

Вплив ангармонічності струм-фазової залежності на динаміку флюксонів у довгому джозефсонівському контакті

А. Шутовський, М. Скіпальський,
В. Наход, О. Замуруєва

*Волинський національний університет імені Лесі Українки,
просп. Волі, 13, 43025 м. Луцьк, Україна
e-mail: zamurujeva.oksana@vnu.edu.ua*

Теоретично досліджено вплив ангармонічності в струм-фазовій залежності на динаміку флюксонів у тунельних джозефсонівських контактах для області температур, близьких до критичної. В основі дослідження використовується модифіковане рівняння синус-Гордона для опису просторово-часової еволюції різниці фаз в довгому джозефсонівському контакті. Знайдено аналітичний розв'язок модифікованого рівняння синус-Гордона для випадку малого значення параметра, що характеризує міру відмінності від синусоїдної залежності струму від різниці фаз, в загальному випадку отримані чисельні результати. Показано, що при значному відхиленні струм-фазової залежності від синусоїдної, край флюксона є виразнішими, а різниця фаз є лінійною функцією координати у серцевині флюксона, при цьому залежність магнітного поля від просторової координати близька до прямокутної форми. Зі зменшенням міри відмінності струм-фазової залежності від синусоїдної межі флюксона є досить розмитими. При цьому максимальне значення магнітного поля, яке проникає в серцевину флюксона, збільшується.

Ключові слова: рівняння синус-Гордона, струм-фазова залежність, флюксон, джозефсонівський контакт.

1. Вступ

У 1962 році Джозефсон Брайан теоретично передбачив, що через контакт двох надпровідників, розділених плівкою діелектрика, може протікати бездисипативний струму [1]. Числове значення цього струму залежить від різниці фаз $\varphi = \theta_L - \theta_R$ макроскопічних хвильових функцій лівого та правого надпровідників (також відомої як фаза Джозефсона). У більшості наукових робіт, які стосуються ефекту Джозефсона, цю залежність вважають синусоїдною [2, 3]. За відсутності зовнішнього магнітного поля та значеннях струму менших критичного струму контакту різниця фаз φ є сталою вздовж контакту. Якщо джозефсонівський контакт поміщають

у зовнішнє магнітне поле, то різниця фаз φ залежить від просторових координат і ця залежність описується рівнянням Фарела-Пренджа або стаціонарним рівнянням синус-Гордона [4].

Якщо величина струму в колі I_B з джозефсонівським контактом є більшою за критичний струму контакту I_C , то на контакті з'являється спад напруги і різниця фаз φ , крім просторових координат, також залежатиме і від часу [4], а її часово-просторова еволюція описуватиметься нестационарним рівнянням синус-Гордона [5,6]. Розв'язки нестационарного рівняння синус-Гордона є солітонного типу і описують проникнення зовнішнього магнітного поля через контакт у вигляді окремих вихорів (флюксонів), що несуть квант магнітного потоку. Завдяки стабільності флюксонів, вони мають хороші перспективи практичного використання [7–9]. Дослідженню динаміки флюксонів у джозефсонівських контактах присвячені численні роботи, але в переважній більшості цих робіт залежність надпровідного струму I_S від різниці фаз φ вважається синусоїдною [5,6].

Однак, залежно від параметрів контакту та умов протікання струму, струм-фазова залежність може бути відмінною від синусоїдної [10,11]. Один із чинників, що приводить до ангармонічності у струм-фазовій залежності є врахування ефектів розпаровування. При малих значеннях струму розпаровування струмом можна не враховувати, покладаючи параметр впорядкування в глибині надпровідника рівним його просторово однорідному значенню і, відповідно, відкидати доданок з надпливною швидкістю в рівнянні Гінзбурга-Ландау [12] для області температур, близьких до критичної. Однак, із збільшенням коефіцієнта проходження електронів значення критичного струму контакту може бути близьке до струму розпаровування в однорідному надпровіднику. У цьому випадку для одержання коректного результату для струм-фазової залежності розпаровування струмом необхідно враховувати. Врахування ефектів розпаровування приводить до суттєвої ангармонічності в залежності струму від різниці фаз не тільки при низьких температурах, а й при температурах, близьких до критичної [11,13–16].

Метою даної роботи є дослідження впливу ангармонічності струм-фазової залежності на динаміку флюксонів у тунельних надпровідних контактах, що приводить до відповідної модифікації нестационарного рівняння синус-Гордона з нетривіальною струм-фазовою залежністю, яку отримано в роботі [15]. Також вважатимемо, що джозефсонівський контакт є гранично чистим.

