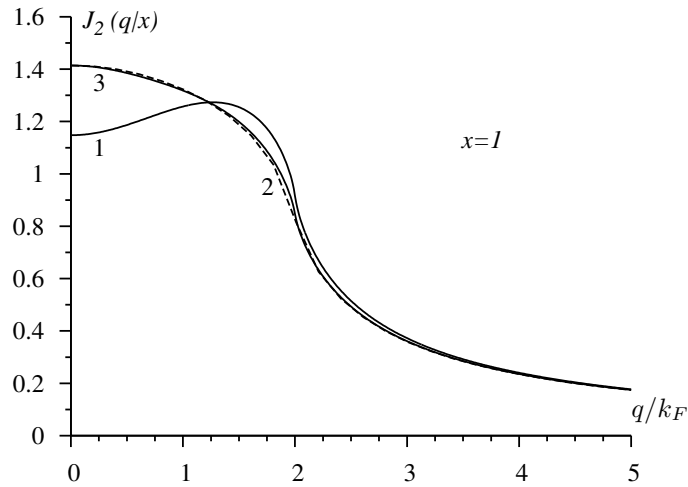


Рис. 1: Послідовність функцій $\sum_{n=0}^{n_0} J_{2,n}(q|x)$ (див. ф. (37)). Крива 1 відповідає $n_0 = 0$, крива 2 - $n_0 = 1$, крива 3 - $n_0 = 2$

поправкою, суттєвою в області малих значень q , а $J_{2,2}(q|x)$ є дуже малим при будь-яких q та x . Як видно з рисунка, $J_2(q|x)$ є монотонно спадною функцією змінної q , яка повільно спадає на малих q , має перегин в околі точки $q = 2x$ і швидко спадає до нуля при великих значеннях q . Виходячи з означення (32), легко знайти асимптотику

$$\tilde{\mu}_2^0(\mathbf{q}, -\mathbf{q}|0, 0) \Rightarrow \begin{cases} 3N_e(m_0c^2x^2)^{-1}(1+x^2)^{1/2} & \text{при } q \rightarrow 0; \\ 2N_e(m_0c^2q)^{-1} = 2N_e(c\hbar q) & \text{при } q \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (46)$$

Якщо у формулі (36) перейти від “релятивістських” змінних (33) до “нерелятивістських” $\tilde{k} = |\mathbf{k}| k_F^{-1}$, $\tilde{q} = |\mathbf{q}| k_F^{-1}$, покладаючи $q_* = \tilde{q}x$, $k_* = \tilde{k}x$, то при формальному переході $x \rightarrow 0$ одержимо добре відому нерелятивістську статичну кореляційну функцію

$$\tilde{\mu}_2^0(\mathbf{q}, -\mathbf{q}|0, 0) = \frac{3N_e}{2\varepsilon_F} \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{\tilde{q}} \left(1 - \frac{1}{4}\tilde{q}^2 \right) \ln \left| \frac{1 + \frac{1}{2}\tilde{q}}{1 - \frac{1}{2}\tilde{q}} \right| \right\}, \quad (47)$$

що має асимптотику

$$\tilde{\mu}_2^0(\mathbf{q}, -\mathbf{q}|0, 0) \Rightarrow \begin{cases} 3N_e(2\varepsilon_F)^{-1} & \text{при } \tilde{q} \rightarrow 0; \\ 2N_e(\hbar^2\tilde{q}^2/2m_0)^{-1} & \text{при } \tilde{q} \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (48)$$

Тут $2\varepsilon_F = \hbar^2k_F^2/m_0 = m_0c^2x^2$.

Рисунок 2, на якому $\tilde{\mu}_2^0(\mathbf{q}, -\mathbf{q}|0, 0)$ представлена як функція змінних $(q/k_F|x)$, відображає її залежність від параметра релятивізму.

За допомогою елементарних перетворень динамічну кореляційну функцію

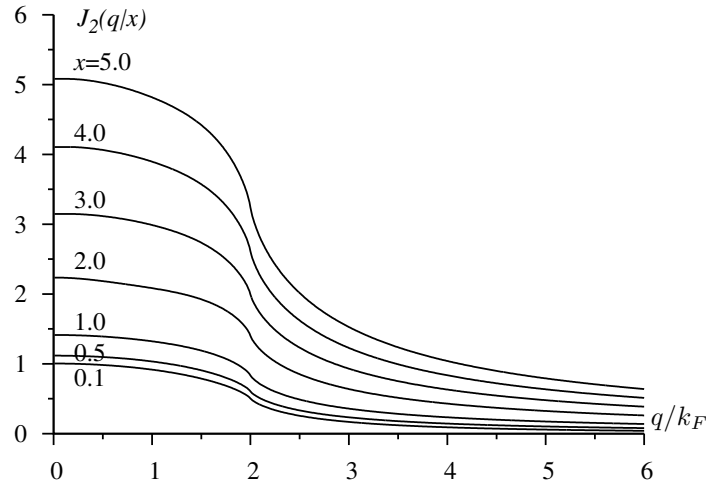


Рис. 2: Залежність базисної статичної функції $2\varepsilon_F(3N_e)^{-1}\tilde{\mu}_2^0(\mathbf{q}, -\mathbf{q}|0, 0)$ від параметра релятивізму

$\tilde{\mu}_2^0(y, -y)$ у змінних (33) представимо у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_2^0(y, -y) &= \frac{3N_e}{2m_0c^2x^3q} \int_0^x dk k \int_{-1}^1 dt (t + q/2k) C(k, t|q_*) \\ &\times \left\{ (t + q/2k)^2 + \left[\frac{\nu}{2qk} C(k, t|q_*) \right]^2 \right\}^{-1}, \quad (49) \\ C(k, t|q) &= [1 + k^2 + q^2 + 2kqt]^{1/2} + [1 + k^2]^{1/2}. \end{aligned}$$

Згідно з теоремою про середнє значення інтеграла використаємо наближення

$$C(k, t|q) \Rightarrow C(x, t_0|q); \quad k^{-1}C(k, t|q) \Rightarrow x^{-1}C(x, t_0|q). \quad (50)$$

Наступним інтегруванням за змінними t і k знаходимо такий наближений вираз:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_2^0(y, -y) &= \frac{3N_e}{m_0c^2x^2} J_2(q, \nu|x), \quad (51) \\ J_2(q, \nu|x) &= \frac{1}{4} C(x, t_0|q) \left\{ 1 - \nu \left[\operatorname{arctg} \frac{1 + q/2x}{\nu} + \operatorname{arctg} \frac{1 - q/2x}{\nu} \right] \right. \\ &\left. + \frac{x}{2q} \left(1 - \frac{q^2}{4x^2} + \nu^2 \right) \ln \frac{\nu^2 + (1 + q/2x)^2}{\nu^2 + (1 - q/2x)^2} \right\}, \end{aligned}$$

де

$$\nu = \nu(2xq)^{-1} C(x, t_0|q). \quad (52)$$

У границі $\nu \rightarrow 0$ одержаний вираз узгоджується з асимптотикою статичної функції (46). У нерелятивістській границі $\nu \Rightarrow \nu(2\varepsilon_F q/k_F)^{-1}$, $C(x, t_0|q) \Rightarrow 2$, тому вираз

(51) у цій границі збігається з парною кореляційною функцією нерелятивістської моделі. На рисунку 3 наведено залежність функції $J_2(q, \nu|x)$ від змінної q при фіксованих значеннях безрозмірної частоти $\nu(m_0c^2)^{-1}$ і параметра релятивізму. При цьому використано функцію $C(x, t_0|q)$ при $t_0 = -1/3$. Для порівняння наведено також результат чисельного інтегрування за формулою (34). Невелике відхилення між кривими в околі точки $q = 2k_F$ практично не впливає на точність розрахунків енергетичних характеристик.

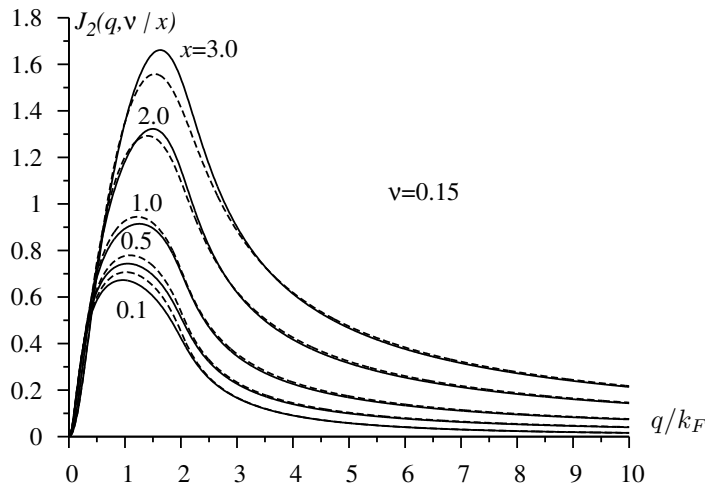


Рис. 3: Залежність динамічної двочастинкової кореляційної функції $J_2(q, \nu|x)$ від хвильового вектора \mathbf{q} при фіксованих значеннях безрозмірної частоти $\nu(m_0c^2)^{-1}$ і параметра релятивізму. Суцільні криві відповідають числовим розрахункам за ф. (34), пунктирні – формулі (51).

3.2 Тричастинкова кореляційна функція

Із нерелятивістської теорії відомо, що статичні кореляційні функції виродженого електронного газу при $T = 0K$ мають особливості [18, 19]. Як видно з формули (47), двочастинкова кореляційна функція має слабку особливість у точці $q = 2k_F$. Тричастинкова функція має логарифмічну особливість у точках $q_1, q_2 = 2k_F$, чотиричастинкова має полюс і т.д. При відмінних від нуля температурах особливості згладжуються, так само динамічні кореляційні функції мають згладжені особливості, безмежні розриви у них відсутні взагалі [20–23]. Кореляційні функції вищого порядку (при $n \geq 3$) є лінійними комбінаціями елементів $\gamma_n(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$, як це видно з формул (32). При цьому є значна взаємна компенсація доданків $\gamma_n(y_1, \dots, y_{n-1})$, що вимагає достатньої точності при наближених розрахунках, особливо у випадку статичних функцій.

