ISSN 1024-588X. Вісник Львівського університету. Серія фізична. 2017. Випуск 53. С. 22-29
Visnyk of the Lviv University. Series Physics. 2017. Issue 53. P. 22-29

УДК 530.145
PACS 03.65.-w, 02.40.Gh

Особливості опису системи частинок у двовимірному квантованому просторі з некомутативністю координат канонічного типу

Х. П. Гнатенко

Львівський національний університет імені Івана Франка,
Кафедра теоретичної фізики
вул. Драгоманова, 12, 79005 Львів, Україна
e-mail: khrystyna.gnatenko@gmail.com

Розглядається двовимірний некомутативний простір канонічного типу. Досліджується система частинок у такому просторі у загальному випадку, коли координати різних частинок системи не комутують між собою. Вивчаються особливості некомутативної алгебри для координат центра мас та координат відносного руху, досліджується ефективний параметр некомутативності.

Ключові слова: квантований простір, некомутативний алгебра канонічного типу, система частинок

1 Вступ

Ідея побудови теорії квантованого простору на основі гіпотези про некомутативність координат на планківських масштабах привернула в останні роки велику увагу фізиків. Важливо зауважити, що ідея некомутативності випливає з теорії струн та квантової гравітації, які передбачають існування мінімальної довжини, кванта простору [1, 2].

Для некомутативної алгебри канонічного типу справедливими є такі комутаційні співвідношення для координат та імпульсів

$$[X_i, X_j] = i\hbar\theta_{ij}, \tag{1}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{2}$$

$$[P_i, P_j] = 0. \tag{3}$$

Зауважимо, що комутатор координат дорівнює величині $i\hbar\theta_{ij}$, відмінній від нуля. Тут θ_{ij} – елементи сталої антисиметричної матриці, параметри некомутативності. У двовимірному випадку можемо записати

$$[X, Y] = i\hbar\theta, \tag{4}$$

$$[X, P_x] = [Y, P_y] = i\hbar, \tag{5}$$

$$[P_x, P_y] = 0, \tag{6}$$

де θ - константа, параметр некомутативності.

Ідею про некомутативність координат запропонував В. Гайзенберг [3]. Вчений розказав про неї Пайєрлсу. Паулі, почувши ідею некомутативності від Пайєрлса, поділився нею з Оппенгеймером. Аспірант Опенгеймера Снайдер, отримавши завдання від наукового керівника, здійснив дослідження щодо математичного оформлення цієї ідеї, що привело до першої публікації з цієї теми [4].

Важливою проблемою у квантованому просторі з некомутативністю координат канонічного типу є проблема опису системи частинок. У статті [5] розглянуто квантову механіку систем багатьох частинок у некомутативному просторі. У роботі [6] вивчалася система двох заряджених частинок з врахуванням квантування простору. Рух системи частинок у гравітаційному полі у просторі з некомутативністю координат досліджувався у статтях [7,8]. Автори роботи [9] вивчали спектральні особливості двочастинoквої системи з осциляторною взаємодією на некомутативній площині. Також система двох частинок вивчалася у просторі з некомутативністю куоординат та некомутативністю імпульсів [10]. У роботі [11] розглянуто чотиривимірний некомутативний фазовий простір та досліджено властивості кінетичної енергії системи частинок. У некомутативному просторі-часі система багатьох частинок розглядалася у статті [12]. Автори дослідили N взаємодіючих гармонічних осциляторів, а також систему N частинок у гравітаційному полі. У роботах [13, 14] запропоновано теорію опису систем частинок у деформованому просторі з мінімальною довжиною.

У наших попередніх статтях [7, 8, 11] розглянуто систему частинок у некомутативному просторі та досліджено випадок, коли координати різних частинок задовольняють звичні комутаційні співвідношення (комутують).

У даній статті ми узагальнюємо результати наших попередніх робіт на випадок, коли координати різних частинок задовольняють співвідношення некомутативної алгебри. Досліджуються комутаційні співвідношення для координат центра мас та координат відносного руху системи частинок у двовимірному некомутативному просторі.