2. Модель та основні рівняння

Розглядатимемо тунельний надпровідний контакт, вважаючи, що надпровідник займає область $|z| > 0$, а плівка діелектрика розміщена в площині $z = 0$. Оскільки просторова неоднорідність порушена лише в напрямку осі Oz , то досліджувані величини залежатимуть лише від z -координати. Вважатимемо, що область досліджуваних температур є близькою до критичної, а коефіцієнт проходження електронів крізь плівку діелектрика може набувати значень від нуля до близьких до одиниці. За таких обставин для виконання коректного опису струмових станів в контакті необхідно врахувати ефекти розпаровування, що приводить до залежності струму від різниці фаз відмінної від синусоїдної. Відповідне дослідження виконувалось в робо-

тах [14, 15], а одержана для струму формула, у спрощеному вигляді та за відсутності домішок, має вигляд

$$I(\varphi) = I_C \sqrt{1 - \varepsilon^2} \frac{\sin \varphi}{1 - \varepsilon \cos \varphi}, \quad (1)$$

де $I_C = \frac{\varepsilon}{(1 + \varepsilon) \sqrt{2}}$ – критичний струм контакту.

Параметр

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\tau^2 q_\infty^2}}, \quad (2)$$

для якого виконується нерівність $0 < \varepsilon < 1$, є мірою відмінності в залежності (1) від синусоїдної. Значення ε залежить від температури через параметр

$$\tau^2 = \left\{ \frac{\xi_0}{\xi(T)} \right\}^2 = \frac{12}{7\zeta(3)} \left(1 - \frac{T}{T_c} \right), \quad (3)$$

де T_c – критична температура. В подальших розрахунках покладемо $T = 0.98 T_c$, тоді $\tau^2 \cong 0.028522$. Залежність ε від коефіцієнта прозорості діелектричної плівки визначається через параметр

$$q_\infty = \frac{\pi^4}{28\zeta(3)} \int_0^1 y^3 \mathcal{R}(y) dy + \frac{21\zeta(3)}{\pi^2} \frac{\left\{ \int_0^1 y^2 \mathcal{R}(y) dy \right\}^2}{\int_0^1 y \mathcal{D}(y) dy}. \quad (4)$$

Тут ми маємо дві функції $\mathcal{D}^{-1}(y) = 1 + \left(\frac{mU_0}{y^2 p_0} \right)^2$ та $\mathcal{R}(y) = 1 - \mathcal{D}(y)$, які називаються коефіцієнтами проходження і відбивання відповідно. Плівка діелектрика моделюється δ -функційним бар'єром: $U(z) = U_0 \delta(z)$. Використано також позначення $y = \cos \theta$, де θ – кут падіння електронів на площину бар'єру. Інтеграли у формулі (4) легко обчислюються, в результаті маємо

$$q_\infty = \frac{\pi^4}{56\zeta(3)} \left(\frac{1}{D} - 1 \right) \left[1 + \left\{ \frac{1}{D} - 1 \right\} \ln(1 - D) \right] + \frac{42\zeta(3)}{\pi^2} \left(\frac{1}{D} - 1 \right)^3 \frac{\left\{ \sqrt{\frac{D}{1-D}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{D}{1-D}} \right\}^2}{1 + \left\{ \frac{1}{D} - 1 \right\} \ln(1 - D)}. \quad (5)$$

У цій формулі $D \equiv \mathcal{D}(1)$.

На Рис. 1 бачимо, що параметр q_∞ є чутливішим до змін D при малих D . Якщо ж D наближається до одиниці, параметр q_∞ слабо залежить від коефіцієнта проходження електронів.

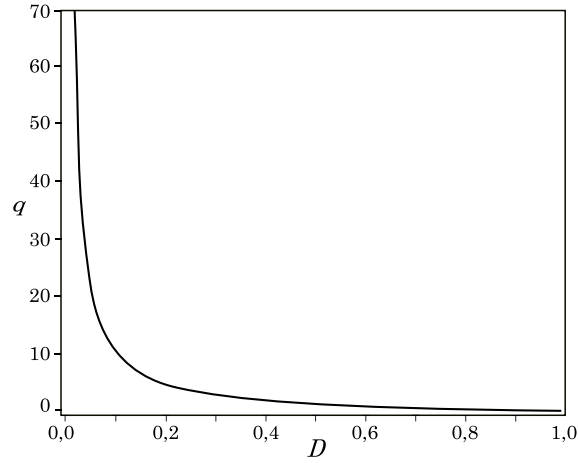


Рис. 1: Залежність параметра q_∞ від коефіцієнта проходження електронів, які налітають на границю надпровідника з діелектриком під прямим кутом.

