ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія фізична. 2006. Вип. 39. С. 17-22 *Ser. Physic. 2006. N 39. P.17-22*

УДК 539.12:530.145
PACS number(s): 03.65.Pm

ДЕЯКІ ОСОБЛИВІ ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ВЛАСТИВОСТІ ЧАСТИНКИ ЗІ СПІНОМ 1

М. Любченко[1], Ю. Степановський [2]

[1] *Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна,*
пл. Свободи, 4, 61077 Харків, Україна
e-mail: vtp@bigmir.net
[2] *Національний науковий центр Харківський фізико-технічний інститут,*
вул. Академічна, 1, 61108 Харків, Україна

Для опису частинки зі спіном 1 в електромагнітному полі було використане релятивістськи інваріантне рівняння Кемера-Дафіна. Обчислений додаток до системи рівнянь Баргмана-Вігнера потрібний для введення у неї електромагнітної взаємодії. Розглянено квазікласичний рух. Залежно від поляризації частинка зі спіном 1 поводить себе як і частинка зі спіном ½ (існує явище конічної рефракції частинок) або по-іншому: з'являється можливість порушення причинності. У другому нерелятивістському наближенні знайдено суттєву різницю з результатом для спіну ½: відсутність "нормальної" частини спін-орбітальної взаємодії та доданка, що свідчить про наявність розмірів частинки.

Ключові слова: спін, релятивістські хвильові рівняння, порушення причинності, рівняння Кемера-Дафіна.

Вивчення властивостей частинок зі спіном привертає увагу ще відтоді, коли тільки вперше це поняття з'явилося у фізиці. Й до сьогодні обговорюються як принципові питання [1], так і окремі проблеми [2, 3].

Для опису релятивістських частинок в кін. 30-х – на поч. 40-х рр. минулого сторіччя Вігнером був розвинений груповий підхід. Природними висновками з цього підходу є рівняння Дірака, Вейля, Максвела та ін. Але як тоді, так і досі, цей підхід не став популярним серед фізиків через свою складність. Тому робилися спроби розробити інші, простіші формалізми. Так, для опису вільних релятивістських частинок зі спіном 1 було створено їх велику кількість: Прока, Кемера-Дафіна, Баргмана-Вігнера, Паулі-Фірця та ін. На жаль, урахування взаємодії (електромагнітної, гравітаційної) в межах деяких з цих формалізмів неможливе. Наприклад, системи рівнянь Баргмана-Вігнера й Паулі-Фірця стають несумісними при мінімальному введенні в них електромагнітного поля, тобто з цих систем видно, що хвильова функція частинки дорівнює нулю за наявності найменшого поля.

Для спіну 1 недостатньо вивченими залишилися навіть нерелятивістські і квазікласичні наближення, добре відомі для спіну ½.

Додатки до рівнянь Баргмана-Вігнера, зумовлені урахуванням електромагнітного поля. Частинку зі спіном 1 описують рівнянням Кемера-Дафіна, яке може бути записаним у вигляді:

$$\left[\left(\gamma_\nu^{(1)} + \gamma_\nu^{(2)}\right) D_\nu + 2mc\right]\Psi = 0\,; \tag{1}$$

$$D_\nu = \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} - i\frac{e}{c}A_\nu\right),$$

де e – заряд частинки, A_ν – вектор-потенціал, $\gamma_\nu^{(1)}$ і $\gamma_\nu^{(2)}$ – матриці Дірака, що діють, відповідно, на перший та другий індекс хвильової функції Ψ, яка має вигляд:

$$\Psi_{\alpha\beta} = \left(\gamma_\mu C\right)_{\alpha\beta}\Psi_\mu + \left(\sigma_{\mu\nu}C\right)_{\alpha\beta}\Psi_{\mu\nu}\,,\ \alpha, \beta, \mu, \nu = 1, 2, 3, 4.$$

C – матриця зарядового спряження.

Якщо частинка вільна, то з (1) можна отримати систему рівнянь Баргмана-Вігнера:

$$\begin{cases}\left[i\gamma_\nu^{(1)} p_\nu + mc\right]\Psi = 0\\ \left[i\gamma_\nu^{(2)} p_\nu + mc\right]\Psi = 0\end{cases}. \tag{2}$$

Поле в цю систему не може бути введене шляхом звичайної заміни $p_\nu \to \left(p_\nu - \frac{e}{c}A_\nu\right)$, тому що при цьому рівняння стають несумісними. Але з (1) легко вивести аналог системи (2) з урахуванням поля:

$$\left[D_\rho, D_\nu\right]\Psi = -\frac{ie}{c}F_{\rho\nu}\Psi$$

$$\left(\gamma_\rho^{(1)} - \gamma_\rho^{(2)}\right) D_\rho\left[\left(\gamma_\nu^{(1)} + \gamma_\nu^{(2)}\right) D_\nu + 2mc\right]\Psi =$$

$$= \left[2\mu_B m\left(\sigma_{\rho\nu}^{(1)} - \sigma_{\rho\nu}^{(2)} - \frac{i}{2}K_{\rho\nu}\right)F_{\rho\nu} + 2mc\left(\gamma_\rho^{(1)} D_\rho + \gamma_\rho^{(1)} D_\rho + 2mc\right)\right]\Psi = 0\,,$$