2 Некомутативна алгебра координат центра мас та відносного руху двочастинкової системи

У некомутативному просторі канонічного типу дослідімо двочастинкову систему з гамільтоніаном

$$H = \frac{(\mathbf{P}^{(1)})^2}{2m_1} + \frac{(\mathbf{P}^{(2)})^2}{2m_2} + U_{int}(|\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(2)}|) + U_{ext}, \tag{7}$$

де $U_{int}(|\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(2)}|)$ потенціальна енергія взаємодії частинок, U_{ext} – зовнішнє поле, m_1, m_2 – маси частинок. У загальному випадку маємо такі комутаційні співвідношення для координат та імпульсів частинок системи

$$[X^{(a)}, Y^{(b)}] = i\hbar\theta^{(ab)}, \tag{8}$$

$$[X^{(a)}, P_x^{(b)}] = [Y^{(a)}, P_y^{(b)}] = i\hbar\delta^{ab}, \tag{9}$$

$$[P_x^{(a)}, P_y^{(b)}] = 0, \tag{10}$$

тут індекси a, b позначають частинки, $a = (1,2)$, $b = (1,2)$. У класичній границі можемо записати такі дужки Пуассона

$$\{X^{(a)}, Y^{(b)}\} = \theta^{(ab)}, \tag{11}$$
$$\{X^{(a)}, P_x^{(b)}\} = \{Y^{(a)}, P_y^{(b)}\} = \delta^{ab}, \tag{12}$$
$$\{P_x^{(a)}, P_y^{(b)}\} = 0. \tag{13}$$

Введемо координати та імпульси центра мас та відносного руху

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}^{(1)} + \mathbf{P}^{(2)}, \tag{14}$$
$$\tilde{\mathbf{X}} = \frac{m_1\mathbf{X}^{(1)} + m_2\mathbf{X}^{(2)}}{m_1 + m_2}, \tag{15}$$
$$\Delta\mathbf{P} = \mu_1\mathbf{P}^{(2)} - \mu_2\mathbf{P}^{(1)}, \tag{16}$$
$$\Delta\mathbf{X} = \mathbf{X}^{(2)} - \mathbf{X}^{(1)}, \tag{17}$$

та дослідімо некомутативну алгебру для цих координат. Врахувавши співвідношення (8), для координат центра мас отримаємо:

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = i\hbar\sum_a\sum_b \mu_a\mu_b\theta^{(ab)}, \tag{18}$$

Звернімо увагу, що координати центра мас системи задовольняють некомутативну алгебру з параметром некомутативності

$$\tilde{\theta} = \sum_{a=1}^{2}\sum_{b=1}^{2} \mu_a\mu_b\theta^{(ab)}, \tag{19}$$

тут $\mu_a = m_a/M$, $M = \sum_{a=1}^{2} m_a$. Параметр $\tilde{\theta}$ назвемо ефективним параметром некомутативності. Звернімо увагу, що $\tilde{\theta}$ залежить від композиції системи. У частковому випадку, коли система складається з частинок з однаковими масами $m_a = m_b = m$, $M = 2m$, маємо:

$$\tilde{\theta} = \sum_a\sum_b \frac{\theta^{(ab)}}{4}. \tag{20}$$

Зауважимо, що у випадку частинок з однаковими масами, параметри некомутативності мають вигляд $\theta^{(ab)} = \theta$ отримаємо:

$$\tilde{\theta} = \theta. \tag{21}$$

Отже, центр мас системи "відчуває"некомутативність координат з тим самим параметром, що і частинки системи.

Дослідімо комутаційні співвідношення для координат відносного руху. Маємо:

$$[\Delta X, \Delta Y] = i\hbar(\theta^{(11)} - \theta^{(12)} - \theta^{(21)} + \theta^{(22)}), \tag{22}$$

Бачимо, що у загальному випадку, коли система складається з різних частинок, координати відносного руху не комутують. Оператори відносних координат задовольняють співвідношення некомутативної алгебри з параметром некомутативності $\theta^{(11)}-\theta^{(12)}-\theta^{(21)}+\theta^{(22)}$. Зауважимо, що у випадку, коли $\theta^{(ab)}=\theta$, $a=(1,2)$, $b=(1,2)$ (система складається з одинакових частинок), маємо:

$$[\Delta X, \Delta Y] = 0. \tag{23}$$

Координати відносного руху задовольняють звичні комутаційні співвідношення.

Варто також відзначити, що для координат центра мас та координат відносного руху справедливими є рівності

$$[\Delta X, \tilde{Y}] = i\hbar(\mu_1\theta^{(21)} + \mu_2\theta^{(22)} - \mu_1\theta^{(11)} - \mu_2\theta^{(12)}), \tag{24}$$
$$[\tilde{X}, \Delta Y] = i\hbar(\mu_1\theta^{(12)} + \mu_2\theta^{(22)} - \mu_1\theta^{(11)} - \mu_2\theta^{(21)}), \tag{25}$$

тут $\mu = m_1m_2/(m_1+m_2)$. Отже, рух центра мас залежить від відносного руху в системі. Задача двох тіл не може бути зведена до задачі руху центра мас та відносного руху

$$H = \frac{(\tilde{\mathbf{P}})^2}{2M} + U_{ext}(\tilde{\mathbf{X}}) + \frac{(\Delta\mathbf{P})^2}{2\mu} + U_{int}(|\Delta\mathbf{X}|), \tag{26}$$

$$\left[\frac{(\tilde{\mathbf{P}})^2}{2M} + U_{ext}(\tilde{\mathbf{X}}), \frac{(\Delta\mathbf{P})^2}{2\mu} + U_{int}(|\Delta\mathbf{X}|)\right] \neq 0. \tag{27}$$

Звернімо увагу, що у випадку, коли система складається з одинакових частинок маємо:

$$[\Delta X, \tilde{Y}] = [\tilde{X}, \Delta Y] = 0. \tag{28}$$

Рух центра мас та відносний рух є незалежними у некомутативному просторі канонічного типу.