3. Динаміка магнітного потоку крізь довгий джозефсонівський контакт

Надалі розглядатимемо як відмінність від синусоїдної в залежності струму від різниці фаз впливатиме на просторово-часову еволюцію останньої у довгому джозефсонівському контакті. Для нетривіальної струм-фазової залежності (1) маємо модифіковане рівняння синус-Гордона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{\lambda_j^2} \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \varphi}{1 - \varepsilon \cos \varphi} = 0. \quad (6)$$

Якщо запровадити безрозмірні змінні $\tilde{x} = \frac{x}{\lambda_j}$ і $\tilde{t} = \frac{\bar{c}t}{\lambda_j}$ (в подальших записях знак «тильда» будемо опускаати) та допоміжний потенціал

$$U(\varphi) = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} \ln \left(\frac{1 - \varepsilon \cos \varphi}{1 - \varepsilon} \right), \quad (7)$$

то рівняння (6) перепишеться у вигляді

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tilde{x}^2} = - \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \varphi}{1 - \varepsilon \cos \varphi} = -U'(\varphi). \quad (8)$$

Якщо $\varepsilon \rightarrow 0$, то відтворюємо стандартне рівняння синус-Гордона, оскільки $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U(\varphi) = 2 \left(\sin \frac{\varphi}{2} \right)^2$. При $\varepsilon \rightarrow 1$, мінімуми потенціалу $U(\varphi)$ стають більш вузькими, а висота бар'єра

$$\Delta U = U(\pi) - U(0) = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} \ln \left(\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)$$

прямує до нуля.

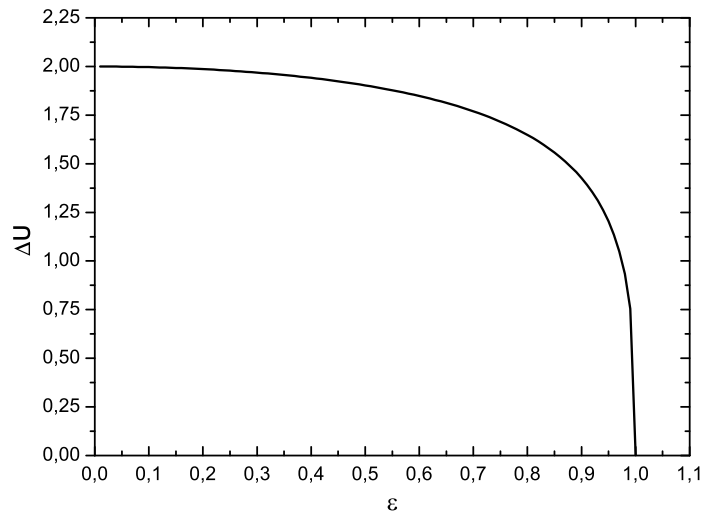


Рис. 2: Залежність висоти допоміжного потенціалу $U(\varphi)$ від ε .

На Рис. 2 бачимо, що вплив параметра ε на висоту допоміжного потенціалу є несуттєвим при малих значеннях, а при наближенні ε до одиниці ΔU швидко прямує до нуля.

Якщо зовнішнє магнітне поле є слабким, тоді $\varphi \ll 1$, що дозволяє скористатися наближенням: $\cos \varphi \cong 1$ та $\sin \varphi \cong \varphi$. В результаті модифіковане рівняння синус-Гордона (8) зводиться до лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку в частинних похідних

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left(\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)^{1/2} \varphi = 0,$$

загальний розв'язок якого потрібно шукати у вигляді

$$\varphi(x, t) = \varphi(0, 0) \exp \{ i(qx - \omega t) \}.$$

Як наслідок, ми отримуємо аналітичну формулу

$$\omega(q) = \left\{ \left(\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)^{1/2} + q^2 \right\}^{1/2}$$

для джозефсонівської плазмової частоти. Що стосується джозефсонівської плазмової частоти $\omega(0)$ для нескінченно великих довжин хвиль, то вона буде зростати, якщо зростатиме параметр ε .