де

$$\sigma_{\rho\nu}^{(1,2)} = \frac{\gamma_\rho^{(1,2)}\gamma_\nu^{(1,2)} - \gamma_\nu^{(1,2)}\gamma_\rho^{(1,2)}}{4i}\,;\ K_{\rho\nu} = \gamma_\rho^{(1)}\gamma_\nu^{(2)} - \gamma_\rho^{(2)}\gamma_\nu^{(1)}\,,$$

$F_{\rho\nu} = A_{\nu,\rho} - A_{\rho,\nu}$ – тензор електромагнітного поля.

Отже, отримуємо перше рівняння системи (2) з урахуванням поля:

$$\left[\frac{1}{2}\mu_B F_{\rho\nu}\left(\sigma_{\rho\nu}^{(1)} - \sigma_{\rho\nu}^{(2)} - \frac{iK_{\rho\nu}}{2}\right) + mc^2 + c\gamma_\rho^{(1)} D_\rho\right]\Psi = 0\,. \tag{3}$$

Друге рівняння отримуємо заміною верхніх індексів.

Квазікласичне наближення. Конічна рефракція та надсвітові швидкості. У 1832 р. Гамільтон на підставі кристалооптичних рівнянь Френеля з'ясував, що при певних умовах світовий промінь може перетворитися на сім'ю променів, розподілених по поверхні конуса. Це явище Гамільтон назвав конічною рефракцією.

У статті [4] було досліджено, що з рівняння квазікласичного наближення для нейтральної частинки зі спіном ½ в електромагнітному полі засвідчують наявність явища, аналогічного до конічної рефракції в оптиці. Але ці висновки не можна використовувати для зарядженої частинки, бо ефект буде неможливо спостерігати через розпливання хвильового пакета [1]. Спробуємо переконатись у тому, що конічна рефракція виникає також і у випадку спіну 1.

Для поляризації частинки ±1 шукатимемо рішення рівняння (1) у вигляді

$$\Psi_{\alpha\beta} = \Psi_{\alpha}\Psi_{\beta} \ ,$$

де Ψ_α,Ψ_β – біспінори, які задовільняють рівняння

$$\left(i\gamma_\nu p_\nu + m + \mu\sigma_{\nu\lambda}F_{\nu\lambda}\right)\Psi_\alpha = 0 \ .$$

Дисперсійне рівняння для енергії має вигляд

$$\left(\varepsilon^2 - \mu^2\mathbf{E}^2 - \mu^2\mathbf{H}^2 - \mathbf{p}^2 - \mathrm{m}^2\right)^2 = 4\mu^2\left(\left[\mathbf{E}\times\mathbf{p}\right]^2 + \left[\mathbf{H}\times\mathbf{p}\right]^2 + \left[\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right]^2 - 2\varepsilon\mathbf{p}\left[\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right] + \mathrm{m}^2\ \mathbf{H}^2\right) \ . \tag{4}$$

У статті [4] показано, що конічну рефракцію з такого рівняння видно лише у випадку, коли $\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2 > 0$ і ($\mathbf{EH}$)=0. У разі, коли інваріант ($\mathbf{EH}$)=0, можна обрати таку систему відліку, де відсутнє або **E**, або **H**. Якщо **H**=0, з рівняння (4) легко обчислити швидкість частинки:

$$\mathrm{v} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{\varepsilon} \pm \frac{\left[\mathbf{E}\times\left[\mathbf{E}\times\mathbf{p}\right]\right]}{\varepsilon\left|\left[\mathbf{E}\times\mathbf{p}\right]\right|} \ , \tag{5}$$

де $\varepsilon = \sqrt{\mathbf{p}^2 + \mathrm{m}^2 + \mathbf{E}^2 + 2\left|\left[\mathbf{E}\times\mathbf{p}\right]\right|}$. За умови $\mathbf{p}\|\mathbf{E}$ з'являється невизначеність 0/0. Вважа-ючи, що вектор р має перпендикулярну складову $\mathbf{p}_\perp$ до **E**, отримуємо з (5):

$$\mathrm{v} = \frac{\mathbf{p}}{\varepsilon} \mp \frac{|\mathbf{E}|}{\varepsilon}\frac{\mathbf{p}_\perp}{|\mathbf{p}_\perp|} \ .$$

Звідси видно, що як завгодно мала складова $\mathbf{p}_\perp$ дає помітний внесок у швидкість **v**.

