

УДК 621.385.6  
PACS number(s): 41.60.Cr

## ХВИЛЕВОДНИЙ ЛАЗЕР НА ВІЛЬНИХ ЕЛЕКТРОНАХ

**В. Горяшко<sup>1</sup>, К. Ільєнко<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна,  
майдан Свободи, 4, 61077 Харків, Україна  
e-mail: vitgor@ire.kharkov.ua

<sup>2</sup>Інститут радіофізики та електроніки ім. О.Я. Усикова НАН України,  
вул. Акад. Проскури, 12, 61085 Харків, Україна  
e-mail: kost@ire.kharkov.ua

Вивчено можливість підсилення власних  $TE$  мод напівнескінченого круглого хвилеводу точковим релятивістським електричним зарядом у лазері на вільних електронах. Траєкторія руху точкового заряду формується зовнішніми статичними поперечним та поздовжнім магнітними полями. Підсилення аналізується на основі нелінійних одночастинкових рівнянь руху заряду, які розв'язуються методом "покрашеного" розкладу в асимптотичний ряд. Із отриманих рішень виходить існування низки "внутрішніх" траєкторних резонансів – перерозподілу кінетичної енергії між поступальними та обертальними ступенями свободи заряду, що рухається. Наявність таких резонансів приводить до зростання коефіцієнта підсилення хвилеводної моди, який оцінюється аналітично та розраховується чисельно.

*Ключові слова:* гібридний лазер на вільних електронах, круглий хвилевід, частота підсилення.

Розробка короткохвильових генераторів або підсилювачів на основі електронних пучків, що рухаються в статичних магнітних, електричних або змішаних полях, активно проводиться у провідних науково-дослідницьких лабораторіях розвинених країн, починаючи із середини 70-х років ХХ ст. Цей інтерес зумовлений технологічними труднощами, з якими зіштовхуються при спробах реалізації принципів генерації класичних приладів НВЧ (магнетрон, ЛБХ, ЛЗХ, оротрон (ГДВ) та ін.) для довжин хвиль коротше  $1 \div 0,1$  мм. Одним із таких пристроїв, що перебудовується по довжині хвилі, є лазер на вільних електронах (ЛВЕ). Нині існуючі дослідницькі ЛВЕ перекривають діапазон довжин хвиль від інфрачервоного до м'якого рентгенівського випромінювання.

У ЛВЕ реалізується магнітогальмове випромінювання релятивістських електронних згустків, що проходять через просторово-періодичну магнітостатичну систему. Його властивості, досліджені в монографіях [1, 2] і огляді [3], близькі до властивостей синхротронного випромінювання, але перевершують останнє за інтенсивністю. У ЛВЕ існує проблема, пов'язана з фокусуванням і каналізацією ондуляторного випромінювання, тому що кут розчину конуса випромінювання пропорційний  $\gamma^{-1}$  ( $\gamma$  – релятивістський чинник), і для слабкорелятивістських

енергій згустку становить близько  $20^\circ$ . Найчастіше вирішують цю проблему, у тому числі і для ЛВЕ, використовуючи хвильоводну структуру [4 – 7]. Сьогодні активно досліджується можливість використання різних хвильоводних (beamguide) структур і для гібридного ЛВЕ [8, 9]. У гібридному ЛВЕ, поряд з магнітним полем ондулятора, також є присутнім однорідне поздовжнє до напрямку поширення електронного пучка магнітне поле. Таке поле називається в теорії ЛВЕ ведучим (guide) магнітним полем. Інтерес до гібридного ЛВЕ спричинений, по-перше, необхідністю точного обліку впливу на параметри вихідного ондуляторного випромінювання постійного поздовжнього магнітного поля, що є у більшості експериментально створюваних схем ЛВЕ. По-друге, можливістю резонансного перекачування енергії між поступальними і обертальними ступенями свободи електронного згустку як цілого (такі резонанси в консервативних динамічних системах називаються внутрішніми [10]). Передбачається, що таке перекачування могло б забезпечити певне збільшення потужності вихідного ондуляторного випромінювання [11].

Виходитимемо з таких положень: релятивістський точковий заряд потряпляє в заземлений напівнескінченний вакуумований циліндричний хвильовід уздовж осі симетрії  $z$ . Швидкість заряду при входженні в систему  $\vec{v} = (0, 0, v_0)$ , в ділянці  $z > 0$  його траєкторія вважається сформованою виключно зовнішніми поперечним і поздовжнім магнітними полями

$$\vec{H} = \{0, -H_{\perp} \sin[2\pi z / l], -H_{\parallel}\} \quad (1)$$

(модель гібридного ЛВЕ [1]). Тут  $l$  – просторовий період поперечного статичного магнітного поля. Геометрія задачі показана на рис. 1 (поздовжнє магнітне поле на малюнку не зазначене).

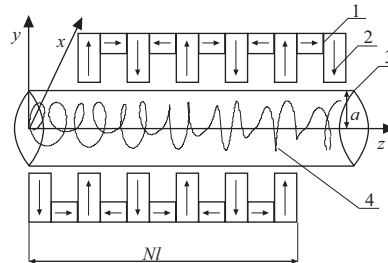


Рис. 1. Геометрія задачі: 1 – самарій-кобальтовий ондулятор; 2 – вектори напруженості магнітного поля ондулятора; 3 – циліндричний хвильовід; 4 – траєкторія точкового заряду;  $a$  – радіус хвильоводу

Нехтуючи взаємодією точкового заряду із стінками хвильоводу та у наближенні заданого струму, проаналізуємо задачу підсилення власних мод системи. Стінки хвильоводу вважаються ідеально провідними. Як перший крок розглянемо питання про рух одиничного релятивістського електрона в магнітному полі вигляду (1).