3 Система N частинок. Ефективний параметр некомутативності

Дослідімо більш загальний випадок, коли система складається з N частинок масами m_i, $i=(1...N)$. Розгляньмо оператори імпульсів та координат центра мас та відносного руху у некомутативному просторі

$$\tilde{\mathbf{P}} = \sum_a \mathbf{P}^{(a)}, \tag{29}$$

$$\tilde{\mathbf{X}} = \sum_a \mu_a\mathbf{X}^{(a)}, \tag{30}$$

$$\Delta\mathbf{P}^a = \mathbf{P}^{(a)} - \mu_a\tilde{\mathbf{P}}, \tag{31}$$

$$\Delta\mathbf{X}^{(a)} = \mathbf{X}^{(a)} - \tilde{\mathbf{X}}, \tag{32}$$

тут $\mu_a = m_a/M$, $M = \sum_a m_a$.

Знайдемо комутаційні співвідношення для координат центра мас та координат відносного руху

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \tilde{\theta}, \tag{33}$$

$$\tilde{\theta} = \sum_{a=1}^{N}\sum_{b=1}^{N} \mu_a \mu_b \theta^{(ab)}, \tag{34}$$

$$[\Delta X^{(a)}, \Delta Y^{(b)}] = \theta^{(ab)} - \sum_{c=1}^{N} \mu_c \theta^{(cb)} - \sum_{c=1}^{N} \mu_c \theta^{(ac)} + \sum_{c=1}^{N}\sum_{d=1}^{N} \mu_c \mu_d \theta^{(cd)}, \tag{35}$$

$$\tag{36}$$

Проаналізуймо залежність ефективного параметра некомутативності від кількості частинок у системі. Розгляньмо випадок, коли система складається з N однакових частинок з масами m, $\theta^{(ab)} = \theta$, $a = (1, 2...N)$. Тоді маємо

$$\tilde{\theta} = \theta, \tag{37}$$

$$[\Delta X^{(a)}, \Delta Y^{(b)}] = 0. \tag{38}$$

У класичній границі отримаємо, що дужки Пуассона для координат центра мас системи частинок (макроскопічного тіла) мають такий вигляд

$$\{\tilde{X}, \tilde{Y}\} = \theta. \tag{39}$$

Отже, для координат центра мас системи виконуються ті ж співвідношення, що і для координат частинок, які утворюють систему. Таке твердження розглядалося авторами робіт [15–17]. У статтях [15–17] досліджено вплив некомутативності координат на зсув перигею Меркурію. Порівнявши теоретичні результати із даними спостережень авторами оцінено верхню межу для параметрів некомутативності. У цьому контексті варто зауважити також роботу [18], в якій на основі припущення про те, що координати центра мас задовольняють деформовану алгебру з параметрами деформації, що дорівнюють параметрам деформації елементарних частинок, отримано оцінку величини кванта простору, яка на 33 порядки менша ніж довжина Планка.

Крім цього із рівності (37) випливає твердження про те, що макроскопічні тіла у гравітаціному полі є більш чутливими до впливу квантованості простору на планківських масштабах у порівнянні з елементарними частинками. А саме, для макроскопічного тіла (системи N частинок) у однорідному гравітаціному полі

$$H = \frac{\tilde{\mathbf{P}}^2}{2M} - Mg\tilde{X} \tag{40}$$

рівняння руху у некомутативному просторі канонічного типу мають вигляд

$$\dot{\tilde{X}} = \frac{\tilde{P}_x}{M}, \tag{41}$$

$$\dot{\tilde{Y}} = \frac{\tilde{P}_y}{M} + Mg\theta \tag{42}$$

У випадку частинки з масою m у однорідному гравітаційному полі

$$H = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} - mg\tilde{X} \tag{43}$$

маємо

$$\dot{X} = \frac{P_x}{m}, \tag{44}$$

$$\dot{Y} = \frac{P_y}{m} + mg\theta \tag{45}$$

Врахувавши те, що для макроскопічних тіл $M \gg m$ маємо, що поправки, зумовлені квантованістю простору, для макроскопічного тіла є набагато більшими ніж для частинки $Mg\theta \gg mg\theta$. Такий висновок не має фізичного змісту, оскільки в цьому випадку ефекти квантованості простору були б добре спостережуваними у фізиці макроскопічних систем.