4. Розв'язки модифікованого рівняння синус-Гордона

Ми запровадили модифіковане рівняння синус-Гордона (8), яке описує динаміку флюксонів у довгому джозефсонівському контакті з нетривіальною струм-фазовою залежністю (1). Нас цікавить окремий випадок розв'язків $\varphi = \varphi(x - Vt)$, що описують поширення хвилі зі сталою безрозмірною швидкістю V . Якщо запровадити нову просторову змінну $\xi = x - Vt$, то диференціальне рівняння другого порядку в частинних похідних (8) перетвориться на звичайне диференціальне рівняння другого порядку

$$(1 - V^2) \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \varphi}{1 - \varepsilon \cos \varphi} = U'(\varphi) \quad (9)$$

для різниці фаз $\varphi(\xi)$, яке можна вважати ньютонівським рівнянням руху частинки маси $1 - V^2 > 0$ у потенціальному полі $-U(\varphi)$. Відомо, що квант магнітного потоку в довгому джозефсонівському контакті переноситься топологічними солітонами (флюксонами). Солітони — це просторово локалізовані хвилі, для яких мають виконуватись такі граничні умови:

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \varphi(\xi) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \varphi(\xi) = \pm 2\pi, \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \frac{d\varphi}{d\xi} = 0. \quad (10)$$

Знаки «+» та «-» обираємо для флюксона та антифлюксона відповідно. Без втрати загальності ми будемо розглядати тільки флюксони. Для модифікованого рівняння синус-Гордона (9) вдається отримати перший інтеграл

$$\left(\frac{d\varphi}{d\xi} \right)^2 = \frac{2\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon(1 - V^2)} \ln \left(\frac{1 - \varepsilon \cos \varphi}{1 - \varepsilon} \right). \quad (11)$$

Для подальшого аналізу цього рівняння представимо його праву частину у вигляді розкладу в ряд за параметром ε

$$\left(\frac{d\varphi}{d\xi} \right)^2 = \frac{2\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{1 - V^2} \left\{ 1 - \cos \varphi + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[1 - (\cos \varphi)^{n+1} \right] \frac{\varepsilon^n}{n+1} \right\}. \quad (12)$$

Якщо $D \ll 1$, то в такому частинному випадку замість формули (5) для сталої величини q_∞ будемо мати таку асимптотику:

$$q_\infty \cong \frac{28\zeta(3)}{3\pi^2} \frac{1}{D}, \quad D \ll 1. \quad (13)$$

Оскільки константа q_∞ є нескінченно великою, то з формули (2) видно, що параметр ε є нескінченно малим. Тоді диференціальне рівняння (8) перетворюється на стандартне рівняння синус-Гордона $\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \sin \varphi = 0$, солітонні розв'язки якого є добре відомі [5]:

$$\varphi(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left(\exp \left\{ \pm \frac{x - x_0 - Vt}{\sqrt{1 - V^2}} \right\} \right).$$

Але якщо в правій частині диференціального рівняння (12) обмежитись лінійною залежністю за параметром ε , то можна прийти до цілком інтегровного диференціального рівняння першого порядку

$$\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)^2 = \frac{4}{1-V^2} \left(\sin \frac{\varphi}{2}\right)^2 \left\{1 + \varepsilon \left(\cos \frac{\varphi}{2}\right)^2\right\},$$

яке є тотожним до подвійного рівняння синус-Гордона. Розв'язуючи це рівняння отримуємо

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{\operatorname{sh}(z)} = 0, \quad z = \pm(x - x_0 - Vt) \left(\frac{1+\varepsilon}{1-V^2}\right)^{1/2}.$$

Якщо в правій частині диференціального рівняння (12) обмежитись квадратичною залежністю за параметром ε , то одержимо потрібне рівняння синус-Гордона.

Нехай тепер $D \lesssim 1$, тоді замість формули (5) для сталої величини q_∞ маємо таку асимптотику:

$$q_\infty \cong \frac{\pi^4}{56\zeta(3)} (1-D), \quad D \lesssim 1. \quad (14)$$

На жаль, неможливо знайти точний аналітичний розв'язок диференціального рівняння першого порядку (11) для довільних значень параметра ε . Тому ми змушені вдаватися до чисельних розрахунків. Це було зроблено для кількох значень параметра ε , серед яких є крайні та проміжні значення.

Просторову поведінку фази Джозефсона, яка задовольняє модифіковане рівняння синус-Гордона (9) для флюксона, подано на Рис. 3 у випадку різних значень параметра ε . Просторову поведінку безрозмірного магнітного поля $\frac{H}{H_0} = \frac{d\varphi}{d\xi}$, яке проникає

в серцевину флюксона, подано на Рис. 4. Тут ми маємо величину $H_0 = \frac{\hbar}{2e\mu_0\lambda_j\Lambda}$, яку подано через повну глибину проникнення $\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + d$. Величини λ_1 та λ_2 є лондонівськими глибинами проникнення для надпровідників, а величина d є товщиною тонкої діелектричної плівки.