У гаусовій системі одиниць рівняння руху електрона має вигляд

$$\frac{d}{dt}(m\gamma\vec{v}) = -\frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}]. \quad (2)$$

Доповнимо його початковими умовами

$$x|_{t=0} = y|_{t=0} = z|_{t=0} = 0, \quad v_x|_{t=0} = v_y|_{t=0} = 0, \quad v_z|_{t=0} = v_0 \quad (3)$$

і перепишемо в безрозмірній формі, вводючи низку позначень:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{2\pi\nu_0}{l}, & \omega_{\perp,\parallel} &= \frac{eH_{\perp,\parallel}}{\gamma m_0 c}, & \varepsilon &= \frac{\omega_{\perp}}{\omega_0}, & \sigma_0 &= \frac{\omega_{\parallel}}{\omega_0}, \\ \tau &= \omega_0 t, & \xi &= x/l, & \eta &= y/l, & \zeta &= z/l. \end{aligned} \quad (4)$$

Такі позначення дають змогу записати подальші викладки в простішій формі. Скалярні проекції рівняння руху (2) і початкові умови (3) набувають вигляду:

$$\begin{cases} \frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \sigma_0^2\xi = -\varepsilon \frac{d\zeta}{d\tau} \sin(2\pi\zeta), & \frac{d\zeta}{d\tau} - \delta_0 = \varepsilon \int_0^{\tau} \frac{d\xi}{d\tau} \sin(2\pi\zeta) d\tau, \\ \frac{d\eta}{d\tau} + \sigma_0\xi = 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$\xi|_{\tau=0} = \eta|_{\tau=0} = \zeta|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{d\xi}{d\tau}|_{\tau=0} = \frac{d\eta}{d\tau}|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{d\zeta}{d\tau}|_{\tau=0} = \delta_0 = \frac{1}{2\pi}. \quad (6)$$

При цьому в другому і третьому рівнянні системи (5) вже виконано одне інтегрування і враховані відповідні початкові умови (3). У такому записі величина  $\sigma_0$  має сенс безрозмірної частоти, тому що за формою перше рівняння системи (5) описує осцилятор з діючою на нього силою.

Нехтуючи полем випромінювання, рівняння (5) описують консервативну систему, і наближене рішення системи можна одержати за допомогою однієї з модифікацій методу Лінштеда – методом поліпшеного розкладення в асимптотичний ряд [15]. Ідея методу полягає в одночасному розкладенні невідомих функцій, а також безрозмірної частоти і постійної  $z$  – компоненти швидкості електрона  $\delta_0$ , в асимптотичний низка по малому параметру задачі  $\varepsilon$ . Малість параметра  $\varepsilon$  зумовлена початковою релятивістською швидкістю електрона:

$$\xi(\tau) = \xi_0(\sigma\tau) + \varepsilon\xi_1(\sigma\tau) + \varepsilon^2\xi_2(\sigma\tau) + \dots, \quad (7)$$

$$\zeta(\tau) = \zeta_0(\sigma\tau) + \varepsilon\zeta_1(\sigma\tau) + \varepsilon^2\zeta_2(\sigma\tau) + \dots,$$

$$\sigma = \sigma_0(1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^3 f_3 + \dots), \quad \delta = \delta_0\kappa = \delta_0(1 + \varepsilon g_1 + \varepsilon^3 g_3 + \dots), \quad (8)$$

де  $f_i$  та  $g_i$  – це невідомі константи, а  $\sigma$  і  $\delta$  – це перевизначені значення безрозмірної частоти і віднесеної до  $\delta_0$  постійної складової  $z$ -компоненти швидкості електрона. Асимптотичні розкладення (7) підставляємо в систему (5), і знаходимо функції  $\xi, \zeta$  і константи  $f_i, g_i$  в кожному порядку малості по  $\varepsilon$  (докладніше див. [12]). Проведемо тут рішення з точністю до  $o(\varepsilon^3)$ :

$$\begin{aligned}
\xi_0(\tau) = \eta_0(\tau) = 0, \quad \zeta_1(\tau) = \xi_2(\tau) = \eta_2(\tau) = 0, \quad \zeta_0(\tau) = \frac{\kappa\tau}{2\pi}, \\
\xi_1(\tau) = \frac{\varepsilon}{2\pi\kappa(\mu^2 - 1)} \left[ \frac{\sin(\kappa\mu\tau)}{\mu} - \sin(\kappa\tau) \right], \\
\eta_1(\tau) = \frac{\varepsilon}{2\pi\kappa(\mu^2 - 1)} \left\{ \mu[1 - \cos(\kappa\tau)] + \frac{\cos(\kappa\mu\tau) - 1}{\mu} \right\}, \\
\zeta_2[\tau] = \frac{\varepsilon^2}{4\pi\kappa(\mu^2 - 1)} \left\{ \frac{\sin(2\kappa\tau)}{4} + \frac{\sin[\kappa(\mu - 1)\tau]}{(\mu - 1)^2} + \frac{\sin[\kappa(\mu + 1)\tau]}{(\mu + 1)^2} \right\}. \\
\sigma = \sigma_0 + \varepsilon^2 \frac{\sigma_0(\sigma_0^2 + 1)}{4(\sigma_0^2 - 1)^2}, \quad \kappa = 1 - \varepsilon^2 \frac{\sigma_0^2 + 3}{4(\sigma_0^2 - 1)^2}, \quad \mu = \frac{\sigma}{\kappa}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Завдяки перевизначенню частоти і початкової швидкості (8) рішення (9) не містять розбіжних секулярних членів – доданків виду  $\tau^n \sin(\sigma_0\tau)$ . Виконання закону збереження енергії автоматично впливає із рішення, а не вводиться додатково, як це зроблено у праці [13]:

$$\left( \frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{d\eta}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{d\zeta}{d\tau} \right)^2 = \frac{1}{4\pi^2} + o(\varepsilon^3).$$

Варто звернути увагу на поведження рішення при  $\mu \rightarrow 1$ , тому що при цьому амплітуда поперечних коливань необмежено зростає з часом. З одного боку виникаюча нескінченність є недоліком моделі руху електрона, внаслідок відсутності обліку втрат на випромінювання. З іншого боку ця особливість свідчить про важливе фізичне явище, яке має місце в цій нелінійній системі: резонансне перетікання кінетичної енергії між поступальними й обертальними ступенями свободи електрона. У літературі такий резонанс називається “внутрішнім” резонансом системи [10]. В цій системі існує низка таких резонансів, і вони визначаються умовою  $\mu = 2n + 1$ , де  $n$  – ціле. Це впливає з рішення при обліку більш високих порядків малості по  $\varepsilon$  (див. [12]).