Звільняючись від радикалів у знаменнику підінтегральної функції, представимо

статичну функцію $\gamma_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2|0, 0)$ у змінних (33) в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \gamma_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2|0, 0) &= \frac{3N_e}{(m_0 c^2 x^2)^2} J_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2|x), \\ J_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2|x) &= (2\pi)^{-1} x \int d\mathbf{k} n_{\mathbf{k},s} \{q_1^2 + 2(\mathbf{k}, \mathbf{q}_1)\}^{-1} \{q_2^2 + 2(\mathbf{k}, \mathbf{q}_2)\}^{-1} \times \\ &\times \prod_{i=1}^2 \{[1 + (\mathbf{k} + \mathbf{q}_i)^2]^{1/2} + [1 + k^2]^{1/2}\}. \end{aligned} \quad (53)$$

Як ми переконалися при розрахунку $\tilde{\mu}_2^0(\mathbf{q} - \mathbf{q}|0, 0)$, достатню точність забезпечує розклад квадратного кореня $[1 + k^2 + q_i^2 + 2kq_i t]^{1/2}$ у лінійному наближенні за косинусом кута між векторами \mathbf{k} і \mathbf{q} . У цьому наближенні при $T = 0K$

$$\begin{aligned} J_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2|x) &= J_{3,1}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2|x) + J_{3,2}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2|x) + J_{3,2}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1|x) + \dots, \\ J_{3,1}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2|x) &= x(8\pi)^{-1} \int_0^x dk k^2 \Phi_3(k|q_1, q_2) R_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2|\mathbf{k}), \\ J_{3,2}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2|x) &= (8\pi)^{-1} x q_1^{-1} \int_0^x dk k \varphi(k|q_1) [1 + k^2 + q_2^2]^{1/2} \ln \left| \frac{k + q_1/2}{k - q_1/2} \right|. \end{aligned} \quad (54)$$

Тут використано такі позначення:

$$\begin{aligned} \varphi(k|q_i) &= [1 + k^2 + q_i^2]^{1/2} + [1 + k^2]^{1/2}; \\ \Phi(k|q_1, q_2) &= \varphi(k|q_1)\varphi(k|q_2) - \frac{q_1^2}{2} \varphi(k|q_2)[1 + k^2 + q_1^2]^{-1/2} - \\ &- \frac{q_2^2}{2} \varphi(k|q_1)[1 + k^2 + q_2^2]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (55)$$

Функція $R_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2|\mathbf{k})$ є інтегралом за кутовими змінними вектора \mathbf{k} :

$$R_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2|\mathbf{k}) = \int d\Omega_k \left[(\mathbf{k}, \mathbf{q}_1) + \frac{q_1^2}{2} \right]^{-1} \left[(\mathbf{k}, \mathbf{q}_2) + \frac{q_2^2}{2} \right]^{-1}. \quad (56)$$

Для розрахунку інтеграла скористаємось тотожністю Фейнмана

$$(ab)^{-1} = \int_0^1 d\alpha \{ \alpha a + (1 - \alpha) b \}^{-2}. \quad (57)$$

Оскільки підінтегральна функція в останньому інтегралі може мати полюси, ми з обережності розглянемо не вираз (56), а його регуляризований аналог

$$R_3^\delta(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2|\mathbf{k}) = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)^{-1} \text{Re} \int d\Omega_k \left[\frac{q_1}{2} + (\mathbf{k}, \mathbf{e}_1) + i\delta \right]^{-1} \left[\frac{q_2}{2} + (\mathbf{k}, \mathbf{e}_2) + i\delta \right]^{-1}, \quad (58)$$

переходячи до границі $\delta \rightarrow 0$ після інтегрування за кутовими змінними вектора \mathbf{k} і параметром α . У формулі (58) $\mathbf{e}_1 = \mathbf{q}_1/q_1$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{q}_2/q_2$. Застосовуючи тотожність

(57) і змінюючи порядок інтегрування, знаходимо, що

$$R_3^\delta(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2|k) = (q_1, q_2)^{-1} \int_0^1 d\alpha \int d\Omega_k \{\omega_\alpha + (\mathbf{k}, \boldsymbol{\rho}_\alpha) + i\delta\}^{-2}, \quad (59)$$

де

$$\begin{aligned} \omega_\alpha &= \frac{1}{2} \{\alpha q_1 + (1 - \alpha) q_2\}, \\ \boldsymbol{\rho}_\alpha &= \alpha \mathbf{e}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{e}_2, \\ \rho_\alpha &= |\boldsymbol{\rho}_\alpha| = \{1 - 2\alpha(1 - t) + 2\alpha^2(1 - t)\}^{1/2}; \quad t = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2). \end{aligned} \quad (60)$$

Інтегруючи за кутами вектора \mathbf{k} у сферичній системі координат, вісь OZ якої паралельна вектору $\boldsymbol{\rho}_\alpha$, одержуємо такий вираз:

$$R_3^\delta(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2|k) = -\frac{4\pi}{q_1 q_2} \int_0^1 d\alpha \frac{(k\rho_\alpha)^2 - \omega_\alpha^2}{[(k\rho_\alpha)^2 - \omega_\alpha^2]^2 + 2\delta^2[(k\rho_\alpha)^2 + \omega_\alpha^2] + \delta^4}. \quad (61)$$

У підінтегральній функції

$$\begin{aligned} (k\rho_\alpha)^2 - \omega_\alpha^2 &= a + \alpha b + \alpha^2 c, \\ a &= k^2 - \frac{1}{4} q_2^2; \quad b = -2k^2(1 - t) + \frac{1}{2} q_2(q_2 - q_1); \\ c &= 2k^2(1 - t) - \frac{1}{4} (q_1 - q_2)^2; \\ \Delta &= 4ac - b^2 = 4k^4(1 - t^2) - k^2(q_1^2 + q_2^2 - 2q_1 q_2 t) \equiv \\ &\equiv 4k^2(1 - t^2) (k^2 - q_R^2), \end{aligned} \quad (62)$$

де q_R – радіус кола, описаного навколо трикутника, сторони якого утворені векторами $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2$. Тому при всіх значеннях $k \neq q_R$ у підінтегральній функції в (61) можна перейти до границі $\delta \rightarrow 0$, бо вона може мати лише полюси першого порядку і є інтегрованою. Розраховуючи інтеграл (61) при $\delta = 0$, будемо надалі обчислювати інтеграл за змінною k в сенсі головного значення, виключаючи точку $k = q_R$. Інтегруючи за параметром α , знаходимо, що при $k > q_R$

$$\begin{aligned} R_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2|k) &= -\frac{8\pi}{q_1 q_2} \Delta^{-1/2} \{ \arctg[\Delta^{-1/2}(2k^2(1 - t^2) + \frac{1}{2} q_1(q_2 - q_1))] + \\ &+ \arctg[\Delta^{-1/2}(2k^2(1 - t^2) + \frac{1}{2} q_2(q_1 - q_2))] \}; \end{aligned} \quad (63)$$

при $k < q_R$

$$\begin{aligned} R_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2|k) &= -\frac{4\pi}{q_1 q_2} (-\Delta)^{-1/2} \left\{ \ln \left| \frac{4(1 - t^2)k^2 + q_1(q_2 - q_1) - 2(-\Delta)^{-1/2}}{4(1 - t^2)k^2 + q_2(q_1 - q_2) + 2(-\Delta)^{-1/2}} \right| + \right. \\ &+ \left. \ln \left| \frac{4(1 - t^2)k^2 + q_2(q_1 - q_2) - 2(-\Delta)^{-1/2}}{4(1 - t^2)k^2 + q_1(q_2 - q_1) + 2(-\Delta)^{-1/2}} \right| \right\}. \end{aligned} \quad (64)$$

Таким чином, розрахунок функції $J_{3,1}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2|k)$ зведено до одновимірного інтеграла за змінною k . Звичайно, що цю функцію можна було б представити у вигляді двовимірного інтеграла за змінними k, α , використовуючи вираз (61) при малому, але відмінному від нуля параметрі δ . При чисельному розрахунку тоді не виникає жодних труднощів, адже $R_3^{\delta}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2|q_R) = 0$.

Наближений розрахунок доданків $J_{3,2}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2|x)$ можна виконати аналітично. Враховуючи, що такі доданки мають зміст поправок до $J_{3,1}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2|x)$, використаємо теорему про середнє значення інтеграла, замінюючи множник $[1 + k^2 + q^2]^{-1/2}$ у формулі (54) його значенням на верхній границі інтегрування. У цьому наближенні

$$J_{3,2}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2|x) \approx x^2(1 + x^2 + q_2^2)^{-1/2} J_{2,0}(q_1|x). \quad (65)$$

Переходячи до розрахунку динамічної тричастинкової кореляційної функції, наведемо насамперед вираз для неї у частковому випадку $y_2 = -y_1$ при $T = 0K$. Згідно з формулою (34)

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_3^0(y, -y, 0) &= \frac{\partial}{\partial \mu} \tilde{\mu}_2^0(y, -y) = \\ &= \frac{3N_e}{(m_0 c^2 x^2)^2} x(1 + x^2)^{1/2} q_*^{-1} A(x|q_*, \nu_*); \quad \tilde{\mu}_3^0(0, 0, 0) = 3N_e(m_0 c^2 x^2)^{-1}(1 + 2x^2). \end{aligned} \quad (66)$$

Як видно з формул (22)-(23), для розрахунку внесків до термодинамічного потенціалу $\Omega_1(\mu)$ та $\Omega_2(\mu)$ потрібні динамічні кореляційні функції третього і четвертого порядку. Оскільки ці внески є поправками до внеску хаотичних фаз, розрахуємо кореляційну функцію $\tilde{\mu}_3^0(y_1, y_2, -y_1 - y_2)$ наближено, у такому ж наближенні, як і динамічну функцію $\tilde{\mu}_2^0(y, -y)$. За аналогією з формулою (49) у змінних (33)

$$\begin{aligned} \gamma_3(y_1, y_2) &= \frac{3N_e}{8\pi(m_0 c^2)^2} (q_1 q_2)^{-1} x^{-3} \text{Re} \int_0^x dk \int d\Omega_e \times \\ &\times \prod_{j=1,2} C(\mathbf{k}|\mathbf{q}_j) \left\{ \frac{i\nu_j}{2m_0 c^2 q k} C(\mathbf{k}|\mathbf{q}_j) + (\mathbf{e}, \mathbf{e}_j) + \frac{q_j}{2k} \right\}^{-1}; \quad (67) \\ C(\mathbf{k}|\mathbf{q}_j) &= (1 + k^2 + q_j^2 + 2kq(\mathbf{e}, \mathbf{e}_j))^{1/2} + (1 + k^2)^{1/2}, \\ \mathbf{e} &= \mathbf{k}/k, \quad \mathbf{e}_j = \mathbf{q}_j/q_j. \end{aligned}$$

Як і у випадку $\tilde{\mu}_2^0(y, -y)$, заміною

$$\begin{aligned} C(\mathbf{k}|\mathbf{q}_j) &\Rightarrow C(x, t_0|q_j) = (1 + x^2 + q_j^2 + 2xq_j t_0)^{1/2} + (1 + x^2)^{1/2}, \\ k^{-1} C(\mathbf{k}|\mathbf{q}_j) &\Rightarrow x^{-1} C(x, t_0|q_j) \end{aligned} \quad (68)$$

зводимо розрахунок функції $\gamma_3(y_1, y_2)$ до розрахунку нерелятивістської функції з перенормованими частотами

$$\frac{\nu_j k_F}{2\varepsilon_F q} = u_j \Rightarrow v_j = \frac{\nu_j}{2m_0 c^2 x q_j} C(x, t_0|q_j). \quad (69)$$

У цьому наближенні

$$\begin{aligned} \gamma_3(y_1, y_2) &\cong \frac{3N_e}{4(m_0c^2)^2} (q_1q_2)^{-1} x^{-3} C(x, t_0|q_1) C(x, t_0|q_2) \times \\ &\times \operatorname{Re} \int_0^x dk \frac{1}{2\pi} \int \frac{d\Omega_{\mathbf{e}}}{\{iv_1 + (\mathbf{e}, \mathbf{e}_1) + q_1/2k\} \{iv_2 + (\mathbf{e}, \mathbf{e}_2) + q_2/2k\}}. \end{aligned} \quad (70)$$