Можна довести, що при довільних **E** і **H** рівняння (4) не приводить до надсвітових швидкостей [4]. Але у разі спіна 1 існує ще одна можливість: нульова проекція спіна на деякий напрям. У цьому випадку дисперсійне рівняння, як можна переконатися, має вирішення, які відповідають надсвітовим швидкостям частинок. (Надсвітовий рух частинок зі спіном 1, описуваних рівняннями Прока, був проаналізований у праці [5].)

Нерелятивістські наближення для частинки зі спіном 1. Якщо енергія частинки мало відрізняється від її енергії спокою, можна провести розкладання в ряд за ступенями 1/с. Для цього напишемо рівняння Кемера-Дафіна для хвильової функції

$$\mathbf{\Omega} = \Psi e^{imc^2t} = \begin{pmatrix} \varphi & \lambda \\ \zeta & \xi \end{pmatrix},$$

де φ, λ, ζ, ξ, компоненти $\mathbf{\Omega}$, своєю чергою, є матрицями 2×2, для їх компонент справджується нерівність $\xi_{ab} << \zeta_{ab} \approx \lambda_{ab} << \varphi_{ab}$, матриці **ξ** і φ – симетричні.

$$\left[\left(\gamma_\nu^{(1)} + \gamma_\nu^{(2)}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} - i\frac{e}{c}A_\nu\right) + 2mc - mc\left(\gamma_4^{(1)} + \gamma_4^{(2)}\right)\right]\Omega = 0 \ .$$

Легко перевірити, що $\gamma_\mu^{(2)}\mathbf{\Omega} = \left(\gamma_\mu^{(1)}\mathbf{\Omega}\right)^{\mathrm{T}}$. Тож, використовуючи конкретне представлення для матриць Дірака (як в [5]), отримуємо систему рівнянь для компонент хвильової функції $\mathbf{\Omega}$:

$$\begin{cases} 2D_4\varphi - i\sigma_k D_k\xi - i(\sigma_k D_k\xi)^{\mathrm{T}} = 0 \\ 4mc\xi - 2D_4\xi + i\sigma_k D_k\lambda + i(\sigma_k D_k\lambda)^{\mathrm{T}} = 0 \\ 2mc\xi + i\sigma_k D_k\varphi - i(\sigma_k D_k\xi)^{\mathrm{T}} = 0 \\ 2mc\lambda - i\sigma_k D_k\xi + i(\sigma_k D_k\varphi)^{\mathrm{T}} = 0 \end{cases},$$

де σ_k – матриці Паулі.

У першому наближенні $\xi = 0$. Тоді

$$\zeta = -\frac{i\sigma_k D_k\varphi}{2mc}; \quad \lambda = -\frac{i\left(\sigma_k D_k\varphi\right)^{\mathrm{T}}}{2mc} \text{ й}$$

$$2D_4\varphi - \frac{\sigma_j D_j\sigma_k D_k\varphi}{2mc} - \frac{\left(\sigma_j D_j\sigma_k D_k\varphi\right)^{\mathrm{T}}}{2mc} = 0 .$$

Останнє рівняння може бути переписане так:

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2}{2m}\varphi + eA_4\varphi - \frac{e}{4mc}\mathbf{H}\left(\sigma\varphi + \left(\sigma\varphi\right)^{\mathrm{T}}\right) . \tag{6}$$

Це – аналог рівняння Паулі.

Друге неближення має вигляд

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2}{2m}\varphi + eA_4\varphi - \frac{e}{2mc}\mathbf{H}\left(\sigma\varphi + \left(\sigma\varphi\right)^{\mathrm{T}}\right) - \frac{\mathbf{p}^4\varphi}{8m^3c^2} . \tag{7}$$

Результат досить несподіваний, бо друге нерелятивістське наближення для частинки зі спіном ½ має зовсім інший вигляд [6, 7]:

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2}{2m}\varphi + eA_4\varphi - \frac{e}{2mc}\mathbf{H}\sigma\varphi - \frac{\mathbf{p}^4\varphi}{8m^3c^2} - \frac{e}{4m^2c^2}\sigma\left[\mathbf{E}\times\mathbf{p}\right]\varphi + \frac{e}{8m^2c^2}\Delta A_4\varphi$$

(тут φ є спінором, стовпцем з двох чисел).

Третій доданок враховує залежність маси від швидкості (він є і для частинки зі спіном 1), передостанній – енергію взаємодії магнітного диполя з електричним полем (спін-орбітальна взаємодія), останній – свідчить про те, що частинка насправді має розмір.