Уведемо поняття мале і резонансне магнітне поле. Малим магнітним полем будемо вважати таке магнітне поле, для якого  $\mu(\sigma_0(H_{\parallel})) \ll 1$ , а резонансним – таке, що,  $\mu(\sigma_0(H_{\parallel})) \approx 1$ . На рис. 2–4 показано характерні траєкторії руху електрона при малому, проміжному і резонансному значеннях  $H_{\parallel}$  при фіксованих  $\beta_0 = 0,8$ ,  $H_{\perp} = 600$  Е. Як видно із рішення, рух електрона визначається співвідношенням двох періодів  $T_1 = 2\pi/\kappa$  і  $T_2 = 2\pi/(\mu\kappa)$ , яке у загальному випадку є ірраціональним. На рис. 2 показано траєкторію руху електрона при малому поздовжньому магнітному полі. У цьому випадку нелінійні властивості системи не виявляються і рух електрона можна вважати суперпозицією рухів у магнітному полі ондулятора і поздовжньому магнітному полі. Зі збільшенням поздовжнього магнітного поля максимальна амплітуда поперечних коливань електрона, як видно з рис. 3, зменшується на порядок порівняно з попереднім випадком. Але відносне відхилення амплітуди від середнього суттєво зростає.

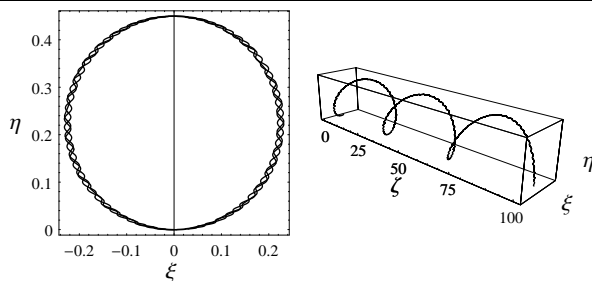


Рис. 2. Траєкторія руху електрона та її проекція на площину  $\xi\eta$ , якщо  $H_{\parallel} = 425 \text{ Е} (\sigma_0 = 0,03)$

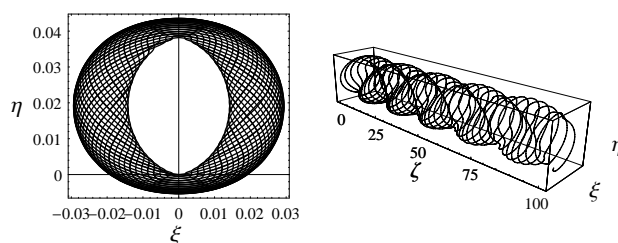


Рис. 3. Траєкторія руху електрона та її проекція на площину  $\xi\eta$ , якщо  $H_{\parallel} = 5 \text{ кЕ} (\sigma_0 = 0,35)$

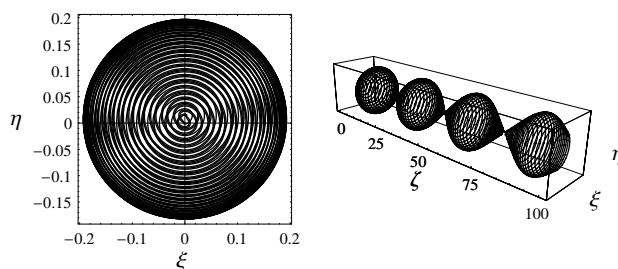
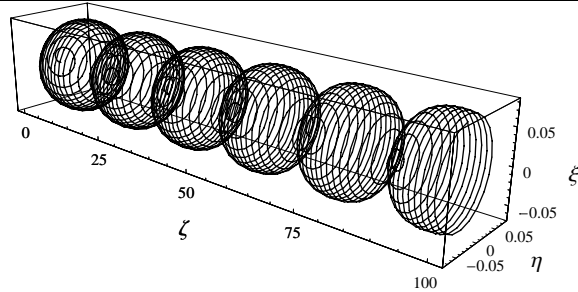
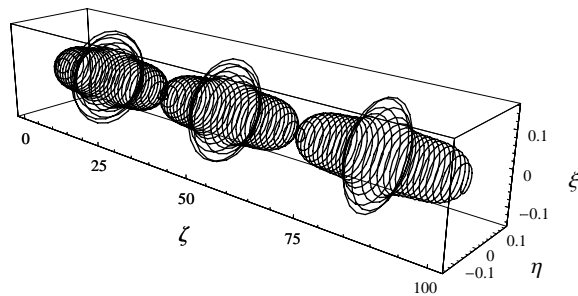


Рис. 4. Траєкторія руху електрона та її проекція на площину  $\xi\eta$ , якщо  $H_{\parallel} = 12,8 \text{ кЕ} (\sigma_0 = 0,9)$

Траєкторія руху електрона у випадку поздовжнього магнітного поля, близького до резонансного, показано на рис. 4. Точне значення  $H_{\parallel}$ , при якому  $\mu = 1$  ( $\beta_0 = 0,8$ ) дорівнює 13 кЕ. Характер руху істотно змінюється: виникають поздовжні просторові “згущення” і “розрідження” у траєкторії при одночасному збільшенні максимальної амплітуди. Така неоднорідність у рухові виникає завдяки існуванню в цій нелінійній системі внутрішніх резонансів.