Розрахунок інтеграла за кутами одиничного вектора \mathbf{e} виконаємо за допомогою тотожності (57). Після наступного інтегрування за змінною k знаходимо, що

$$\begin{aligned} \gamma_3(y_1, y_2) &\cong -\frac{3N_e}{4(m_0c^2x^2)^2} (q_1q_2)^{-1} x^2 C(x, t_0|q_1) C(x, t_0|q_2) \times \\ &\times \int_0^1 \frac{d\alpha}{\rho_\alpha^2} \left\{ 2 - \frac{\omega_2}{\rho} \operatorname{arctg} \frac{\rho + \omega_1/x}{\omega_2} - \right. \\ &\left. - \frac{\omega_2}{\rho} \operatorname{arctg} \frac{\rho - \omega_1/x}{\omega_2} - \frac{\omega_1}{2x\rho} \ln \frac{(\rho + \omega_1/x)^2 + \omega_2^2}{(\rho - \omega_1/x)^2 + \omega_2^2} \right\}, \end{aligned} \quad (71)$$

де

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2} \{ \alpha q_1 + (1 - \alpha) q_2 \}; \\ \omega_2 &= \alpha v_1 + (1 - \alpha) v_2; \\ \rho &= \{ 1 - 2\alpha(1 - t) + 2\alpha^2(1 - t)^2 \}^{1/2}; \quad t = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2). \end{aligned} \quad (72)$$

Зображення (71) справедливе для частот ν_1, ν_2 одного знаку – це необхідна умова для використання тотожності Фейнмана у тому випадку, коли $k\rho - \omega_1$ може обертатися в нуль. Однак функція $\tilde{\mu}_3^0(y_1, y_2, -y_1 - y_2)$ є комбінацією трьох функцій $\gamma_3(x_i, x_j)$ зі складнішими аргументами. Виконуючи елементарні перетворення, функції з частотами протилежних знаків можна звести до виразів з частотами одного знаку. Представимо $\gamma_3(y_1, y_2)$ у вигляді

$$\gamma_3(y_1, y_2) \equiv \gamma_3(\mathbf{q}_1, \nu_1; \mathbf{q}_2, \nu_2) = \frac{3N_e}{(m_0c^2x^2)^2} \tilde{\gamma}_3(q_1, q_2, t|v_1, v_2), \quad (73)$$

де $\tilde{\gamma}(\dots)$ – безрозмірна функція п'яти аргументів та параметра релятивізму, $v_i \equiv \nu_i C(x, t_0|q_i) (m_0c^2xq_i)^{-1}$. Справедливі такі формули зведення, що впливають з означення $\gamma_3(y_1, y_2)$:

$$\begin{aligned} \gamma_3(\mathbf{q}_1, \nu_1; \mathbf{q}_2, -\nu_2) &= \frac{3N_e}{(m_0c^2x^2)^2} \tilde{\gamma}_3(q_1, -q_2, t|v_1, v_2); \\ \gamma_3(\mathbf{q}_1, \nu_1; \mathbf{q}_2, -\nu_2) &= \frac{3N_e}{(m_0c^2x^2)^2} \tilde{\gamma}_3(q_1, -q_2, -t|v_1, v_2); \\ \gamma_3(\mathbf{q}_1, \nu_1; -\mathbf{q}_2, \nu_2) &= \frac{3N_e}{(m_0c^2x^2)^2} \tilde{\gamma}_3(q_1, q_2, -t|v_1, v_2). \end{aligned} \quad (74)$$

Представлення $\gamma_3(y_1, y_2)$ у вигляді (71) зручне для чисельних розрахунків, хоча інтегрування за змінною α виконується аналітично до кінця і результат зображається в елементарних функціях.

4 Поправка на локальне поле

Розрахунок кореляційної функції $\tilde{\mu}_4^0(y_1, -y_1, y_2, -y_2)$ можна виконати цілком так само, як і функції $\tilde{\mu}_3^0(y_1, y_2, -y_1 - y_2)$. Однак для наближеного розрахунку доданка $\Omega_1(\mu)$ достатньо виконати обчислення інтегрального виразу

$$V^{-1} \sum_{q_1, \nu_1} V_{q_1} \tilde{\mu}_4^0(\mathbf{q}, \nu, -\mathbf{q}, -\nu; \mathbf{q}_1, \nu_1, -\mathbf{q}_1, -\nu_1), \quad (75)$$

пов'язаного з поправкою на локальне поле моделі електронної рідини. З іншого боку, дослідження поправки на локальне поле взаємодіючого релятивістського електронного газу представляє самостійний інтерес. Тому ми розглянемо поправку на локальне поле у наближенні (75), що відповідає так званому наближенню Гелдарта-Тейлора у нерелятивістській теорії [16]. Поправка на локальне поле є одним з варіантів узагальнення наближення хаотичних фаз, у якому поляризаційний оператор і двочастинкова кореляційна функція взаємодіючої системи визначаються такими співвідношеннями

$$M_2(y, -y) = \tilde{\mu}_2^0(y, -y) \left\{ 1 - \frac{V_q}{V} \tilde{\mu}_2^0(y, -y) G(y) \right\}^{-1}, \quad (76)$$

$$\mu_2(y, -y) = \tilde{\mu}_2^0(y, -y) \left\{ 1 + \frac{V_q}{V} \tilde{\mu}_2^0(y, -y) [1 - G(y)] \right\}^{-1}.$$

Для дуже слабо неідеальної системи ці співвідношення можна розглядати у лінійному наближенні за поправкою $G(y)$. Тоді згідно з формулами (28)

$$G_{id}(y) = V(V_q)^{-1} \{ \tilde{\mu}_2^0(y, -y) \}^{-2} M_{2,1}(y, -y). \quad (77)$$

Використовуючи при обчисленні неекранований потенціал, маємо наближення Гелдарта-Тейлора

$$G_{id}(y) \equiv -(2\beta)^{-1} V_q^{-1} \{ \tilde{\mu}_2^0(y, -y) \}^{-2} \sum_{q_1, \nu_1} V_{q_1} \tilde{\mu}_4^0(y, -y, y_1, -y_1). \quad (78)$$

Згідно з формулами (30)-(31)

$$G_{id}(y) = -(2V_q)^{-1} \{ \tilde{\mu}_2^0(y, -y) \}^{-2} \text{Re} \sum_s \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} V(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \times$$

$$\times \{ n_{\mathbf{k}_1, s} - n_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}, s} \} \{ n_{\mathbf{k}_2, s} - n_{\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}, s} \} \times$$

$$\times \{ [i\nu + \tilde{E}_{\mathbf{k}_1} - \tilde{E}_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}}]^{-1} - [i\nu + \tilde{E}_{\mathbf{k}_2} - \tilde{E}_{\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}}]^{-1} \}^2. \quad (79)$$

У цьому наближенні поправка на локальне поле не залежить від константи взаємодії і є універсальною характеристикою базисної системи, хоча й зберігає залежність від параметра релятивізму. Розкладаючи $n_{\mathbf{k} + \mathbf{q}, s}$ в ряд Тейлора

$$n_{\mathbf{k} + \mathbf{q}, s} = n_{\mathbf{k}, s} + \frac{dn_{\mathbf{k}, s}}{d\tilde{E}_{\mathbf{k}}} (\tilde{E}_{\mathbf{k} + \mathbf{q}} - \tilde{E}_{\mathbf{k}}) + \dots, \quad (80)$$

а також використовуючи асимптотику $\tilde{\mu}_2^0(\mathbf{q}, -\mathbf{q}|0, 0)$, знаходимо таку довгохвильову асимптотику поправки на локальне поле:

$$G_{id}(q) = (2V_q)^{-1} \left\{ \frac{3N_e}{m_0 c^2 x^2} \right\}^{-2} (1+x^2)^{-1} \sum_{s; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} V(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \frac{dn_{k_1}}{d\tilde{E}_{k_1}} \cdot \frac{dn_{k_2}}{d\tilde{E}_{k_2}} \times \\ \times \left\{ 2 - \frac{(\mathbf{k}_2, \mathbf{q})}{(\mathbf{k}_1, \mathbf{q})} \left(\frac{(1+k_1^2)}{(1+k_2^2)} \right)^{1/2} - \frac{(\mathbf{k}_1, \mathbf{q})}{(\mathbf{k}_2, \mathbf{q})} \left(\frac{(1+k_2^2)}{(1+k_1^2)} \right)^{1/2} \right\}. \quad (81)$$

У випадку абсолютного нуля температури, коли $\frac{dn_k}{dE_k} \approx -\delta(\tilde{E}_k - \tilde{E}_F)$,

$$G_{id} = \left(\frac{q_*}{x} \right)^2 (8\pi)^{-2} \int \int \frac{d\Omega_{\mathbf{e}_1} d\Omega_{\mathbf{e}_2}}{(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)^2} \left\{ 2 - \frac{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e})}{(\mathbf{e}_2, \mathbf{e})} - \frac{(\mathbf{e}_2, \mathbf{e})}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e})} \right\} = \\ = \frac{1}{4} \left(\frac{q_*}{x} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{|\mathbf{q}|}{k_F} \right)^2. \quad (82)$$

У формулі (82) $\mathbf{e}_1 = \mathbf{k}_1/k_1$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{k}_2/k_2$, $\mathbf{e} = \mathbf{q}/q$, а інтегрування проводиться за кутами векторів \mathbf{e}_1 та \mathbf{e}_2 . У границі великих частот і малих хвильових векторів \mathbf{q}

$$G_{id}(y) \simeq -(2V_q)^{-1} (1+x^2) \{N_e m_0 c^2 q^2 x^2\}^{-2} k_F^4 \\ \times \sum_s \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} V(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \frac{dn_{k_1, s}}{d\tilde{E}_{k_1}} \cdot \frac{dn_{k_2, s}}{d\tilde{E}_{k_2}} (\tilde{E}_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}} - \tilde{E}_{\mathbf{k}_1}) \times \\ \times (\tilde{E}_{\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}} - \tilde{E}_{k_2}) \{(\tilde{E}_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}} - \tilde{E}_{k_1}) - (\tilde{E}_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}} - \tilde{E}_{k_2})\}^2. \quad (83)$$

У цій формулі використано звичайні розмірні змінні \mathbf{k} і \mathbf{q} , а також асимптотику $\tilde{\mu}_2^0(y, -y)$ при великих частотах і малих хвильових векторах

$$\tilde{\mu}_2^0(y, -y) = N_e (m_0 c^2)^{-1} \left(\frac{q_*}{\nu_*} \right)^2 (1+x)^{-1/2}. \quad (84)$$

У випадку абсолютного нуля температури у довгохвильовій границі

$$G_{id} = -\frac{q_*^2}{x^2} \cdot \frac{9}{64\pi^2} \int \int \frac{d\Omega_{\mathbf{e}_1} d\Omega_{\mathbf{e}_2}}{(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)^2} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e})(\mathbf{e}_2, \mathbf{e})(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e})^2 = \\ = \frac{3}{20} \left(\frac{q_*}{x} \right)^2 + \dots = \frac{3}{20} \left(\frac{q}{k_F} \right)^2 + \dots \quad (85)$$

Як бачимо, довгохвильова асимптотика поправки на локальне поле збігається з аналогічною асимптотикою нерелятивістської теорії. Щоб одержати короткохвильову асимптотику, слід провести розклади у ряди Тейлора за степенями $(\mathbf{k}_j, \mathbf{q})$. У границі великих значень хвильових векторів $G_{id}(y) \Rightarrow \frac{1}{3} + \dots$ незалежно від значення частоти, так само, як і в нерелятивістському випадку [16].

