

УДК 621.385.6
PACS number(s): 84.30.Jc

ОБЧИСЛЕННЯ ПОТЕНЦІАЛУ, СТВОРЕНОГО ЕЛЕКТРИЧНИМ ЗАРЯДОМ У ЦИЛІНДРИЧНІЙ КАМЕРІ ДРЕЙФУ

Г. Горбик^{1,2}, К. Ільєнко¹

¹Інститут радіофізики та електроніки ім. О.Я. Усикова НАН України
вул. Акад. Проскури, 12, 61085 Харків,
e-mail: kost@ire.kharkov.ua

²Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна
м. Свободи, 4, 61077 Харків,

Використовуючи кулонівське калібрування, методом функції Гріна розраховано розподіл скалярного потенціалу, який створюється точковим зарядом, що рухається довільно в циліндричній камері дрейфу. Отримано два еквівалентні аналітичні вирази для потенціалу та з'ясовано їхню придатність для чисельного моделювання методом великих частинок.

Ключові слова: функція Гріна, кулонівське калібрування.

Першочерговим питанням, яке виникає під час розгляду динаміки пучків заряджених частинок, що рухаються у зовнішніх та власних електромагнітних полях в спрямовувальних хвильоводних структурах, є з'ясування їхніх рівноважних конфігурацій. Для аксіально-симетричних пучків, вісь яких збігається з віссю циліндричної камери дрейфу, цю задачу досить легко вирішити [1–3]. Завдяки зазначеній симетрії в цих роботах тривимірну задачу вдається звести до двовимірної та одержати аналітичні рішення. У деяких випадках використання конформних перетворень та врахування специфічної симетрії допомагає розв'язку такої задачі і для пучків, вісь яких не збігається з віссю симетрії спрямованої структури або камери дрейфу [4]. Але такі методи не можуть бути узагальнені на випадок пучків, що рухаються у складних електромагнітних полях та не мають будь-якої симетричної чи періодичної конфігурації. Таку динаміку заряджених пучків зазвичай аналізують у так званому параксіальному наближенні або методом прямого чисельного рішення системи рівнянь Максвелла та руху для так званих великих заряджених частинок [5]. За таких розрахунків потрібно окремо враховувати усі сили, які діють на заряд, що рухається в камері дрейфу. Зокрема важливо знати силу, яка діє на заряд, що рухається, з боку наведених ним на стінках камери дрейфу поверхневих зарядів [6].

Метою статті є визначення аналітичного виразу для просторового розподілу скалярного потенціалу, утвореного електроном, що рухається, в циліндричній камері дрейфу, а також чисельний аналіз отриманих результатів.

У нерелятивістському та слабкорелятивістському наближенні, коли можна знехтувати власним магнітним полем зарядженого пучка, скалярний потенціал

задає основний (квазіелектростатичний) внесок у взаємодію заряджених частинок між собою та зі стінками камери дрейфу [7]. У цьому наближенні електричне поле задається лише у вигляді скалярного потенціалу $\varphi(t, \vec{x})$, який в кулонівській калібровці ($\text{div} \vec{A} = 0$, $\vec{A}(t, \vec{x})$ – векторний потенціал) визначають за допомогою рівняння Пуасона:

$$\Delta \varphi = -4\pi\rho, \quad (1)$$

де $\rho(t, \vec{x})$ – густина заряду. Відповідні граничні умови мають вигляд:

$$\varphi|_{\Gamma} = 0 \text{ та } \varphi|_{|z-\tilde{z}| \rightarrow \pm\infty} = 0, \quad (2)$$

де Γ – внутрішня поверхня циліндричної камери дрейфу, а \tilde{z} – миттєве місце знаходження заряду, що утворює розподіл скалярного потенціалу φ . Стінки циліндричної камери дрейфу будемо вважати ідеально провідними та знехтуємо впливом торцевих стінок циліндра, приймаючи вважаючи його як нескінченний.

Використання кулонівського калібрування забезпечує просту форму рівняння (1), яке записують в ній так, як і в електростатиці. У цьому випадку час записуємо у рівняння (1) лише як параметр, що спрощує всі розрахунки з наявністю електричного поля, обчислене за скалярним потенціалом φ .

Потенціал, утворений у циліндричній камері дрейфу розподілом заряду заданої густини $\rho(t, \vec{x})$, визначають згортокою

$$\varphi(t, \vec{x}) = \int_{V'} \rho(t, \vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}') d^3 \vec{x}', \quad (3)$$

де $G(\vec{x}; \vec{x}')$ є функцією Гріна рівняння Пуасона (1). Наприклад, електрон з густиною заряду $\rho(t, \vec{x}) = -|e| \delta(\vec{x} - \vec{x}(t))$ створює у камері дрейфу розподіл скалярного потенціалу:

$$\varphi(t, \vec{x}) = -|e| G(\vec{x}, \vec{x}(t)), \quad (4)$$

де $|e|$ – абсолютне значення заряду, а координати з тильдою відповідають місцю знаходження електрона в момент часу t .