Рис. 5. Траєкторія руху електрона, якщо  $H_{\parallel} = 12,233$  кЕРис. 6. Траєкторія руху електрона, якщо  $H_{\parallel} = 12,235$  кЕ

Аналітичне рішення перевірялося безпосереднім чисельним рішенням вихідної системи (5) з початковими умовами (6). Відносна похибка чисельного рішення методом Рунге-Кутта становить не більш ніж  $10^{-4}$ . В області  $H_{\parallel}$  до 12 кЕ відмінність аналітичних результатів від чисельних становить не більше 0,1%.

В області  $H_{\parallel} = 12,2 \div 13,5$  кЕ чисельне рішення якісно підтверджує існування внутрішнього резонансу (збільшення амплітуди поперечних коливань). Але крім цього також показує наявність такого магнітного поля  $H_{\parallel} = 12,234$  кЕ, при якому відбувається біфуркація. Мала зміна поздовжнього магнітного поля суттєво змінює траєкторію електрона, див. рис. 5–6. Тому замість терміна “внутрішній” резонанс будемо використовувати термін “резонансна нестабільність”. Така нестабільність спостерігалася експериментально в роботі [14]. На рис. 7–8 показані графіки розподілу поздовжньої швидкості електрона уздовж осі системи і графіки Фур’є-амплітуд швидкості –  $v_z(\omega)$ . У випадку  $H_{\parallel} = 12,235$  кЕ спектр поздовжньої швидкості є майже суцільним і безструктурним. При зазначеній величині поздовжнього магнітного поля динаміку системи можна вважати хаотичною [15]. Однак при подальшому збільшенні поздовжнього поля спектр знову одержує яскраво виражену внутрішню структуру. При переході через точку біфуркації, як видно з рис. 5, 6, збільшується амплітуда поперечних коливань. Зазначимо, що загалом чисельне рішення суттєво відрізняється від аналітичного в резонансній області. Тому для кожного  $v_0$  потрібно вибирати свої  $H_{\parallel}$ , при яких можна використовувати аналітичне рішення (9).

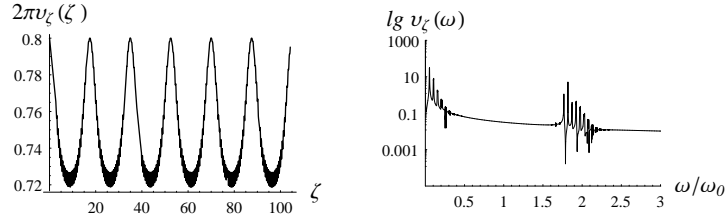


Рис. 7. Графік розподілу поздовжньої швидкості уздовж осі  $\zeta$  (ліворуч) та графік її Фур'є-амплітуди в логарифмічному масштабі (праворуч) у випадку  $H_{\parallel} = 12,233$  кЕ

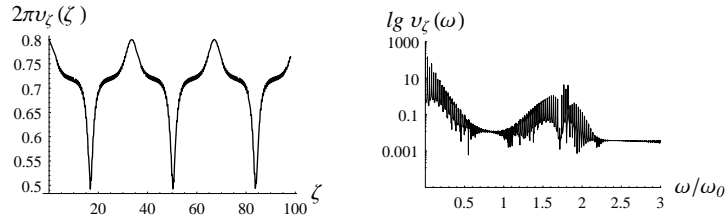


Рис. 8. Графік розподілу поздовжньої швидкості уздовж осі  $\zeta$  (ліворуч) та графік її Фур'є-амплітуди в логарифмічному масштабі (праворуч) у випадку  $H_{\parallel} = 12,235$  кЕ

Питання про те, яку роботу створює точковий електричний заряд над власними модами круглого хвилеводу, виникає при рішенні самоузгодженої задачі збудження хвилеводу. Ґрунтуючись на стандартній теорії (див., наприклад, [16]) подамо невідомі поля у вигляді

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} [C_s(z, \omega) \vec{E}_s(\vec{r}, \omega) + C_{-s}(z, \omega) \vec{E}_{-s}(\vec{r}, \omega)] + \frac{4\pi}{i\omega} \vec{j}^l(\vec{r}, \omega) \right\} e^{-i\omega t} d\omega,$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} [C_s(z, \omega) \vec{H}_s(\vec{r}, \omega) + C_{-s}(z, \omega) \vec{H}_{-s}(\vec{r}, \omega)] \right\} e^{-i\omega t} d\omega.$$

Тоді коефіцієнти  $C_s(z, \omega)$ ,  $C_{-s}(z, \omega)$  обчислюють у такий спосіб:

$$C_{\pm s} = \pm \frac{1}{N_s} \int_V \vec{j} \cdot \vec{E}_{\mp s} dV, \text{ де } N_s = \frac{c}{4\pi} \int_S ([\vec{E}_s, \vec{H}_{-s}] - [\vec{E}_{-s}, \vec{H}_s]) \cdot \vec{l} dS, \vec{l} - \text{вектор,}$$

уздовж якого відбувається поширення ЕМ хвилі. Якщо на вхід системи надходить не модульований тонкий електронний пучок, то щільність струму можна визначити як  $\vec{j} = I_0 v_z(z, t)$  [16], де  $I_0$  – повний струм пучка,  $v_z(z, t)$  визначається з рішення рівняння руху одиночного електрона. Таке визначення щільності струму є зручним для обчислення поля, яке створюється в лінії передачі,

оскільки дає змогу виразити амплітуди нормальних хвиль  $C_s$  через координати окремого електрона. Фізичний зміст інтеграла в  $C_{\pm s}$  – робота над власними модами системи. Тому далі, у наближенні заданого руху, аналізуємо роботу точкового електричного заряду над власними модами круглого хвилеводу.