Для чисельного розрахунку $G_{id}(y)$ використаємо циліндричні системи координат для векторів $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ ($\mathbf{k}_j = (z_j, \rho_j, \varphi_j)$), у яких $(\mathbf{k}_j, \mathbf{q}) = z_j q$, $(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 +$

$(z_1 - z_2)^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$. У змінних (33), після інтегрування за кутами φ_1 і φ_2 маємо:

$$G_{id}(q, \nu|x) = \frac{q^2}{8x^2} J_2^{-2}(q, \nu|x) \int_{|z_1|, |z_2| \leq x} \int dz_1 dz_2 \int_0^{R_1} \rho_1 d\rho_1 \int_0^{R_2} \rho_2 d\rho_2 \times \\ \times \{D(\rho_1^2, \rho_2^2|z_1 + q/2; z_2 - q/2) F_{q^*, \nu^*}^+(\rho_1^2, \rho_2^2|z_1, z_2) - \\ - D(\rho_1^2, \rho_2^2|z_1 + q/2; z_2 + q/2) F_{q^*, \nu^*}^-(\rho_1^2, \rho_2^2|z_1, z_2)\}. \quad (86)$$

Тут використано такі позначення:

$$R_1 = (x^2 - z_1^2)^{1/2}; \quad R_2 = (x^2 - z_2^2)^{1/2}; \\ D(\rho_1^2, \rho_2^2|z_1, z_2) = \{(\rho_1^2 - \rho_2^2)^2 + (z_1 - z_2)^4 + 2(\rho_1^2 + \rho_2^2)(z_1 - z_2)^2\}^{-1/2}; \quad (87) \\ F_{q^*, \nu^*}^\pm(\rho_1^2, \rho_2^2|z_1, z_2) = \left\{ \frac{\eta(\rho_1; z_1; z_1 + q)}{\eta^2(\rho_1; z_1; z_1 + q) + \nu^2} \pm \frac{\eta(\rho_2; z_2; z_2 \mp q)}{\eta^2(\rho_2; z_2; z_2 \mp q) + \nu^2} \right\}^2 - \\ - \nu^2 \{[\eta^2(\rho_1; z_1; z_1 + q) + \nu^2]^{-1} - [\eta^2(\rho_2; z_2; z_2 \mp q) + \nu^2]^{-1}\}^2; \\ \eta(\rho_i; z_i; z_i \pm q) = \{1 + \rho_i^2 + (z_i \pm q)^2\}^{1/2} - \{1 + \rho_i^2 + z_i^2\}^{1/2}; \quad i = 1, 2.$$

Вираз (86) є точним. Застосувавши наближення, що вище були використані для розрахунку динамічних функцій $\tilde{\mu}_2^0(y, -y)$ і $\tilde{\mu}_3^0(y_1, y_2, -y_1, -y_2)$, можна виконати аналітичне інтегрування за змінними ρ_1 і ρ_2 , зводячи $G(q, \nu|x)$ до двократного інтеграла, яким є точний вираз для динамічної поправки на локальне поле в нерелятивістській теорії. Таке наближення відповідає заміні

$$\eta(\rho; z; z \pm q) \{\eta^2(\rho; z; z \pm q) + \nu^2\}^{-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{C(q|x)}{2q} (z \pm q/2) \{(z \pm q/2)^2 + u^2\}^{-1}, \quad (88)$$

де

$$C(q|x) = [1 + x^2 + q^2]^{1/2} + [1 + x^2]^{1/2}; \quad (89) \\ u = \nu_* (2q_*)^{-1} C(q|x).$$

Виконуючи інтегрування за змінними ρ_1 і ρ_2 , а також заміну змінних $z_i = t_i x$, одержуємо наближений вираз у вигляді двократного інтеграла:

$$G_{id}(q, \nu|x) \cong \frac{1}{32} I_2^{-2}(q, \nu|x) \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} dt_1 dt_2 \times \\ \times \{T\left(\left(t_1 - t_2 + \frac{q}{2}\right)^2; 1 - t_1^2; 1 - t_2^2\right) F_v(t_1 + q/2x; t - q/2x) - \\ - T\left((t_1 - t_2)^2; 1 - t_1^2; 1 - t_2^2\right) F_v(t_1 + q/2x; t_2 + q/2x)\}. \quad (90)$$

Тут введено такі позначення:

$$I_2(q, \nu|x) = \frac{2}{C(q|x)} J_2(q, \nu|x);$$

$$\begin{aligned}
 F_v(t_1; t_2) &= \left(\frac{t_1}{t_1^2 + v^2} - \frac{t_2}{t_2^2 + v^2} \right)^2 - v^2 \left(\frac{1}{t_1^2 + v^2} - \frac{1}{t_2^2 + v^2} \right)^2; \\
 T(s^2; a : b) &= \frac{1}{2} \{W(s^2; a; b) - s^2 - a - b\} + \\
 &+ a \ln \{(2s^2)^{-1}[W(s^2; a; b) + s^2 + b - a]\} + \\
 &+ b \ln \{(2s^2)^{-1}[W(s^2; a; b) + s^2 + a - b]\}; \\
 W(s^2; a; b) &= \{s^4 + 2s^2(a + b) + (a - b)^2\}^{1/2}.
 \end{aligned}
 \tag{91}$$

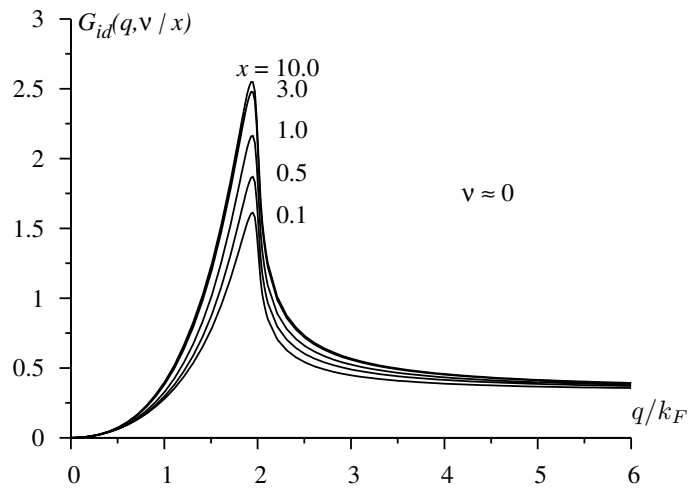


Рис. 4: Залежність поправки на локальне поле, розрахованої за формулами (90) і (91), від хвильового вектора поблизу статичної границі при заданих значеннях параметра релятивізму.

На рисунку 4 зображено залежність поправки на локальне поле від хвильового вектора поблизу статичної границі у змінних $\left(\frac{q}{k_F}; \frac{\nu}{2\varepsilon_F} \mid x\right)$ при фіксованих значеннях параметра релятивізму ($x = 0, 1; 0, 5; 1, 0; 3, 0; 5, 0; 10, 0$). Як видно з рисунка, поправка на локальне поле релятивістської моделі в цілому подібна на поправку нерелятивістської моделі і має ту ж саму асимптотику як у довгохвильовій, так і в короткохвильовій областях. Кількісна відмінність існує лише в області хвильових векторів поблизу максимуму, а максимум кривої зростає зі збільшенням x .

Рисунки 5а, 5б ілюструють залежність динамічної поправки на локальне поле від змінних $\left(\frac{q}{k_F}; u \mid x\right)$, де $u = \frac{\nu k_F}{2\varepsilon_F q}$; $x = 0, 5; 1, 0; 1, 5; \frac{\nu}{2\varepsilon_F} = 0, 2$.

5 Енергія основного стану моделі

З метою побудови рівняння стану перейдемо від термодинамічного потенціалу $\Omega(\mu)$ до вільної енергії

$$F = \Omega(\mu_*) + \mu_* N_e,
 \tag{92}$$

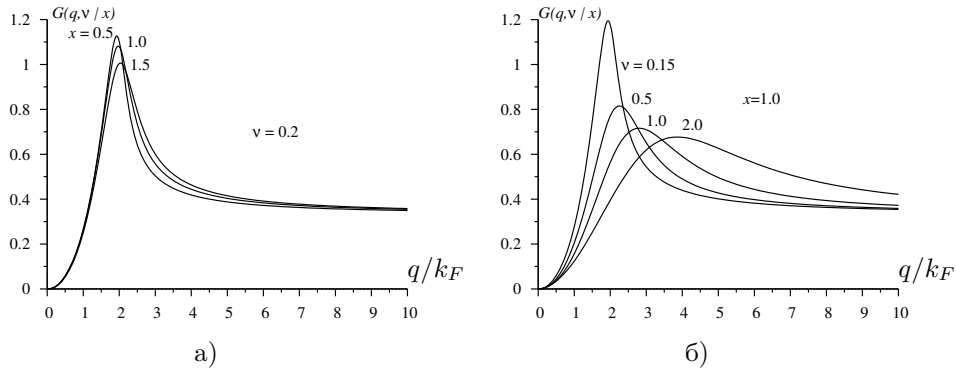


Рис. 5: Динамічна поправка на локальне поле у змінних $\left(\frac{q}{k_F}; u|x\right)$: а) безрозмірна частота $\frac{v}{2\varepsilon_F} = 0.2$; параметр релятивізму $x = 0.1; 1; 1.5$; б) параметр релятивізму $x = 1$; $\frac{v}{2\varepsilon_F} = 0.15; 0.5; 1; 2$.

де $\mu_* = \mu_0\left(\frac{N}{V}, T\right)$ – хімічний потенціал, що є коренем рівняння $N_e = -\frac{\partial}{\partial \mu} \Omega(\mu)$. Як відомо з теорії нерелятивістської електронної рідини, коректний перехід від термодинамічного опису до квантовомеханічного вимагає дотримання такої процедури: в ролі μ_* використовується хімічний потенціал ідеальної системи $\mu_0 = E_F$ (де $E_F = E(k_F)$ – енергія електрона на поверхні Фермі у базисній системі), а в $\Omega(\mu)$ слід враховувати лише так звані “нормальні” складові, тому що зсув хімпотенціалу $\mu_* - \mu_0$ компенсується внеском так званих “аномальних” складових, які виникають у кореляційних функціях вищого порядку $\tilde{\mu}_n^0(y_1, \dots, y_n)$ (при $n \geq 4$). У підході функцій Гріна цей факт вперше встановлено у роботі [24], а в базисному підході – в роботі [25] у рамках теорії збурень.