На основі Рис. 3 та Рис. 4 можемо зробити такі висновки: 1) якщо параметр ε зростає, то зростає також і приблизна ширина флюксона, таке зростання є найбільш помітним для $\varepsilon \rightarrow 1$, але є незначним для інших випадків; 2) значне відхилення від синусоїдної струм-фазової залежності робить межі флюксона більш виразними. Якщо $\varepsilon \rightarrow 1$, то просторова поведінка різниці фаз φ є майже лінійною у серцевині флюксона. Графік залежності безрозмірного магнітного поля $\frac{H}{H_0}$ від просторової координати ξ наближається до прямокутної форми. Якщо значення параметра ε є неблизькими до 1, то межі флюксона є досить розмитими. При цьому максимальне значення $H(\xi = 0)$ магнітного поля, яке проникає в серцевину флюксона, збільшується.

З асимптотики (14) видно, що стала величина q_∞ є нескінченно малою для $D \lesssim 1$. У такому частинному випадку безрозмірний параметр ε буде близьким до 1. Оскільки допоміжний потенціал $U(\varphi)$ стає більш плоским для асимптотичного випадку,

коли $\varepsilon \lesssim 1$, то ми можемо розвинути допоміжний потенціал $U(\varphi)$ в ряд Тейлора в околі різниці фаз $\varphi = \pi$. Отже,

$$\begin{aligned} U(\varphi) &\approx U(\pi) + \frac{U''(\pi)}{2} (\varphi - \pi)^2 = \\ &= \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} \ln\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{1/2} (\varphi - \pi)^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Чисельні результати Рис. 3 показують, що просторова поведінка різниці фаз φ у серцевині флюксона є майже лінійною для асимптотичного випадку, коли $\varepsilon \lesssim 1$. Це означає, що ми маємо обмежитись у розкладі (15) лише сталим доданком. Якщо запровадити новий параметр $\delta = 1 - \varepsilon$, то $\delta \rightarrow 0$ для випадку, коли $\varepsilon \rightarrow 1$. За таких обставин постійний член у розкладі (15) спадає як $\delta^{1/2} \ln(1/\delta)$, тоді як квадратичний член спадає швидше, як $\delta^{1/2}$. Диференціальне рівняння першого порядку (11), у серцевині флюксона, можна замінити більш спрощеною версією:

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \sqrt{\frac{2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon(1-V^2)} \ln\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)} \equiv C(\varepsilon), \quad |\xi| < \xi_i, \quad (16)$$

його розв'язок

$$\varphi(\xi) = C(\varepsilon)\xi + A_1, \quad |\xi| < \xi_i. \quad (17)$$

При $\xi < -\xi_i$ $\varphi \cong 0$, тоді $\cos \varphi \cong 1$ та $\sin \varphi \cong \varphi$. Це дозволяє перетворити модифіковане рівняння синус-Гордона (9) на лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} - \left\{ \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} \right\}^2 \varphi = 0, \quad \xi < -\xi_i. \quad (18)$$

Розв'язок цього рівняння

$$\varphi(\xi) = A \exp\left\{ \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{1/4} \frac{\xi}{\sqrt{1-V^2}} \right\}, \quad \xi < -\xi_i. \quad (19)$$

При $\xi > \xi_i$ $\varphi \cong 2\pi$. Застосування наближень $\cos \varphi \cong 1$ та $\sin \varphi = \sin(\varphi - 2\pi) \cong \varphi - 2\pi$ дозволяють перетворити модифіковане рівняння синус-Гордона (9) до простішої форми:

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} - \left\{ \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} \right\}^2 (\varphi - 2\pi) = 0, \quad \xi > \xi_i. \quad (20)$$

Загальний розв'язок цього рівняння

$$\varphi(\xi) = 2\pi + A_2 \exp\left\{ - \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{1/4} \frac{\xi}{\sqrt{1-V^2}} \right\}, \quad \xi > \xi_i. \quad (21)$$