Залежно від певної аксіальної симетрії траєкторій електрона спочатку розглянемо  $TE_{0q}$  моди. Структура ЕМ поля в циліндричній системі координат (вісь симетрії хвилеводу сполучена з віссю  $z$ ) має вигляд [17]:

$$\begin{aligned} E_\rho &= E_z = H_\phi = 0, \quad H_z = H_{z0} J_0(\rho v_{0q}/a) \sin(\omega t - k_z z), \\ H_\rho &= H_{z0} \frac{k_z a}{v_{0q}} J'_0(\rho v_{0q}/a) \sin(\omega t - k_z z), \\ E_\phi &= H_{z0} \frac{ka}{v_{0q}} J'_0(\rho v_{0q}/a) \cos(\omega t - k_z z). \end{aligned} \quad (11)$$

де  $H_{z0}, k$  – амплітуда поля і хвильове число. Через  $J'_0(\rho v_{0q}/a)$  у цих виразах позначена похідна функції Бесселя за аргументом  $\rho v_{0q}/a$ , де  $v_{0q}$  –  $q$ -й корінь цієї функції  $J'_0$ . Стала розповсюдження  $k_z$  і частота  $\omega$  пов'язані дисперсійним співвідношенням  $(\omega/c)^2 = k_z^2 + (v_{0q}/a)^2 = k^2$ .

Нехай на вхід системи надходить точковий електричний заряд, тоді вважатимемо, що траєкторія цього заряду збігається з траєкторією одного електрона (9). Але як початкову точку відліку виберемо не  $(0,0,0)$ , а  $(-\varepsilon(\mu-1/\mu)/(2\pi\kappa(\mu^2-1)), -\pi/2, 0)$ , тому що тоді траєкторія виглядає найбільш аксіально-симетричною відносно осі  $z$ . Запишемо середню роботу над хвилеводною модою (надалі просто робота)

$$A = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} (\vec{F}, d\vec{l}) = -\frac{|q|}{t_0} \int_0^{t_0} (\vec{E}, \vec{v}) dt, \quad (12)$$

$t_0$  – час взаємодії заряду з хвилеводною модою. Враховуючи позначення (4), вираз для роботи набуде вигляду:

$$A = |q| c H_{z0} \frac{4\pi\beta_0^2 a p}{\omega_0 t_0 l v_{0q}} \int_0^{\omega_0 t_0} J_1(\rho v_{0q}/a) v_\phi \cos[\phi(\tau)] d\tau, \quad (13)$$

де  $\phi(\tau) = p\tau - \zeta(\tau)k_z$  показує в якій фазі хвилеводної моди перебуває електрон у момент часу  $\tau$ . Тут  $p = \omega/\omega_0$  – безрозмірна частота,  $\beta_0 = v_0/c$ .

Даний інтеграл (13) точно не обчислюється аналітично і належить до класу так званих швидкоосцилюючих інтегралів. Будемо його аналізувати у виділених діапазонах зміни параметра  $\sigma_0$ .

За малого поздовжнього магнітного поля вирази для  $\rho, \zeta, v_\phi$  набувають вигляду:

$$\rho \cong \frac{l\varepsilon}{2\pi\kappa\mu}, \quad \zeta(\tau) \cong \frac{\kappa\tau}{2\pi}, \quad v_\phi \cong \frac{\varepsilon^2}{8\pi^2\mu\kappa} \{ \cos[\kappa(\mu-1)\tau] + \cos[\kappa(\mu+1)\tau] - 2 \}, \quad (14)$$



$$\kappa \cong 1 - 3\varepsilon^2 / 4, \quad \mu \cong \sigma_0 (1 + \varepsilon^2 / 4).$$

З такими наближеннями інтеграл (13) легко обчислюють, він не дорівнює нулеві тільки в тому випадку, якщо  $\kappa(1 \pm \mu)\tau = \phi_{\pm}(\tau)$ . З останньої умови знаходимо частоти, на яких можливе підсилення залежно від параметрів  $\beta_0$ ,  $H_{\parallel}$  і від геометрії системи.

$$p_{1,\pm} = \frac{1}{1 - \beta_0^2 \kappa^2} \left[ \kappa(1 + \mu) \pm \sqrt{\beta_0^2 \kappa^4 (1 + \mu)^2 - \frac{l^2 \kappa^2 v_{0q}^2 (1 - \beta_0^2 \kappa^2)}{4\pi^2 a^2}} \right],$$

$$p_{2,\pm} = \frac{1}{1 - \beta_0^2 \kappa^2} \left[ \kappa(1 - \mu) \pm \sqrt{\beta_0^2 \kappa^4 (1 + \mu)^2 - \frac{l^2 \kappa^2 v_{0q}^2 (1 - \beta_0^2 \kappa^2)}{4\pi^2 a^2}} \right]. \quad (15)$$

У класичній схемі ЛВЕ (електронний пучок взаємодіє з магнітним полем ондулятора у вільному просторі) частота випромінювання

$$p_{\text{classical}} = \frac{n}{2(1 - \beta_0^2)} \quad (n - \text{ціле}). \quad (16)$$

Видно, що отриманий результат (15) є узагальненням класичного для другої гармоніки за наявності круглого хвилеводу. Значення частоти підсилення головно визначається початковою швидкістю заряду.