Згідно з цією процедурою енергія основного стану визначається співвідношенням

$$E = \Omega^n(\mu_0) + \mu_0 N_e, \quad (93)$$

де $\Omega^n(\mu_0)$ – “нормальна” складова термодинамічного потенціалу. Як легко показати прямим обчисленням,

$$\Omega_0(\mu_0) = -N_e \mu_0 + \sum_{\mathbf{k}, s} n_{\mathbf{k}, s}(\mu_0) E_{\mathbf{k}}, \quad (94)$$

тому енергію основного стану запишемо у такій формі:

$$E = E_0 + E_{HF} + E_c + N_n \omega + \frac{1}{2!} \sum_{j_1 \neq j_2} V_2(\mathbf{R}_{j_1} - \mathbf{R}_{j_2}) + \frac{1}{3!} \sum_{j_1 \neq j_2 \neq j_3} V_3(\mathbf{R}_{j_1}, \mathbf{R}_{j_2}, \mathbf{R}_{j_3}) + \dots + E_{\text{комп}}. \quad (95)$$

Згідно з формулою (94) при $T = 0K$

$$E_0 = 3N_e m_0 c^2 x^{-3} \int_0^x dt t^2 \{(1+t^2)^{1/2} - 1\} = \quad (96)$$

$$\begin{aligned} &= N_e m_0 c^2 \{ (1+x^2)^{1/2} - 1 - (8x^3)^{-1} \mathcal{F}(x) \}, \\ \mathcal{F}(x) &= x(2x^2 - 3)(1+x^2)^{1/2} + 3 \ln[x + (1+x^2)^{1/2}]. \end{aligned}$$

Різниця $\Omega_e(\mu_0) - \Omega_0(\mu_0)$ визначає внесок міжелектронних взаємодій (див. ф.(23)). Виділяючи з нього енергію Гартрі-Фока (внесок ідеальних кореляцій)

$$\begin{aligned} E_{HF} &= (2\beta V)^{-1} \sum_{\mathbf{q}, \nu} V_q \tilde{\mu}_2^0(y, -y) = \\ &= -(2V)^{-1} \sum_{\mathbf{q}; \mathbf{k}, s} V_q n_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2, s} n_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2, s} = -\frac{3}{4\pi} N_e \alpha_0 m_0 c^2 x, \end{aligned} \quad (97)$$

знаходимо кореляційну енергію моделі електронної рідини

$$\begin{aligned} E_c &= E_c^{RPA} + \Omega_1(\mu_0) + \Omega_2(\mu_0) + \dots, \\ E_c^{RPA} &= (2\beta)^{-1} \sum_{\mathbf{q}, \nu} \left\{ \ln \left[1 + \frac{V_q}{V} \tilde{\mu}_2^0(y, -y) \right] - \frac{V_q}{V} \tilde{\mu}_2^0(y, -y) \right\}. \end{aligned} \quad (98)$$

Доданок $\Omega_1(\mu_0)$ можна представити через поправку на локальне поле у наближенні $G_{id}(y)$

$$\Omega_1(\mu_0) \simeq (4\beta V^2)^{-1} \sum_{\mathbf{q}, \nu} V_q \tilde{V}(y) \{ \tilde{\mu}_2^0(y, -y) \}^2 G(y), \quad (99)$$

а $\Omega_2(\mu_0)$ визначається динамічною тричастинковою кореляційною функцією $\tilde{\mu}_3^0(y_1, y_2, -y_1 - y_2)$. Цих доданків достатньо для визначення кореляційної енергії слабо неідеальної моделі, яку ми розглядаємо.

Звернімо увагу, що у доданках формули (22), пропорційних до структурних факторів $S_{\mathbf{q}_1} \dots S_{\mathbf{q}_n}$, відсутні компоненти з нульовими значеннями хвильових векторів, як і в доданку \hat{V}_{nn} (див. ф. (5)). Розгляньмо внесок ефективних між'ядерних взаємодій у наближенні двочастинкових кореляцій

$$\begin{aligned} V_{nn} &- \frac{z^2}{2V} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} V_q^2 \mu_2(\mathbf{q}, -\mathbf{q}|0, 0) S_{\mathbf{q}} S_{-\mathbf{q}} = \\ &= -\frac{z^2}{2V} N_n \sum_{\mathbf{q} \neq 0} V_q^2 \mu_2(\mathbf{q}, -\mathbf{q}|0, 0) + \frac{z^2}{2V} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} V_q \left\{ 1 - \frac{V_q}{V} \mu_2(\mathbf{q}, -\mathbf{q}|0, 0) \right\} \times \\ &\times \{ S_{\mathbf{q}} S_{-\mathbf{q}} - N_n \}. \end{aligned} \quad (100)$$

Тут перший доданок має зміст енергії впровадження окремих (невзаємодіючих між собою) ядер в однорідну електронну рідину. Другий доданок перепишемо у такому вигляді:

$$\begin{aligned} &\frac{z^2}{2V} \sum_{\mathbf{q}} V_q \left\{ 1 - \frac{V_q}{V} \mu_2(\mathbf{q}, -\mathbf{q}|0, 0) \right\} \{ S_{\mathbf{q}} S_{-\mathbf{q}} - N_n \} - \\ &\frac{z^2}{2} \lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} \left\{ \frac{V_q}{V} \left[1 - \frac{V_q}{V} \mu_2(\mathbf{q}, -\mathbf{q}|0, 0) \right] (S_{\mathbf{q}} S_{-\mathbf{q}} - N_n) \right\} \equiv \end{aligned} \quad (101)$$

$$\begin{aligned} &\equiv \frac{1}{2} \sum_{j_1 \neq j_2} V_2(\mathbf{R}_{j_1} - \mathbf{R}_{j_2}) - \\ &- \frac{z^2}{2} N_n(N_n - 1) \lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} \left\{ \frac{V_q}{V} \left[1 - \frac{V_q}{V} \mu_2(\mathbf{q}, -\mathbf{q}|0, 0) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Перший доданок формули (101) є сумою екранованих потенціалів між'ядерних взаємодій, а другий, пов'язаний з умовою електронейтральності, можна назвати внеском в енергію комплексуючого заряду $E_{\text{КОМП}}$.

Виділяючи у добутках структурних факторів ядерної підсистеми $S_{\mathbf{q}_1} S_{-\mathbf{q}_2} \dots S_{\mathbf{q}_n}$ одностинкові, двочастинкові, тричастинкові і т.д. доданки, визначимо енергію впровадження ядер в однорідну електронну рідину

$$\omega = -\frac{z^2}{2!V^2} \sum_{\mathbf{q}} V_q^2 \mu_2(\mathbf{q}, -\mathbf{q}|0, 0) - \frac{z^3}{3!V^3} \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2} \mu_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|0, 0, 0) V_{\mathbf{q}_1} V_{\mathbf{q}_2} V_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2} + \dots, \quad (102)$$

потенціали істинно двочастинкових, тричастинкових і т.д. ефективних між'ядерних взаємодій

$$\begin{aligned} V_2(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) &= \frac{z^2}{V} \sum_{\mathbf{q}} \left\{ V_q \left[1 - \frac{V_q}{V} \mu_2(\mathbf{q}, -\mathbf{q}|0, 0) \right] - \right. \\ &- \left. \frac{V_q}{V^2} \sum_{\mathbf{q}_1} V_{\mathbf{q}_1} V_{\mathbf{q} + \mathbf{q}_1} \mu_3(\mathbf{q}, \mathbf{q}_1, -\mathbf{q} - \mathbf{q}_1|0, 0, 0) + \dots \right\} \exp[i(\mathbf{q}, \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)]; \\ V_3(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3) &= -\frac{z^3}{V^3} \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3} \delta_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3, 0} \mu_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3|0, 0, 0) \\ &\times V_{\mathbf{q}_1} V_{\mathbf{q}_2} V_{\mathbf{q}_3} \exp\{i[(\mathbf{q}_1, \mathbf{R}_1) + (\mathbf{q}_2, \mathbf{R}_2) + (\mathbf{q}_3, \mathbf{R}_3)]\}; \dots, \end{aligned} \quad (103)$$

а також енергію компенсуючого фону

$$\begin{aligned} E_{\text{КОМП}} &= -\frac{z^2}{2} N_n(N_n - 1) \lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} \left\{ \frac{V_q}{V} \left[1 - \frac{V_q}{V} \mu_2(\mathbf{q}, -\mathbf{q}|0, 0) \right] - \right. \\ &- \frac{V_q}{V^3} \sum_{\mathbf{q}_1} V_{\mathbf{q}_1} V_{\mathbf{q} + \mathbf{q}_1} \mu_3(\mathbf{q}, \mathbf{q}_1, -\mathbf{q} - \mathbf{q}_1|0, 0, 0) + \dots \left. \right\} + \\ &+ \frac{z^3}{3!} N_n(N_n - 1)(N_n - 2) \lim_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rightarrow 0} \{V^{-3} V_{\mathbf{q}_1} V_{\mathbf{q}_2} V_{-\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2} \mu_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|0, 0, 0)\} + \dots. \end{aligned} \quad (104)$$

У формулах (104)-(106) фігурують n -частинкові статичні кореляційні функції моделі електронної рідини

$$\begin{aligned} \mu_2(\mathbf{q}, -\mathbf{q}|0, 0) &= \tilde{\mu}_2^0(\mathbf{q}, -\mathbf{q}|0, 0) \varepsilon^{-1}(q); \\ \mu_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3|0, 0, 0) &= \tilde{\mu}_3^0(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3|0, 0, 0) \prod_{i=1}^3 \varepsilon^{-1}(q_i); \\ \varepsilon(q) &= 1 + \frac{V_q}{V} \tilde{\mu}_2^0(\mathbf{q}, -\mathbf{q}|0, 0) [1 - G(q)]. \end{aligned} \quad (105)$$

У цьому наближенні

$$E_{\text{КОМП}} = -\frac{N_e}{6} m_0 c^2 \frac{x^2}{(1+x^2)^{1/2}} \left\{ 1 - \frac{\alpha_0}{\pi} \frac{(1+x^2)^{1/2}}{x} - \frac{1}{V^2} \sum_{\mathbf{q}} V_q^2 \varepsilon^{-2}(q) \times \right. \\ \left. \times \mu_3^0(q, -q, 0|0, 0, 0) + \dots \right\} + \frac{N_e}{9 \cdot 3!} m_0 c^2 x^2 \frac{(1+2x^2)}{(1+x^2)^{3/2}} + \dots \quad (106)$$

Одержані вище загальні співвідношення дозволяють виконати фактичні розрахунки внесків до енергії моделі як функції параметра релятивізму. Переходячи у формулі (98) від суми за змінними ν, \mathbf{q} до інтегралів, вводячи безрозмірні змінні (33), а також переходячи від ν_* до незалежної змінної $v = \nu_*(2xq_*)^{-1} C(x, t_0|q_*)$, знаходимо такий наближений вираз для кореляційної енергії в наближенні хаотичних фаз:

$$E_c^{RPA} \simeq \frac{3}{2\pi} N_e m_0 c^2 x^{-2} \int_0^\infty dv \int_0^\infty dq_* q_*^3 C^{-1}(x, t_0|q_*) \times \\ \times \{ \ln[1 + f(q_*, v|x)] - f(q_*, v|x) \}, \quad (107) \\ f(q_*, v|x) = 4\alpha_0 x \pi^{-1} q_*^{-2} J_2(q_*, v|x).$$