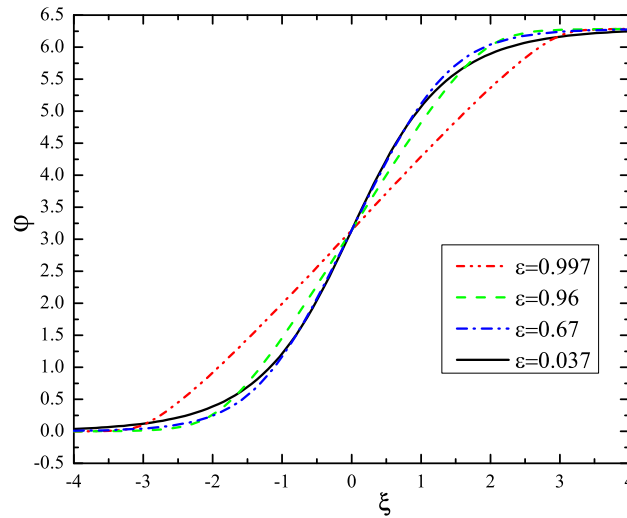


Рис. 3: Просторовий розподіл різниці фаз φ для одного флюксона в довгому джозефсонівському контакті з різними значеннями прозорості діелектричного прошарку D . Обрахунки проведено для температури $T = 0.98 T_c$ та безрозмірної швидкості флюксона $V = 0.5$.

Чотири невідомі сталі A , A_1 , A_2 та ξ_i знаходимо за допомогою таких чотирьох умов:

$$\begin{aligned} \varphi(-\xi_i - 0) &= \varphi(-\xi_i + 0), & \varphi'(-\xi_i - 0) &= \varphi'(-\xi_i + 0), \\ \varphi(\xi_i - 0) &= \varphi(\xi_i + 0), & \varphi'(\xi_i - 0) &= \varphi'(\xi_i + 0). \end{aligned}$$

В результаті отримуємо:

$$\xi_i = -\sqrt{1 - V^2} \left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right)^{1/4} + \pi \left\{ \frac{2\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon(1 - V^2)} \ln \left(\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right) \right\}^{-1/2}, \quad (22)$$

$$A_1 = \pi, \quad A_2 = -A \quad \text{та} \quad A = \chi \exp \left(\frac{\pi}{\chi} - 1 \right), \quad \text{де} \quad \chi = \sqrt{\frac{2(1 - \varepsilon)}{\varepsilon} \ln \left(\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)}.$$

Висновки

В роботі досліджено вплив ангармонічності на динаміку флюксонів у довгому джозефсонівському контакті. Показано, що зі збільшенням ангармонічності проникнення магнітного поля в область флюксона є більш рівномірним. Крім чисельних результатів, для асимптотичних випадків отримано й аналітичні формули. Для малих значень коефіцієнта проходження електронів крізь бар'єр показано, що для

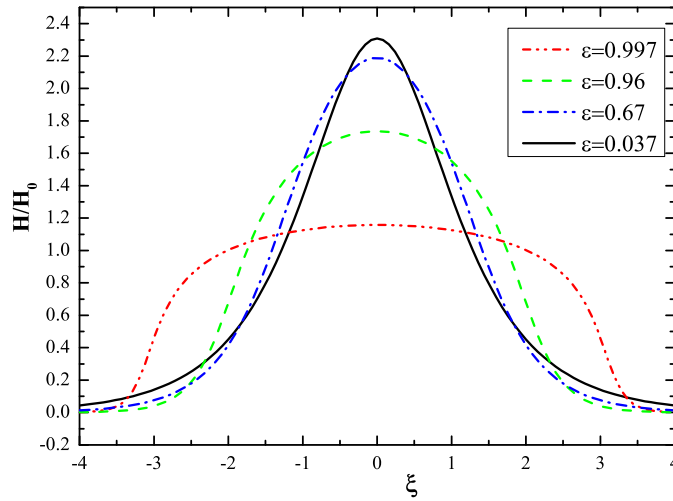


Рис. 4: Просторовий розподіл безрозмірного магнітного поля $\frac{H}{H_0} = \frac{d\varphi}{d\xi}$ для одного флюксона в довгому джозефсонівському контакті з різними значеннями прозорості діелектричного прошарку D . Значення параметрів є такими ж як і у випадку Рис. 3.

внутрішньої області $|\xi| < \xi_i$ просторова поведінка різниці фаз описується лінійною залежністю $\varphi(\xi) = C(\varepsilon)\xi + \pi$. Нахил флюксона визначається сталою $C(\varepsilon)$, яка спадає як $\delta^{1/4}\sqrt{\ln(1/\delta)}$ для випадку, коли $\varepsilon \rightarrow 1$. Оскільки серцевина флюксона розташована в області $|\xi| < \xi_i$, то величина ξ_i за своїм фізичним змістом є напівшириною флюксона. З формули (22) для напівширини флюксона видно, якщо $\varepsilon \rightarrow 1$, то $\xi_i > 0$. Це є наслідком того, що перший доданок у правій частині формули (22) стає нескінченно малим, а другий збільшується. Розрахунок напівширини флюксона на основі аналітичної формули (22) дає значення $\xi_i \approx 2.74$ для параметрів Рис. 3, що є близьким до чисельного результату.