З невід'ємності підкореневого виразу (15) визначимо мінімальну початкову швидкість електрона, за якої можливе підсилення:

$$\beta_{0\text{min}q}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{\left[2a\pi(1 \pm \mu)/(lv_{0q})\right]^2 + 1}}.$$

Якщо дотримано умови,  $\beta_{0\text{min}1}^+ \leq \beta_0 < \beta_{0\text{min}2}^-$ , то можливе підсилення тільки  $TE_{01}$  моди. Тобто реалізується одномодовий режим підсилення. Величину роботи визначають за виразами:

$$A_1(p_{1,\pm}) = -|q| c H_{z0} \frac{ap_{1,\pm} \pi \beta_0^2 \varepsilon (1 + \mu)^2}{2(1 - \mu^2) v_{0q}} J_1 \left[ \frac{l \varepsilon v_{0q}}{2\pi a \kappa \mu (1 - \mu^2)} \right],$$

$$A_2(p_{2,\pm}) = -|q| c H_{z0} \frac{ap_{2,\pm} \pi \beta_0^2 \varepsilon (1 - \mu)^2}{2(1 - \mu^2) v_{0q}} J_1 \left[ \frac{l \varepsilon v_{0q}}{2\pi a \kappa \mu (1 - \mu^2)} \right]. \quad (17)$$

Отже, частота підсилення хвилеводної моди головно визначається початковою швидкістю електрона  $\beta_0$ . Величину поздовжнього магнітного поля  $H_{\parallel}$  вибирають з умови, що заряд у процесі свого руху розміщений в максимумі електричного поля хвилеводної моди  $TE_{01}$ . Такий рух забезпечує максимальне значення середньої роботи електрона над цією модою. Зазначимо, що середня робота не залежить від часу взаємодії.

Як буде видно надалі з чисельного аналізу, вирази (15), (17) якісно правильно описують залежність роботи від частоти у всьому нерезонансному діапазоні зміни  $H_{\parallel}$ . В області резонансних значень  $H_{\parallel}$  інтеграл (13) аналітично не обчислюють.

Чисельне інтегрування виразу (13) проводилося методом Гауса з відносною похибкою не більш ніж  $10^{-4}$ . Значення величин  $a = 0,45$  см,  $H_{\perp} = 600$  Е,  $l = 1$  см обрані відповідно до планованого експерименту.

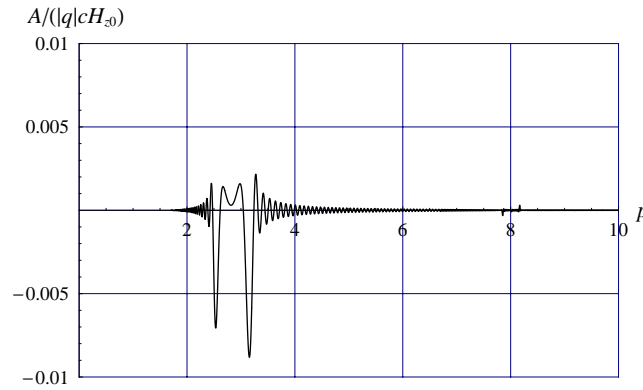


Рис. 9. Середня робота у випадку  $\beta_0 = 0,8$ ,  $H_{\parallel} = 425$  Е,  $TE_{01}$

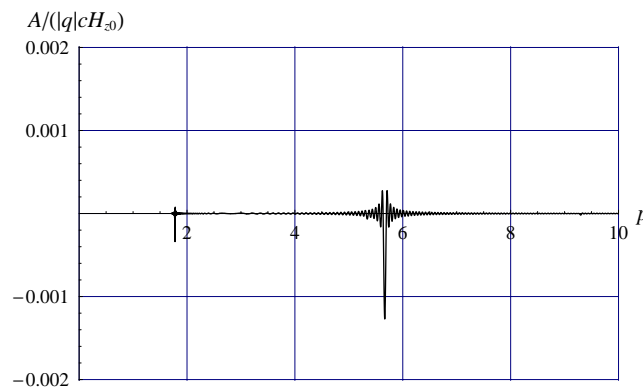


Рис. 10. Середня робота у випадку  $\beta_0 = 0,8$ ,  $H_{\parallel} = 5$  кЕ,  $TE_{01}$

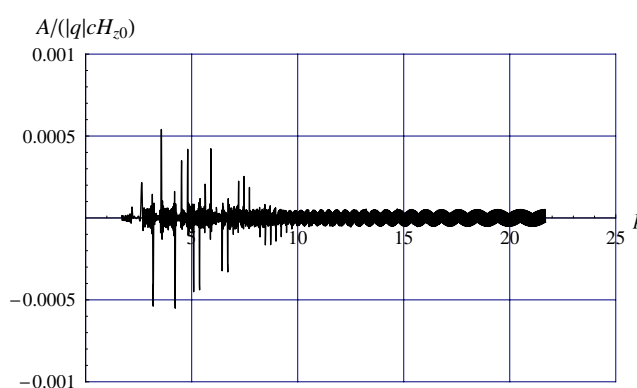
На рис. 9 чітко простежено два максимуми на кривій середньої роботи електрона над хвильоводною модою  $TE_{01}$  як функції частоти цієї моди. При обраному значенні  $H_{\parallel}$  електрон під час свого руху перебуває в максимумі електричного поля моди  $TE_{01}$ , що забезпечує максимальне значення роботи. Обчислення свідчать, що ширина піків кривої роботи обернено пропорційна до довжини простору взаємодії, а значення частоти, на якій досягається максимум роботи, і сама величина середньої роботи незмінні. Тобто робота від різних ділянок траєкторії електрона складається адитивно. Максимальна робота над іншими модами на  $2 \div 3$  порядки менша ніж над модою  $TE_{01}$ , отже реалізується

одномодовий режим. Результати порівняння чисельного й аналітичного рішень для випадку  $\beta_0 = 0,8$ ,  $H_{\parallel} = 425$  Е наведені в табл. 1.