У тому ж наближенні енергія впровадження визначається виразом

$$N_n \omega_2 = -N_e \frac{z}{\pi} \alpha_0 m_0 c^2 \int_0^\infty dq_* f_2(q_*|x) \{1 + f_2(q_*|x)\}^{-1}, \quad (108) \\ f_2(q_*|x) = 4\alpha_0 x \pi^{-1} q_*^{-2} J_2(q_*|x).$$

Для грубої оцінки інтеграла замінимо $J_2(q_*|x)$, яка є повільно спадною функцією q_* на інтервалі $(0 - 2x)$, її значенням при $q_* = 0$. Таким способом знаходимо, що

$$N_n \omega_2 \simeq -N_e z m_0 c^2 \alpha_0^{3/2} \pi^{-1/2} x^{1/2} (1+x^2)^{1/4}. \quad (109)$$

Для аналізу властивостей двочастинкового між'ядерного потенціалу розрахуємо його також у наближенні хаотичних фаз,

$$V_2^{RPA}(R) = \alpha_0 m_0 c^2 \frac{z^2}{R_*} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dq_*}{q_*} \sin(q_* R_*) \{1 + f_2(q_*|x)\}^{-1}, \quad (110)$$

де $R_* \equiv R m_0 c / \hbar$ – безрозмірна відстань. Оскільки у вироджених карликах характерні відстані між ядрами порядку $n \cdot 10^{-2} a_0$, то $\hbar / m_0 c = \alpha_0 a_0$ є природним масштабам для вимірювання відстаней між частинками. У тому ж наближенні, в якому одержано оцінку (109), знаходимо, що

$$V_2^{RPA}(R) \simeq \alpha_0 m_0 c^2 \frac{z^2}{R_*} \exp \{-R_*/R_0^*\}, \quad (111)$$

де $R_0^* = \frac{1}{2} \pi^{1/2} (\alpha_0 x)^{-1/2} (1+x^2)^{-1/4}$ – безрозмірний радіус екранування, що є досить великою величиною ($R_0^* \sim 10$ при $x = 1$). Проте розмірний радіус екранування $R_0 = R_0^* \frac{\hbar}{mc} = R_0^* \alpha_0 a_0$ має порядок $0,1 a_0$ (a_0 – радіус Бора). Ми розглянемо модель, у якій ядерна підсистема утворює просту кубічну ґратку з періодом d . Оскільки $V = N_n d^3$, то

$$d = \left(\frac{V}{N_n} \right)^{1/3} = \left(\frac{zV}{N_e} \right)^{1/3} = \frac{z^{1/3}}{x} (3\pi^2)^{1/3} \alpha_0 a_0 \quad (112)$$

і R_0^* є співмірним з періодом ґратки. У звичайних розмірних змінних

$$V_2^{RPA}(R) \equiv \frac{z^2 e^2}{R} \{1 - \exp[-Rk_F a]\}, \quad (113)$$

де

$$a = 2\alpha_0^{1/2} (\pi x)^{-1/2} (1+x^2)^{1/4}. \quad (114)$$

Формули (113), (114) відображають екранований потенціал двоядерної взаємодії на близьких та середніх відстанях. Як відомо з нерелятивістської теорії, екранування точкового заряду виродженим електронним газом зумовлює осциляції його потенціалу на великих відстанях від заряду. Такі осциляції спостерігаються на результатах чисельного розрахунку інтеграла (110), але амплітуда осциляцій дуже мала

$$V_2^{RPA}(R) \approx m_0 c^2 \alpha_0^2 \frac{z^2}{(2xR_*)^3} \cos(2xR_*). \quad (115)$$

Оскільки поправка на локальне поле моделі електронної рідини у границі слабкої неідеальності не залежить від параметра неідеальності r_s (або ж α_0), то звідси випливає, що наближення хаотичних фаз не є точним ні в якій області параметрів. Коректним наближенням є наближення локального поля. Для розрахунку кореляційної енергії у цьому наближенні скористаємось відомим зображенням енергії основного стану моделі електронної рідини

$$E = E_0 + (2\beta V)^{-1} \sum_{\mathbf{q} \neq 0; \nu} V_q \int_0^1 d\lambda \tilde{\mu}_2^\lambda(y, -y), \quad (116)$$

де E_0 – енергія моделі без взаємодії, $\tilde{\mu}_2^\lambda(x, -x)$ – двочастинкова кореляційна функція модельної системи з потенціалом міжчастинкової взаємодії $V_{\lambda(q) \equiv \lambda} V_q$. Виділяючи кінетичну енергію та внесок наближення Гартрі-Фока, запишемо кореляційну енергію у вигляді

$$\begin{aligned} E_c &= (2\beta V)^{-1} \sum_{\mathbf{q} \neq 0; \nu} V_q \int_0^1 d\lambda \{ \tilde{\mu}_2^\lambda(y, -y) - \tilde{\mu}_2^0(y, -y) \} = \\ &= -(2\beta V)^{-1} \sum_{\mathbf{q} \neq 0; \nu} V_q [\tilde{\mu}_2^0(y, -y)]^2 \int_0^1 d\lambda \lambda \frac{V_q}{V} (1 - G^\lambda(y)) \times \\ &\times \left\{ 1 + \lambda \frac{V_q}{V} \tilde{\mu}_2^0(y, -y) [1 - G^\lambda(y)] \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (117)$$

де $G^\lambda(y)$ – поправка на локальне поле моделі з потенціалом λV_q . У випадку дуже слабкої неідеальності замінимо $G^\lambda(y)$ на $G_{id}(y)$, одержуючи в результаті такий вираз для кореляційної енергії:

$$E_c = -N_e \frac{m_0 c^2}{2} \cdot \frac{3}{2\pi} x^2 \int_0^\infty dq q^3 \int_0^\infty du [1 - G_{id}(q, u|x)]^{-1} \times \\ \times \left\{ \frac{4\alpha_0}{\pi x q^2} [1 - G_{id}(q, u|x)] J_2(q, u|x) - \right. \\ \left. - \ln \left[1 + \frac{4\alpha_0}{\pi x q^2} (1 - G_{id}(q, u|x)) J_2(q, u|x) \right] \right\}. \quad (118)$$

У цій формулі використано “нерелятивістські” змінні $q \equiv |\mathbf{q}|/k_F$, $u = \nu(2\varepsilon_F)^{-1}q^{-1}$, а згідно з формулою (51)

$$J_2(q, u|x) = \frac{1}{4} \tilde{C}(x, t_0|q) \left\{ 1 - v \left[\arctg \frac{1+q/2}{v} + \arctg \frac{1-q/2}{v} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2q} \left(1 - \frac{q^2}{4} + v^2 \right) \ln \frac{v^2 + (1+q/2)^2}{v^2 + (1-q/2)^2} \right\}; \quad (119) \\ v = \frac{u}{2} \tilde{C}(x, t_0|q); \quad \tilde{C}(x, t_0|q) = (1+x^2)^{1/2} + (1+x^2[1+\rho^2+2qt_0])^{1/2}.$$

Враховуючи, що $m_0 c^2 x^2 = 2\varepsilon_F$ ($\varepsilon_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m_0$), а також беручи до уваги співвідношення

$$\frac{\alpha_0}{x} = \frac{r_s}{\eta}, \quad (120)$$

де r_s – параметр Вігнера-Бракнера, перейдемо до нерелятивістської границі $x \rightarrow 0$, у якій

$$\lim_{x \rightarrow 0} E_c = \frac{e^2}{2a_0} N_e \tilde{\varepsilon}(r_s) = \frac{1}{2} N_e m_0 c^2 \alpha_0^2 \tilde{\varepsilon}_c(r_s), \\ \tilde{\varepsilon}_c(r_s) = -\frac{3}{2\pi} \left(\frac{\eta}{r_s} \right)^2 \int_0^\infty dq q^3 \int_0^\infty du [1 - G_{id}(q, u)] \times \\ \times \left\{ \frac{4r_s}{\pi \eta q^2} I_{2,0}(q, u) [1 - G_{id}(q, u)] - \right. \\ \left. - \ln \left[1 + \frac{4r_s}{\pi \eta q^2} I_{2,0}(q, u) [1 - G_{id}(q, u)] \right] \right\}, \quad (121)$$

де $G_{id}(q, u) \equiv G_{id}(q, u|x)$ при $x = 0$.

На рисунку 6 зображено кореляційну енергію на один електрон як функцію параметра релятивізму, обчислену за формулою (121) для нерелятивістської моделі та формулою (118), яка відповідає релятивістській моделі. В області $x \leq 1$ різниця цих енергій є малою. В роботі [27] апроксимовано кореляційну енергію нерелятивістської моделі, яка була розрахована методом Монте-Карло у роботі [26]:

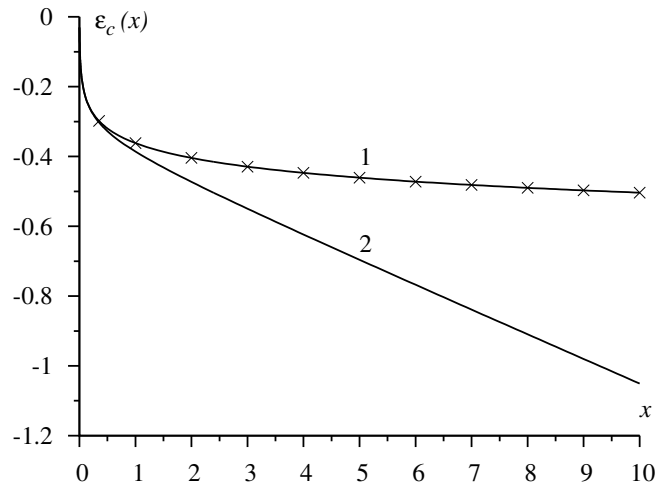


Рис. 6: Кореляційна енергія моделі електронної рідини (на один електрон, у Ry) як функція параметра релятивізму. Крива 1 відповідає розрахунку за ф.(121), хрестики – ф. (122). Крива 2 розрахована в наближенні локального поля (ф. (118)).

$$a = \left(\frac{\alpha_0 \eta}{x} \right)^{1/2}; \quad (122)$$

$$\varepsilon_c^{MC}(x) = -2b_0 \int_a^\infty dz \left(b_1 + \frac{1}{z} \right) [1 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3]^{-1};$$

$$b_0 = 0,0621814; \quad b_1 = 9,81379; \quad b_2 = 2,82214; \quad b_3 = 0,69699.$$

Функція $\varepsilon_c^{MC}(x)$ зображена хрестиками на рисунку 6. Мале відхилення функції $\tilde{\varepsilon}_c(r_s)$ від $\varepsilon_c^{MC}(r_s)$ при малих значеннях x свідчить про те, що наближення $G_{id}(q, u|x)$ цілком застосовне для розрахунку кореляційної енергії також і релятивістської моделі.

Енергія впровадження ядер в однорідну електронну рідину, розрахована у наближенні локального поля, представлена на рисунку 7.