-
1. Josephson B. D. Possible new effects in superconductive tunneling / B. D. Josephson // *Physics Letters*. – 1962. – Vol. 1(7), P. 251–253. doi: 10.1016/0031-9163(62)91369-0.
 2. Barone A. *Physics and Applications of the Josephson Effect* / A. Barone, G. Paterno // NY: Wiley. – 1982. – 529 p. doi: 10.1002/352760278X.
 3. Likharev K. K. *Dynamics of Josephson Junctions and Circuits* / K. K. Likharev // NY: Gordon and Breach. – 1986. – 640 p. doi: 10.1201/9781315141572.

4. Schmidt V. V. The Physics of Superconductors: Introduction to Fundamentals and Applications / V. V. Schmidt, P. Muller, A. V. Ustinov // NY: Springer-Verlag. – 1997. – 207 p. doi: 10.1007/978-3-662-03501-6.
5. McLaughlin, D. W. Perturbation analysis of fluxon dynamics / D. W. McLaughlin, A. C. Scott // Physical Review A. – 1978. – Vol. 18. – P. 1652–1680. doi: 10.1103/PhysRevA.18.1652.
6. Ustinov A. V. Solitons in Josephson junctions / A. V. Ustinov // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1998. – Vol. 123. – P. 315–329. doi: 10.1016/S0167-2789(98)00131-6.
7. Averin D. V. Rapid ballistic readout for flux qubits / D. V. Averin, K. Rabenstein, V. K. Semenov // Physical Review B. – 2006. – Vol. 73. P. 094504. doi: 10.1103/PhysRevB.73.094504.
8. Soloviev I. I. Soliton scattering as a measurement tool for weak signals / I. I. Soloviev, N. V. Klenov, A. L. Pankratov, L. S. Revin, E. Il'ichev, L. S. Kuzmin // Physical Review B. – 2015. – Vol. 92(1). – P. 014516. doi: 10.1103/PhysRevB.92.014516.
9. Wustmann W. Reversible fluxon logic: Topological particles allow ballistic gates along one-dimensional paths / W. Wustmann, K. D. Osborn // Physical Review B. – 2020. – Vol. 101. – P. 014516. doi: 10.1103/PhysRevB.101.014516.
10. Golubov A. A. The current-phase relation in Josephson junctions / A. A. Golubov, M. Y. Kupriyanov, E. Il'ichev // Reviews of Modern Physics. – 2004. – Vol. 76. – P. 411. doi: 10.1103/RevModPhys.76.411.
11. Askerzade I. N. Effects of anharmonicity of current-phase relation in Josephson junctions / I. N. Askerzade // Low Temperature Physics. – 2015. – Vol. 41. – P. 241. doi: 10.1063/1.4916071.
12. Svidzinskyi A. V. Microscopic Theory of Superconductivity / A. V. Svidzinskyi // Lutsk: Lesya Ukrainka Volyn National University. – 2011. – 422 p. [in Ukrainian].
13. Kupriyanov M. Yu. Effect of a finite transmission of the insulating layer on the properties of SIS tunnel junctions / M. Yu. Kupriyanov // JETP Letter [Pis'ma v Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki]. – 1992. – Vol. 56. – P. 399.
14. Sakhnyuk V. Influence of the dielectric layer transparency upon the current dependence of the phase difference on the sis junctions / V. Sakhnyuk, V. Holoviy // Journal of Physical Studies. – 2011. – Vol. 15(2). – P. 2702. doi: 10.30970/jps.15.2702.
15. Pastukh O. Yu. The effects of depairing on the current-phase relation in SIS junctions in the presence of nonmagnetic impurities of arbitrary concentration / O. Yu. Pastukh, A. M. Shutovskii, V. E. Sakhnyuk // Low Temperature Physics. – 2017. – Vol. 43. – P. 664–669. doi: 10.1063/1.4985972.
16. F. Sols Crossover from the Josephson effect to bulk superconducting flow / F. Sols and J. Ferrer // Physical Review B. – 1994. – Vol. 49. – P. 15913. doi: 10.1103/PhysRevB.49.15913.

References

1. B. D. Josephson, Physics Letters. **1**(7), 251–253 (1962). doi: 10.1016/0031-9163(62)91369-0.
2. A. Barone, G. Paterno, Wiley, New York (1982). doi: 10.1002/352760278X.
3. K. K. Likharev, Gordon and Breach, New York (1986). doi: 10.1201/9781315141572.