Таблиця 1

Порівняння чисельних і аналітичних результатів частоти і роботи у випадку  $\beta_0 = 0,8$ ,  $H_{\parallel} = 425$  Е,  $TE_{01}$

$\pm$	$p_{\text{an}}$	$p_{\text{num}}$	$\lambda_{\text{an}}$ , мм	$\lambda_{\text{num}}$ , мм	$A_{\text{an}}(p_{\text{an}})$	$A_{\text{num}}(p_{\text{num}})$
+	2,534	2,531	4,933	4,934	$7,44 \cdot 10^{-3}$	$7,065 \cdot 10^{-3}$
-	3,153	3,157	3,965	3,960	$8,565 \cdot 10^{-3}$	$8,815 \cdot 10^{-3}$

Рис. 11. Середня робота у випадку  $\beta_0 = 0,8$ ,  $H_{\parallel} = 12,8$  кЕ,  $TE_{01}$ 

У першому і другому стовпцях табл. 1 зазначені оптимальні (максимальна робота) безрозмірні частоти, отримані аналітично та чисельно. У третьому і четвертому стовпчиках подано відповідні цим частотам довжини хвиль. Максимально можливі значення роботи містяться в п'ятому і шостому стовпчиках. Як ми бачимо, аналітичне наближення добре погоджується з чисельним для частот, і дає з точністю до одного знака мантиси правильні значення робіт. Незважаючи на те, що аналітичне рішення отримане за умови  $\mu \ll 1$ , область його застосування виявляється набагато ширшою, а саме, аж до  $\mu \sim 0,6 \div 0,7$ .

Зі збільшенням поздовжнього магнітного поля одна оптимальна частота зрушується в область менших значень, а інша – в область більших значень. Величина максимальної роботи, як видно з рис. 10, зменшується для обох випадків. Ці твердження залишаються вірними до наближення до області резонансної нестабільності. Надалі у резонансній області використовується точне чисельне рішення рівнянь руху.

Існування резонансної нестабільності в динаміці заряду, як видно з рис. 11, забезпечує наявність максимумів роботи в більш високочастотній області, ніж при нерезонансних  $H_{\parallel}$  для фіксованого  $\beta_0$ . Однак величина роботи для моди  $TE_{01}$  при цьому менша, ніж у нерезонансному випадку. Вважатимемо, що при  $p > 10$  робота дорівнює нулеві, тому що з погляду задачі збудження, якщо частоти

підсилення і поглинання дуже близькі, то на цих частотах ЕМ коливання не виникають.

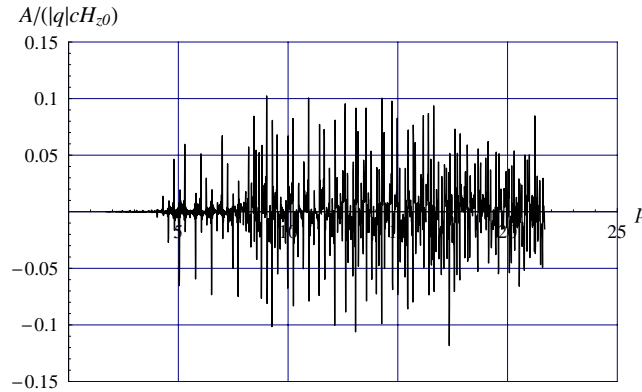


Рис. 12. Середня робота у випадку  $\beta_0 = 0,8$ ,  $H_{\parallel} = 12,8$  кЕ,  $TE_{11}$

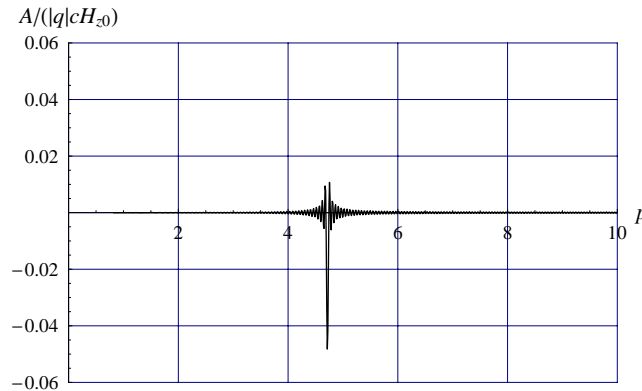


Рис. 13. Середня робота у випадку  $\beta_0 = 0,8$ ,  $H_{\parallel} = 0$  Е,  $TE_{11}$

Також при чисельному аналізі перевірялося припущення про те, що залежно від аксіальної симетрії траєкторій електрона, найбільша робота досягається над модами  $TE_{0q}$ . Це припущення правильне в нерезонансній області, робота над модами  $TE_{0q}$  на 2 ÷ 3 порядки більше, ніж над усіма іншими власними  $TE$  і  $TH$  круглого хвилеводу. Однак це неправильно для резонансного випадку, тут головну роль відіграє взаємодія з модою  $TE_{11}$ , а не з модою  $TE_{01}$  (див. рис. 11, 12). В області високих частот ( $p > 20$ ) вважатимемо, що робота над модою  $TE_{11}$  дорівнює нулеві через ті самі причини, що й у попередньому випадку. Зазначимо, що обчислення інтеграла роботи з урахуванням точного рішення рівнянь руху є на порядок більш трудомісткою задачею, ніж при використанні аналітичного представлення траєкторії.

З метою з'ясування питання про те, чи має гібридний ЛВЕ переваги порівняно з класичним, на рис. 13 подано графік роботи над модою  $TE_{11}$  при  $H_{\parallel} = 0$  Е. Як і у випадку гібридного ЛВЕ, робота над цією модою багато більша, ніж над іншими модами. Бачимо, що величина роботи для класичного ЛВЕ має той самий порядок, що і в нерезонансному випадку гібридного. Однак у резонансному випадку останнього робота на порядок більша за класичний ЛВЕ. У класичному ЛВЕ частота підсилення залежить лише від початкової швидкості та геометрії системи, а в гібридному – ще й від поздовжнього магнітного поля, що дає змогу значно точніше змінювати частоту підсилення.

Чисельні розрахунки проводилися також для прямокутного хвилеводу. Результати в роботі не наводяться, але зазначимо, що в прямокутному хвилеводі неможлива реалізація одномодового режиму. У цьому хвилеводі робота над  $4 \div 6$  власними модами має однаковий порядок величини.

У статті обчислена середня робота точкового заряду над власними модами круглого хвилеводу, траєкторія його руху формується статичними магнітними полями гібридного ЛВЕ. Періодичний характер процесу взаємодії заряду з хвилеводними модами дає змогу відшукати такі умови, при яких середня робота не дорівнює нулеві для будь-якого часу взаємодії. Ці умови називаються синхронізмом і дають змогу говорити про те, що в системі можливе підсилення [16].