У наближенні локального поля фур'є-зображення ефективного двоядерного потенціалу визначається співвідношенням

$$V(q) = z^2 V_q \left\{ 1 - \frac{V_q}{V} \mu_2(\mathbf{q}, -\mathbf{q}|0, 0) \right\} = z^2 \left\{ 1 - \frac{V_q}{V} \tilde{\mu}_2^0(\mathbf{q}, -\mathbf{q}|0, 0) G_{id}(q) \right\} V_q \times \\ \left\{ 1 + \frac{V_q}{V} \tilde{\mu}_2^0(\mathbf{q}, -\mathbf{q}|0, 0) [1 - G_{id}(q)] \right\}^{-1}. \quad (123)$$

Розрахований чисельним інтегруванням у цьому наближенні потенціал $V_2(R)$, а також потенціал у наближенні (113) зображено на рисунку 8.

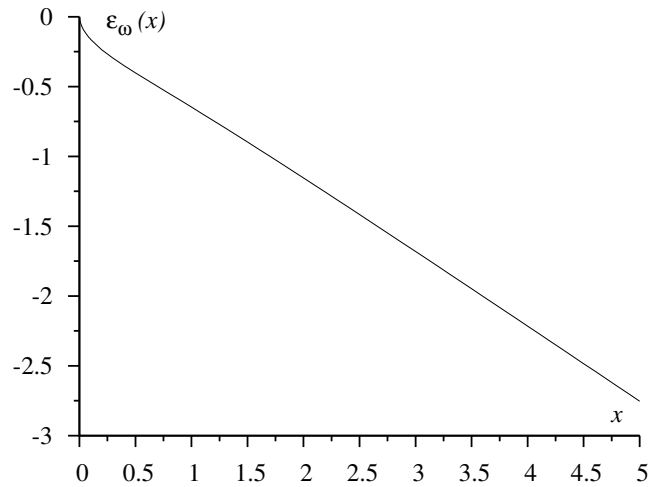


Рис. 7: Енергія поляризації електронної рідини, розрахована в наближенні локального поля, у відповідності до формули (129)

Сума енергій ефективних між'ядерних взаємодій у наближеннях (112) або (118) розраховувалась шляхом чисельного підсумовування за координаційними сферами

$$V_{nn}^{(2)} \equiv \frac{1}{2} \sum_{j_1 \neq j_2} V_2(\mathbf{R}_{j_1} - \mathbf{R}_{j_2}) = \frac{N_e}{2} \alpha_0 m_0 c^2 z \sum_{j \geq 1} \mathcal{N}_j (R_j^*)^{-1} \exp \left[-\frac{R_j^*}{R_0^*} \right], \quad (124)$$

де

$$R_j^* = d(n_1^2 + b_2^2 + n_3^2)^{1/2} \frac{m_0 c}{\hbar} = (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{1/2} \frac{z^{1/3}}{x} (3\pi^2)^{1/3} - \quad (125)$$

безрозмірний радіус j -ої сфери, \mathcal{N}_j – число вузлів на цій сфері; n_1, n_2, n_3 – цілі додатні і від'ємні числа. Використовувалось велике число координаційних сфер, щоб забезпечити насичення суми $V_{nn}^{(2)}$. Для покращення збіжності і зменшення похибок сума за координаційними сферами з дуже великими радіусами замінювалась інтегралом. Тоді граткова енергія $E_L = V_{nn}^{(2)} + E_{\text{КОМП}}$ зображається у такому вигляді

$$E_L = N_e m_0 c^2 \alpha_0 \left\{ -\frac{1}{6\alpha_0} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} [1 - (1+l_0) e^{-l_0}] + \frac{z}{2} x \sum_{j=1}^{j_0} \frac{\mathcal{N}_j}{R_j k_F} \exp[-R_j k_F a] \right\}, \quad (126)$$

де $l_0 \equiv R_{j_0} k_F a$. Залежність E_L від числа координаційних сфер зображена на рисунку 9. На рисунку 10 зображено залежність E_L від заряду ядра z . Як показують результати чисельних розрахунків, E_L можна представити таким наближеним виразом (при $x > 1$):

$$E_L \approx -N_e m_0 c^2 \alpha_0 \cdot 1,04(\sqrt{2} - 1) x z^{0,58942}. \quad (127)$$

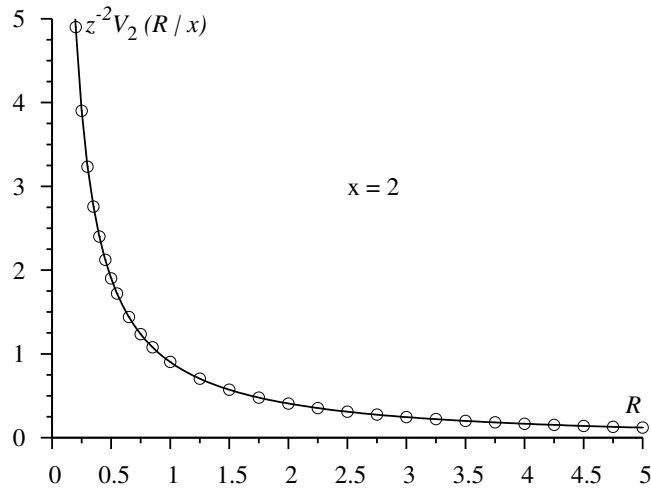


Рис. 8: Ефективний потенціал між'ядерної взаємодії у наближенні локального поля (Фур'є зображення функції (123) – кільця; суцільна крива – апроксимація (113)).

Зауважимо, що кожен з доданків фігурної дужки у формулі (126) є великою за модулем величиною, а їх сума має порядок одиниці. У наближенні Вігнера-Зейтца величиною E_L нехтують.

Як видно з рисунків, всі складові енергії, зумовлені взаємодією, є від'ємними, а найбільшою за модулем є енергія впровадження.

Як видно з наведених формул, всі складові енергії системи є від'ємними, причому E_{HF} і E_L пропорційні до α_0 , енергія впровадження пропорційна $\alpha_0^{3/2} z$, а кореляційна енергія дає найменший внесок, пропорційний до α_0^2 :

$$\begin{aligned} E_\omega &= N_e m_0 c^2 z \alpha_0^{3/2} \varepsilon_\omega(x), \\ E_c &= N_e m_0 c^2 \alpha_0^2 \varepsilon_c(x), \\ E_L &= N_e m_0 c^2 z^{0,589417} \alpha_0 \varepsilon_L(x|z). \end{aligned} \quad (128)$$

Безрозмірні функції $\varepsilon_\omega(x)$, $\varepsilon_c(x)$, $\varepsilon_L(x|z)$ апроксимовані такими виразами:

$$\begin{aligned} \varepsilon_c(x) &= -b_0 \int_0^x dt \frac{(b_1 a_0 + t^{1/2})}{t^{3/2} + b_1 a_0 t + b_2 a_0^2 t^{1/2} + b_3 a_0^3} \cdot \frac{1 + a_1 t + a_2 t^2}{1 + d_1 t}, \\ a_0 &= (\alpha_0 \eta)^{1/2}; \quad a_1 = 1,21954; \quad a_2 = 1,33205; \quad d_1 = 1,18934; \\ b_0 &= 0,0621814; \quad b_1 = 9,81379; \quad b_2 = 2,82214; \quad b_3 = 0,69699; \end{aligned} \quad (129)$$

$$\varepsilon_\omega(x) = - \int_0^x dt \frac{c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3}{1 + d_1 t + d_2 t^2 + d_3 t^3},$$

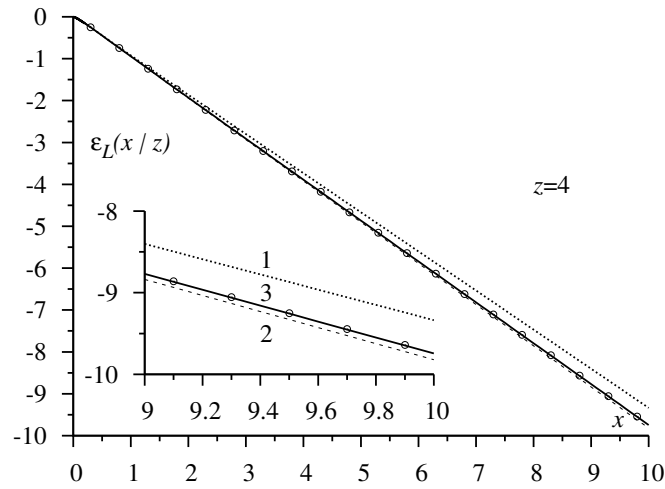


Рис. 9: Залежність ґраткової енергії від числа врахованих координатних сфер. Крива 1 – 50 сфер, крива 2 – 100 сфер, 3 – 300 сфер. Кружечки відповідають врахуванню 500 сфер.

$$c_0 = 4,06151; \quad c_1 = 32,6118; \quad c_2 = -43,6587; \quad c_3 = 104,13; \quad (130)$$

$$d_1 = 73,8252; \quad d_2 = -67,1028; \quad d_3 = 189,781;$$

$$\varepsilon_L(x|z) = - \int_0^x dt \cdot t \frac{a_0(z) + ta_1(z) + t^2 a_2(z)}{1 + ta_3(z) + t^2 a_4(z) + t^3 a_5(z)}; \quad (131)$$

$$a_i(z) = \frac{a_{i0} + za_{i1} + z^2 a_{i2}}{a_{i3} + za_{i4} + z^2 a_{i5}},$$

де коефіцієнти a_{ij} наведено у Таблиці 1.

Табл. 1: Коефіцієнти у формулі (131).

		a_{ij}					
i \ j	0	1	2	3	4	5	
0	-128.112	-138.098	-3.30915	0	3.74936	0.882489	
1	-633.899	297.304	-19.5138	1	-0.707632	1.01638	
2	-1691	216.967	-8.71667	0	1.48694	0.12998	
3	2.37539	1.74513	0.0417739	0	0.0212583	0.0056168	
4	913.016	-452.217	30.3618	1	-0.750844	0.702212	
5	5.68901	-0.704184	0.0277872	0	0.00203554	0.000234399	

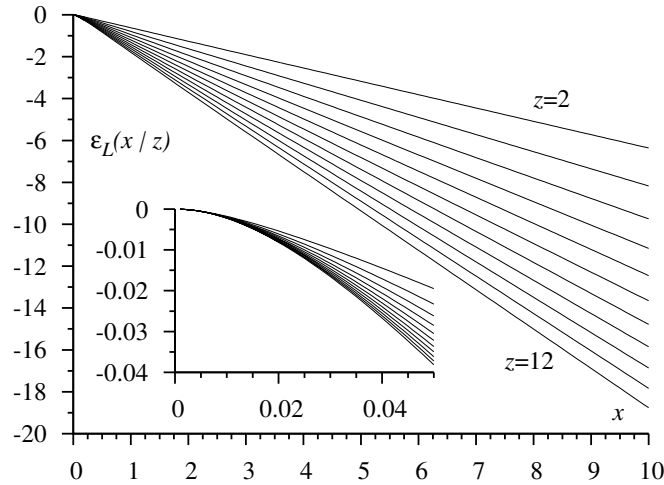


Рис. 10: Залежність ґраткової енергії $\varepsilon_L(x|z)$ від заряду ядра та параметра релятивізму.