Щоб зрозуміти, куди поділися два доданки, треба зробити нерелятивістські наближення з урахуванням аномального магнітного моменту. Тож, перше має вигляд

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2}{2m}\varphi + eA_4\varphi - \frac{\left(\mu_B + \mu\right)}{2}\mathbf{H}\left(\sigma\varphi + \left(\sigma\varphi\right)^{\mathrm{T}}\right),$$

друге:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}\varphi = {} & \frac{\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2}{2m}\varphi + eA_4\varphi - \frac{\left(\mu_B + \mu\right)}{2}\mathbf{H}\left(\sigma\varphi + \left(\sigma\varphi\right)^{T}\right) - \frac{\mathbf{p}^4\varphi}{8m^3c^2} - \\ & - \frac{\mu}{2mc}\left[\mathbf{E}\times\mathbf{p}\right]\left(\sigma\varphi + \left(\sigma\varphi\right)^{\mathrm{T}}\right) + \frac{\mu}{2mc}\Delta A_4\varphi \end{aligned} , \tag{7$'$}$$

тобто відсутня лише “нормальна” частина доданків.

Звернемо увагу на те, що у другому наближенні для електрона з урахуванням аномального магнітного моменту доданок, що відповідає спін-орбітальній взаємодії, має вигляд [7].

$$\hat{H}_{SO}\varphi = -\frac{\left(\mu + \frac{\mu_B}{2}\right)}{mc}\sigma\left[\mathbf{E}\times\mathbf{p}\right]\varphi.$$

“Нормальний” магнітний момент входить лише з коефіцієнтом ½ (“томасівська половинка”). У випадку спіна 1 урахування неінерційності системи відліку, зв’язаної з частинкою, призводить до того, що “нормальний” магнітний момент щезає цілком.

Справді, будь-яке тіло, рухаючись з прискоренням, буде обертатися з частотою

$$\omega = -\frac{1}{2c^2}\left[\dot{\mathbf{v}}\times\mathbf{v}\right].$$

Для руху частинки в електромагнітному полі:

$$\omega = -\frac{e}{2mc^2}\left[\mathbf{E}\times\mathbf{v}\right]. \qquad (8)$$

З іншого боку, згідно з теоремою Лармора, магнітний момент, що рухається в електричному полі, повинен прецесувати з частотою

$$\Omega = \frac{g\mathbf{H}'}{2c}, \qquad (9)$$

де g – гіромагнітне відношення для цієї частинки, а $\mathbf{H}'$ – магнітне поле в системі відліку, пов’язаній з цією частинкою. Але

$$\mathbf{H}' = \frac{1}{c}\left[\mathbf{E}\times\mathbf{v}\right].$$

Для частинки зі спіном 1 g=1, отож, (8) і (9) у сумі дають нуль, і частинка прецесувати не буде.

---

1. *Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б.* Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1969. 624 с.
2. *Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Релятивистская квантовая теория. Ч.1. М.: Наука, 1969. 480 с.
3. *Померанский А.А., Сеньков Р.А., Хриплович И.Б.* Релятивистские частицы с внутренним моментом во внешних полях // УФН. 2000. Т. 170. № 10. С. 1129–1141.
4. *Степановский Ю.П.* Коническая рефракция частиц со спином ½ // Ядерная физика. 1982. Т. 35. Вып. 2. С. 336–339.
5. *Хриплович И.Б.* К вопросу о нарушении причинности при движении частиц с высоким спином во внешнем поле // Ядерная физика. 1972. Т. 16. Вып. 4. С. 823–834.
6. *Kalckar J.* On the Measurability of the Spin and Magnetic Moment of the Free Electron // Nuovo cimento. 1972. Vol. 8 A. № 4. P. 759–777.
7. *Nikishov A.I.* Vector boson in constant electromagnetic field // 2001 hep-th/0104019.

SOME ESPECIAL ELECTROMAGNETIC PROPERTIES OF A SPIN 1 PARTICLE

M. Lyubchenko[1], Yu. Stepanovsky[2]

[1] *Karazin Kharkiv National University,*
Svoboda Square, 4, UA-61077 Kharkiv, Ukraine
[2] *National scientific center Kharkiv Institute of physics and technology,*
Akademichna St., 1, UA-61108 Kharkiv, Ukraine

We have used the relativistic invariant Kemmer-Duffin equation for a spin 1 particle description. The addition to the Bargmann-Wigner system, necessary in case of electromagnetic interaction account, has been deduced. Quasi-classical movement has dependence on the polarization: some states are similar to the spin ½ ones and another has essential difference – a possibility of the violation of causality. In second non-relativistic approximation unexpected features have been also found out: absence of spin-orbit interaction and size items.

Key words: spin, relativistic wave equations, violation of causality, Kemmer-Duffin equation.

Стаття надійшла до редколегії 19.05.2004
Прийнята до друку 21.11.2005