Умови синхронізму зв'язують початкову швидкість заряду, величину поздовжнього магнітного поля і частоту підсилення хвилеводної моди. Частота підсилення є узагальненням класичного виразу для вільного простору. Також сформульовані умови, при яких рух заряду в поперечному перерізі хвилеводу відбувається в максимумі електричного поля  $TE_{0q}$  хвилеводної моди, що забезпечує додаткове збільшення ефекту підсилення моди. У випадку малого поздовжнього магнітного поля вираз для оптимальної частоти і значення роботи отримані аналітично. У круглому хвилеводі робота над однією із мод завжди значно більша, ніж над іншими, тому можна стверджувати про одномодовий режим підсилення. Зроблено порівняння роботи заряду над модами круглого хвилеводу для класичного і гібридного ЛВЕ.

Однієї з задач, що безпосередньо впливають з отриманих результатів, є задача про самоузгоджене збудження циліндричного хвилеводу електронним пучком у гібридному ЛВЕ. Зокрема, ґрунтуючись на самоузгодженій теорії збудження хвилеводів [16], окрім отриманої умови синхронізму, потрібно вивчити умови фазування, які б ураховували зворотну дію електромагнітного поля мод на рух пучка.

---

1. Балакирев В.А., Онищенко И.Н., Сидоренко Д.Ю., Сотников Г.В. Возбуждение электромагнитных полей релятивистским электронным сгустком в полуграниченном волноводе // Электромагнитные явления. 2001. Т. 2. № 1(5). С. 37–61.
2. Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М.: Сов. радио, 1970. 399 с.
3. Генераторы когерентного излучения на свободных электронах: Сб. статей. Под ред. А.А. Рухадзе. М.: Мир, 1983. 282 с.
4. Гинзбург Н.С., Розенталь Р.М., Песков Н.Ю. и др. Моделирование планарного ЛСЭ-усилителя с ленточным релятивистским электронным пучком // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 12. С. 58–61.
5. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988. 368 с.
6. Ефимов Б.П., Ильенко К., Яценко Т.Ю., Горяшко В.А. Теоретическая модель и экспериментальное наблюдение резонансной генерации лазера на свободных электронах // Радиофизика и радиоастрономия. 2003. Т. 8. № 2. С. 190–198.
7. Ковалев Н.Ф., Петелин М.И. Селекция мод в высокочастотных релятивистских электронных генераторах с распределенным взаимодействием // Релятивистская высокочастотная электроника “Проблемы повышения мощности и частоты излучения”, Горький, Вып. 2. 1998. 273 с.
8. Косевич А.М., Ковалев А.С. Введение в нелинейную физическую механику. К.: Наук. думка, 1989. 304 с.
9. Лебедев И.В. Техника и приборы СВЧ. М.: Высшая школа, 1970. 440 с.
10. Маршал Т.С. Лазеры на свободных электронах. М.: Мир, 1987. 240 с.
11. Никитин М.М., Эпп В.Я. Ондюляторное излучение. М.: Энергоатом-издат, 1988. 152 с.
12. Amir A., Boscolo I., Elias L. Spontaneous emission in the waveguide free-electron laser // Phys. Rev. A. 1985. Vol. 32. №. 5. P. 2864–2878.
13. Balkcum A.J., McDermott D.B., Phillips R.M. et al. 250-MW X-band  $TE_{01}$  ubitron using a coaxial PPM wiggler // IEEE Trans. Plasma Sci. 1996. Vol. 24. №. 3. P. 802–807.
14. Balkcum A.J., McDermott D.B., Phillips R.M. et al. 250-MW X-band  $TE_{01}$  ubitron using a coaxial PPM wigler // IEEE Trans. Plasma Sci. 1996. Vol. 24. №. 3. P. 802–807.
15. Colson W.B. One-body electron dynamics in a free electron laser // Phys. Lett. A. 1977. Vol. 64. №. 2. P. 190–192.
16. Yefimov B., Ilyenko K., Yatsenko T., Goryashko V. Resonant weakly relativistic FEL radiation in a loaded waveguide. The 28th International conference on infrared and millimeter waves. (Otsu, Japan). Conference Digest, 2003. P. 145–146.
17. Sakamoto K., Kishimoto Y., Kawasaki S., Musyoki S. et al. Beam divergence with harmonic gyroresonance in focusing wiggler and axial field // Phys. Rev. Lett.. 1993. Vol. 70. №. 4. P. 441–444.

## WAVEGUIDE FREE ELECTRON LASER

V. Goryashko<sup>1</sup>, K. Ilyenko<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Kharkiv National University  
Maidan Svobody 4, 61077 Kharkiv, Ukraine  
e-mail: vitgor@ire.kharkov.ua*

<sup>2</sup>*Institute for Radiophysics and Electronics, NAS of Ukraine  
12 Acad. Proskura Street, 61085 Kharkiv, Ukraine  
e-mail: kost@ire.kharkov.ua*

We studied the possibility of amplification of TE-eigenmodes of a semi-finite cylindrical waveguide by a point-like relativistic electron bunch. The bunch trajectory is assumed to be formed by static transversal and longitudinal homogeneous (guide) magnetic fields of a linear undulator. The amplification is analyzed on the basis of non-linear single-particle equations of motion of the bunch, which solutions are found by an “improved” expansion in the asymptotic series. An existence of a set of “internal” trajectory resonances – the kinetic energy redistribution between translational and rotational degrees of freedom – follows from the solutions of the equations of motion. Such resonances lead to the rise of amplification coefficients of waveguide modes, which are estimated analytically and calculated numerically.

*Key words:* hybrid free electron laser, circular waveguide, amplification frequency.

Стаття надійшла до редколегії 19.05.2004

Прийнята до друку 21.11.2005