Висновки

У статті розглянуто двовимірний квантований простір, реалізований за допомогою некомутативності координат канонічного типу (4)-(6). Досліджено особливості опису системи частинок у такому просторі.

Ми розглянули загальний випадок, коли координати різних частинок системи не комутують. У цьому випадку знайдено ефективний параметр некомутативності для координат центра мас. Проаналізовано комутаціні співвідношення для координат відносного руху, для координат центра мас та координат відносного руху. Ми показали, що у випадку, коли координати різних частинок не комутують, не відбувається редукція ефективного параметра некомутативності, який описує рух центра мас системи, із збільшенням кількості частинок у ній. Для системи N однакових частинок ефективний параметр некомутативності дорівнює параметрам некомутативності частинок складових системи. Таке твердження привело до занижених оцінок величини кванта простору [15–18]. Крім цього ми показали, що таке твердження приводить до абсурдного висновку про те, що вплив квантованості простору на планківських масштабах на рух системи частинок є набагато більшим ніж на рух одної частинки.

Подяки

Автор висловлює велику подяку професору В. М. Ткачуку, за цінні поради та обговорення результатів. Публікація містить результати досліджень, проведених за підтримки Міністерства освіти та науки України в рамках держбюджетної теми ФФ-63Нр (No. 0117U007190).

Список використаної літератури

1. *N. Seiberg, E. Witten*, J. High Energy Phys. **9909**, 032 (1999).

2. *S. Doplicher, K. Fredenhagen, J.E. Roberts*, Phys. Lett. B **331**, 39 (1994).
3. *R. Jackiw*, Ann. Henri Poincarre **4**, 913 (2003).
4. *H. Snyder*, Phys. Rev. **71**, 38 (1947).
5. *Pei-Ming Ho, Hsien-Chung Kao,* Phys. Rev. Lett. **88**, 151602 (2002).
6. *S. Bellucci, A. Yeranyan,* Phys. Lett. B **609**, 418 (2005).
7. *Kh.P. Gnatenko,* Phys. Lett. A **377**, 3061 (2013).
8. *Kh. P. Gnatenko,* J. Phys. Stud. **17**, 4001 (2013).
9. *I. Jabbari, A. Jahan, Z Riazi,* Turk. J. Phys. **33**, 149 (2009).
10. *A.E.F. Djemai, H. Smail,* Commun. Theor. Phys. **41**, 837 (2004).
11. *Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk,* Phys. Lett. A **381**, 2463 (2017).
12. *M. Daszkiewicz, C.J. Walczyk,* Mod. Phys. Lett. A **26**, 819 (2011).
13. *C. Quesne, V.M. Tkachuk,* Phys. Rev. A **81**, 012106 (2010).
14. *V.M. Tkachuk,* Phys. Rev. A **86**, 062112 (2012).
15. *J.M. Romero, J.D. Vergara,* Mod. Phys. Lett. A **18**, 1673 (2003).
16. *B. Mirza, M. Dehghani,* Commun. Theor. Phys. **42**, 183 (2004).
17. *A.E.F. Djemai,* Int. J. Theor. Phys. **43**, 299 (2004).
18. *S. Benczik, L. N. Chang, D. Minic, et al.,* Phys. Rev. D **66**, 026003 (2002).

Стаття надійшла до редакції 22.03.2017
прийнята до друку 15.06.2017

Features of description of composite system in two-dimensional quantized space with noncommutativity of coordinates of canonical type

Kh. P. Gnatenko

Ivan Franko National University of Lviv, Department for Theoretical Physics
12 Drahomanov St., Lviv, 79005, Ukraine
e-mail: khrystyna.gnatenko@gmail.com

Two-dimensional noncommutative space of canonical type is considered. System of particles is studied in the space in the general case of noncommutativity of coordinates of different particles. Features of noncommutative algebra for coordinates of the center-of-mass and relative coordinates are examined and effective parameter of noncommutativity is studied.

Key words: quantized space, noncommutative algebra of canonical type, system of particles

Особенности описания системы частиц в двумерном квантованном пространстве с некомутативнистю координат канонического типа

Х. П. Гнатенко

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
Кафедра теоретической физики
ул. Драгоманова 12, 79005 Львов, Украина
e-mail: khrystyna.gnatenko@gmail.com

Рассматривается двумерное некоммутативное пространство канонического типа. Исследуется система частиц в таком пространстве в общем случае, когда координаты различных частиц системы не коммутируют между собой. Изучаются особенности некоммутативной алгебры для координат центра масс и координат относительного движения, исследуется эффективный параметр некоммутативности.

Ключевые слова: квантованное пространство, некоммутативная алгебра канонического типа, система частиц