6 Рівняння стану холодної “карликової” речовини

Одержана залежність складових енергії основного стану дозволяє розрахувати рівняння стану холодної електрон-ядерної моделі – залежність внутрішнього тиску від параметра релятивізму x і заряду ядра z :

$$P(x) = -\frac{dE(x)}{dV} = \frac{x^4}{N_e} \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^3 \frac{1}{9\pi^2} \cdot \frac{dE(x)}{dx}. \quad (132)$$

Згідно з формулами (97), (129-132),

$$P(x) = \frac{\pi m_0^4 c^5}{3\hbar^3} \left\{ \mathcal{F}(x) - 2\alpha_0 x^4 \left[\frac{1}{\pi} - \frac{4}{3} \left(z^{0,589417} \frac{d\varepsilon_L}{dx} + z \alpha_0^{1/2} \frac{d\varepsilon_\omega}{dx} + \alpha_0 \frac{d\varepsilon_c}{dx} \right) \right] \right\}, \quad (133)$$

де $\frac{d\varepsilon_L}{dx}$, $\frac{d\varepsilon_\omega}{dx}$, $\frac{d\varepsilon_c}{dx}$ визначаються підінтегральними функціями формул (129) - (131), взятими на верхній границі інтегрування (при $t = x$). Відносне зменшення тиску за рахунок взаємодії між частинками,

$$\{P_0(x) - P(x)\} P_0^{-1}(x) \quad (134)$$

зображено на рисунку 11. У випадку слабoreлятивістської моделі ($x \ll 1$) воно є значною величиною. Для області проміжних та великих значень параметра релятивізму ($x \geq 2$) відношення (134) є сталою величиною, яка не залежить від x , а лише від величини заряду ядер z і складає 1% при $z = 2$, 1,5% при $z = 6$, 2,5% при $z = 12$.

7 Висновки

1. У даній роботі у рамках єдиної моделі і єдиного підходу виконано послідовний квантовостатистичний опис холодної електрон-ядерної матерії в широкій області

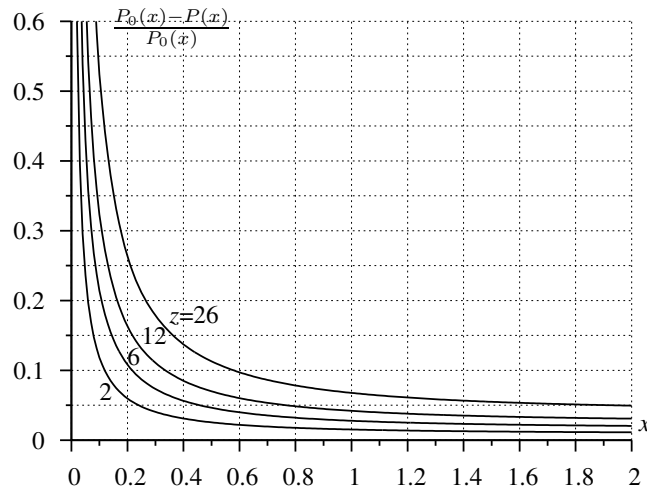


Рис. 11: Відношення внеску міжчастинкових взаємодій до тиску ідеального виродженого електронного газу як функція параметрів x і z .

Табл. 2: Відношення повного тиску моделі до тиску ідеального електронного газу як функція параметра релятивізму і заряду ядра.

x	z							
	2		6		12		26	
	[6]	*	[6]	*	[6]	*	[6]	*
0.05	0.7600	0.7636	0.5640	0.5708	0.3420	0.3466	-0.063	-0.0825
0.1	0.8802	0.8817	0.7819	0.7859	0.6705	0.6768	0.4671	0.47598
0.2	0.9404	0.9402	0.8906	0.8917	0.8341	0.8367	0.7308	0.73656
0.3	0.9604	0.9595	0.9266	0.9265	0.8882	0.8892	0.8178	0.82124
0.4	0.9705	0.9689	0.9445	0.9436	0.9150	0.9150	0.8607	0.86269
0.5	0.9765	0.9744	0.9551	0.9536	0.9308	0.9300	0.8860	0.88698
0.6	0.9805	0.9780	0.9620	0.9601	0.9410	0.9397	0.9024	0.90274
0.7	0.9833	0.9805	0.9669	0.9646	0.9482	0.9465	0.9138	0.91368
0.8	0.9853	0.9823	0.9705	0.9678	0.9535	0.9514	0.9221	0.92163
1.0	0.9881	0.9847	0.9752	0.9722	0.9605	0.9580	0.9332	0.93225
1.2	0.9898	0.9862	0.9782	0.9748	0.9684	0.9620	0.9401	0.93888
1.4	0.9909	0.9871	0.9801	0.9766	0.9677	0.9648	0.9447	0.94332
1.6	0.9917	0.9878	0.9814	0.9779	0.9697	0.9667	0.9479	0.94647
1.8	0.9922	0.9883	0.9824	0.9788	0.9711	0.9681	0.9511	0.94878
2.0	0.9926	0.9887	0.9831	0.9795	0.9721	0.9691	0.9519	0.95054
2.5	0.9932	0.9893	0.9842	0.9806	0.9738	0.9708	0.9546	0.95351
3.0	0.9935	0.9897	0.9848	0.9813	0.9748	0.9719	0.9562	0.95535
4.0	0.9938	0.9900	0.9853	0.9820	0.9757	0.9730	0.9577	0.95755
5.0	0.9939	0.9902	0.9856	0.9824	0.9761	0.9736	0.9585	0.95891
7.5	0.9939	0.9904	0.9858	0.9828	0.9765	0.9744	0.9592	0.96114
<i>inf</i>	0.9939	0.9905	0.9859	0.9830	0.9768	0.9749	0.9598	0.96285

густин – від металів у земних умовах до вироджених карликів великих мас. Розроблений авторами раніше базисний підхід у мікроскопічній теорії металів вперше узагальнено на випадок багатоелектронних систем з довільним значенням параметра релятивізму.

2. Одержане рівняння стану при $T = 0K$ близьке до результату роботи [6], у якій для врахування внесків різного типу до енергії використано результати інших авторів, одержані за допомогою різних наближених методів, що видно з Таблиці 2.

3. Як впливає з одержаних результатів, для опису маломасивних гарячих карликів, що мають параметр релятивізму $x \leq 0,5$, можна використовувати нерелятивістську теорію, що дозволило б значно підвищити точність розрахунку рівняння стану моделі.

Список використаної літератури

1. S. Chandrasekhar, *Astrophys. Journ.* **74**, 81 (1931).
2. S. Chandrasekhar, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **95**, 676 (1935).
3. М. Ваврух, С. Смеречинський, *Астроном. журн.* **89**, 407 (2012).
4. М. Ваврух, С. Смеречинський, *Астроном. журн.* **90**, 993 (2013).
5. М. Ваврух, Н. Тышко, С. Смеречинський, *Астроном. журн.* **88**, 549 (2011).
6. E.E. Salpeter, *Astrophys. Journ.* **134**, 669 (1961).
7. С.Л. Шапиро, С.А. Тьюкольски, *Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды. Т.1* (М.: Мир, 1985).
8. T. Hamada, E. Salpeter, *Eur. Astrophys. Journ.* **133**, 683 (1961).
9. М. Ваврух, Н. Тишко, *Фіз. збірн. НТШ* **7**, 499 (2008).
10. М. Ваврух, *ТМФ* **36**, 400 (1978).
11. М. Ваврух, *ТМФ* **50**, 438 (1982).
12. М. Ваврух, Т. Крохмальский, *ТМФ.* **51**, 130 (1982).
13. М. Ваврух, Т. Крохмальский, *Препринт АН УССР, ИТФ-86-146Р* (Киев, 1986).
14. M. Vavruk, T. Krokhmal'skii, *Phys. stat. sol. (b)* **168**, 519 (1991).
15. M. Vavruk, N. Vavruk, *Low Temp. Phys.* **22**, 767 (1996).
16. M. Gell-Mann, K. Brueckner, *Phys. Rev.* **106**, 364 (1957).
17. P. Lloyd, C. Sholl, *J. Phys. C.* **1**, 1620 (1969).
18. Е. Бровман, Ю. Каган, *ЖЭТФ* **63**, 1937 (1972).
19. Е. Бровман, С. Холас, *ЖЭТФ* **66**, 1877 (1974).
20. М. Ваврух, *Препринт АН УССР, ИТФ-79-143Р* (Киев, 1979).
21. М. Ваврух, Т. Крохмальский, *Препринт АН УССР, ИТФ-85-69Р* (Киев, 1985).
22. Н. Ваврух, *Препринт НАНУ, ІФКС-94-4У* (Львів, 1994).
23. М. Ваврух, В. Паславський, Н. Тишко, *Журн. фіз. досл.* **4**, 6 (2000).
24. W. Kohn, J. Luttinger, *Phys. Rev.* **118**, 41 (1960).
25. М. Ваврух, Т. Крохмальский, *Препринт АН УССР, ИТФ-85-119Р* (Киев, 1985).
26. D. Ceperley, B. Alder, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 566 (1980).
27. S. Vosko, L. Wilk, M. Nusair, *Can. J. Phys.* **58**, 1200 (1980).

Стаття надійшла до редакції 10.10.2013
прийнята до друку 12.11.2013

THE ELECTRON-NUCLEAR MODEL AT THE “DWARFS”
DENSITIES. REFERENCE SYSTEM APPROACH

M. Vavruk, N. Tyshko, S. Smerechynskyj

*Ivan Franko National University of Lviv,
astrophysic department,
Kyrylo and Methodiy Str., 8, 79005 Lviv, Ukraine
e-mail: mvavruk@gmail.com*

The mathematical tool of reference system approach is considered for macroscopically homogeneous electron-nuclear model at the densities typical for degenerate dwarfs. This approach was developed by the authors in the microscopic theory of metals earlier. As the reference system, the relativistic degenerate ideal electron gas is adopted. For the first time the n -particles correlation functions were calculated in static and dynamical cases. Similar functions were obtained for relativistic homogeneous electron liquid model as well as local field correction function. The energy of the ground state for electron-nuclear model was calculated within this approach as function of relativistic parameter. There was also obtained the equation of state of the model, which is necessary for description of the white dwarf inner structure.

Key words: degenerate dwarf, reference system approach, n -particles correlation functions, energy of the ground state, equation of state.

**ЭЛЕКТРОН-ЯДЕРНАЯ МОДЕЛЬ ПРИ “КАРЛИКОВЫХ”
ПЛОТНОСТЯХ. БАЗИСНЫЙ ПОДХОД****М. Ваврух, Н. Тышко, С. Смеречинский**

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко
кафедра астрофизики,
ул. Кирилла и Мефодия 8, 79005 Львов, Украина
e-mail: mvavruk@gmail.com*

Математический аппарат базисного подхода, разработанный авторами ранее в микроскопической теории металлов, обобщен на случай макроскопически однородной электрон-ядерной модели при плотностях, характерных для вырожденных карликов. Впервые рассчитаны статические и динамические n -частичные корреляционные функции базисной системы – релятивистского вырожденного идеального электронного газа, аналогичные функции релятивистской однородной электронной жидкости, а также ее функция коррекции локального поля. В рамках этого подхода рассчитана энергия основного состояния модели как функция параметра релятивизма. Получено уравнение состояния модели, необходимое для расчета внутренней структуры реальных вырожденных карликов.

Ключевые слова: вырожденные карлики, базисный подход, n -частичные корреляционные функции, энергия основного состояния, уравнение состояния при высоких плотностях.