4. V. V. Schmidt, P. Muller, A. V. Ustinov, NY: Springer-Verlag, New York (1997). doi: 10.1007/978-3-662-03501-6.
5. D. W. McLaughlin, A. C. Scott, Phys. Rev. A. **18**, 1652–1680 (1978). doi: 10.1103/PhysRevA.18.1652.
6. A. V. Ustinov, Phys. D: Nonlinear Phenomena. **123**, 315–329 (1998). doi: 10.1016/S0167-2789(98)00131-6.
7. D. V. Averin, K. Rabenstein, V. K. Semenov, Phys. Rev. B. **73**, 094504 (2006). doi: 10.1103/PhysRevB.73.094504.
8. I. I. Soloviev, N. V. Klenov, A. L. Pankratov, L. S. Revin, E. Il'ichev, L. S. Kuzmin, Phys. Rev. B. **192**(1), 014516 (2015). doi: 10.1103/PhysRevB.92.014516.
9. W. Wustmann, K. D. Osborn, Phys. Rev. B. **101**, 014516 (2020). doi: 10.1103/PhysRevB.101.014516.
10. A. A. Golubov, M. Y. Kupriyanov, E. Il'ichev, Reviews of Modern Physics. **76**, 411 (2004). doi: 10.1103/RevModPhys.76.411.
11. I. N. Askerzade, Low Temp. Phys. **41**, 241 (2015). doi: 10.1063/1.4916071.
12. A. V. Svidzinskyi, Lesya Ukrainka Volyn National University, Lutsk, Ukrainian (2011).
13. M. Yu. Kupriyanov, JETP Let. **56**, 399 (1992).
14. V. Sakhnyuk, V. Holoviy, J. Phys. Stud. **15**(2), 2702 (2011). doi: 10.30970/jps.15.2702.
15. O. Yu. Pastukh, A. M. Shutovskii, V. E. Sakhnyuk, Low Temp. Phys. **43**, 664–669 (2017). doi: 10.1063/1.4985972.
16. F. Sols, J. Ferrer, Phys. Rev. B. **49**, 15913 (1994). doi: 10.1103/PhysRevB.49.15913.

Статтю отримано: 08.11.2023
Прийнято до друку: 18.12.2023

Effects of the anharmonicity of the current-phase relation on the dynamics of fluxons in a long Josephson junction

A. Shutovskyi, M. Skipalskiy,
V. Nahod, O. Zamurujeva

*Lesya Ukrainka Volyn National University,
13 Volya Ave, 43025 Lutsk, Ukraine
e-mail: zamurujeva.oksana@vnu.edu.ua*

The influence of anharmonicity in the current-phase relation on the dynamics of fluxons in tunnel Josephson junction for the temperature region close to the critical one is theoretically investigated. The modified sine-Gordon equation that describes the fluxon dynamics in the long Josephson junctions with the nontrivial current-phase relation is derived. This relation originates because the depairing effects are taken into account. The dimensionless parameter ε measures the deviation from the standard sinusoidal current-phase relation. This parameter is related to the transmission coefficient through the insulating barrier, \mathcal{D} . The presented second order partial differential equation is reduced to the first order ordinary differential equation with respect to the new space variable, because a general solution to the modified sine-Gordon equation is considered to be the traveling wave solution that propagates with the constant dimensionless velocity. The numerical methods are used to analyze the spatial behavior of the dimensionless magnetic field, because it is impossible to solve the problem for arbitrary values of the dielectric layer transparency. This has been done for several values of ε that include the extreme values and the intermediate ones. The analytical results can be obtained in the case of infinitesimal dielectric layer transparency. In this case the modified sine-Gordon equation can be simplified. If only the lowest order of ε is taken into account we end up with the standard sine-Gordon equation. The numerical analysis allows us to make several conclusions. As the parameter ε , which measures the deviation of the current-phase relation from the sinusoidal form, grows the approximate width of the fluxon increases. This increase is well seen in the limit $\varepsilon \rightarrow 1$ but is insignificant otherwise. Significant departure from the sinusoidal law makes the fluxon borders more sharp. In particular, the phase distribution for $\varepsilon \lesssim 1$ is almost linear in the fluxon core. The magnetic field distribution in the limit $\varepsilon \rightarrow 1$ is more box-like. For small and intermediate values of ε the fluxon borders are rather blurred. At the same time the maximal value of the penetrated magnetic field decreases.

Key words: sine-Gordon equation, current-phase relation, fluxon, Josephson junction.