Виділення особливості функції Гріна. Рівняння для $G(\vec{x}; \vec{x}') = \equiv G(\rho, \phi, z; \rho', \phi', z')$ у безрозмірних циліндричних координатах $\xi = \rho/a$, ϕ та $\zeta = z/a$ (a – радіус камери дрейфу) має вигляд:

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} G \right) + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} G + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} G = \frac{-4\pi}{a\xi} \delta(\xi - \xi') \delta(\phi - \phi') \delta(\zeta - \zeta') \quad (5)$$

з відповідними граничними умовами

$$G|_{\xi=1} = 0 \text{ та } G|_{\zeta \rightarrow \pm\infty} = 0. \quad (6)$$

Штриховані координати відповідають місцю розташування точкового одиничного заряду. Рішення рівняння (5) шукатимемо шляхом розкладення $G(\vec{x}; \vec{x}')$ за власними функціями поперечної (тобто обмеженої) частини оператора Лапласа. Це дає змогу представити $G(\vec{x}; \vec{x}')$ у вигляді:

$$G(\vec{x}; \vec{x}') = \frac{G_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} G_n^1 \cos(n\phi) + G_n^2 \sin(n\phi), \quad (7)$$

$$\begin{Bmatrix} G_n^1 \\ G_n^2 \end{Bmatrix} = \sum_{s=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} C_{ns}^1 \\ C_{ns}^2 \end{Bmatrix} J_n(v_{ns}\xi), \quad (8)$$

де C_{ns}^1 та C_{ns}^2 є функціями координати ζ , які задовольняють рівняння:

$$-v_{ns}^2 \begin{Bmatrix} C_{ns}^1 \\ C_{ns}^2 \end{Bmatrix} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \begin{Bmatrix} C_{ns}^1 \\ C_{ns}^2 \end{Bmatrix} = \frac{-8}{a} \begin{Bmatrix} \cos(n\phi') \\ \sin(n\phi') \end{Bmatrix} J_n(v_{ns}\xi') \delta(\zeta - \zeta'). \quad (9)$$

Користуючись граничними умовами (6) отримуємо остаточний вираз для функції Гріна:

$$\begin{aligned} G(\xi, \phi, \zeta, \vec{x}') &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2}{av_{0s}} e^{-|\zeta - \zeta'|v_{0s}} \frac{J_0(v_{0s}\xi')J_0(v_{0s}\xi)}{J_1^2(v_{0s})} + \\ &+ \sum_{n,s=1}^{\infty} \frac{4}{av_{ns}} e^{-|\zeta - \zeta'|v_{ns}} \frac{J_n(v_{ns}\xi')J_n(v_{ns}\xi)}{J_{n+1}^2(v_{ns})} \cos(n(\phi - \phi')). \end{aligned} \quad (10)$$

На близьких відстанях від місця розташування заряду \vec{x}' асимптотика функції $G(\vec{x}; \vec{x}')$ має вигляд:

$$G|_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}'} \rightarrow \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (11)$$

У [7] показано, що кулонівська взаємодія електронів має найбільший вплив на відстанях порядку довжини хвилі, що генерується або підсилюється у хвилеводі. У діапазоні міліметрових та субміліметрових хвиль ця відстань набагато менша за типові радіуси хвилеводів, що, зазвичай, використовуються в генераторах та підсилювачах типу мазеру на циклотронному резонансі та лазера на вільних електронах. Це свідчить про те, що у чисельних розрахунках необхідно розраховувати розподіл скалярного потенціалу на дуже близьких відстанях від заряджених частинок в сильнострумових пучках, де основний внесок саме й полягає в асимптотиці (11). Через це відшукаємо рішення для $G(\vec{x}; \vec{x}')$ у вигляді:

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = w(\vec{x}, \vec{x}') + \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (12)$$

де $w(\vec{x}, \vec{x}')$ – гармонічна функція, що задовольняє рівняння Лапласа:

$$\Delta w(\vec{x}, \vec{x}') = 0 \quad (13)$$

з граничними умовами, що витікають із умов (6):

$$w|_{\xi=1} = -\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}|_{\xi=1} \quad \text{та} \quad w|_{\zeta \rightarrow \pm\infty} = 0. \quad (14)$$

Зазвичай так відшукують рішення першої та другої крайових задач рівняння Пуасона [8]. Вигляд $w(\vec{x}, \vec{x}')$ залежить лише від геометрії граничної поверхні області. У випадку достатньо простих тривимірних об'єктів (куля, нескінчений плоский шар) $w(\vec{x}, \vec{x}')$ методом дзеркальних зображень легко відшукати. Але цей метод непридатний вже для випадку нескінченного циліндричного хвилеводу (методами диференціальної геометрії можна довести, що дзеркальне зображення

точкового заряду всередині циліндра є неточковим об'єктом). Скористаймося для функції $w(\vec{x}, \vec{x}')$ основною інтегральною формулою Гріна [8]:

$$w(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi} \iint_{S''} \left[\frac{1}{|\vec{x}' - \vec{x}''|} \frac{\partial}{\partial n''} w(\vec{x}'', \vec{x}') - w(\vec{x}'', \vec{x}') \frac{\partial}{\partial n''} \frac{1}{|\vec{x}' - \vec{x}''|} \right] dS'' - \frac{1}{4\pi} \iiint_{V''} \frac{\Delta w(\vec{x}'', \vec{x}')}{|\vec{x}' - \vec{x}''|} dV'', \quad (15)$$

де $\partial/\partial n''$ – нормальна компонента градієнта функції відносно поверхні Γ циліндра. Користуючись (12), отримуємо:

$$\frac{\partial w(\vec{x}'', \vec{x}')}{\partial n''} = \frac{\partial G(\vec{x}'', \vec{x}')}{\partial n''} - \frac{\partial}{\partial n''} \frac{1}{|\vec{x}' - \vec{x}''|},$$

підставивши у (15) та врахувавши (13), маємо:

$$w(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi} \iint_{S''} \frac{1}{|\vec{x}' - \vec{x}''|} \frac{\partial G(\vec{x}'', \vec{x}')}{\partial n''} dS''. \quad (16)$$

З фізичного погляду (16) є складовою скалярного потенціалу у вільному просторі, утворену наведеним на стінці камери дрейфу поверхневим зарядом.

На перший погляд уявлення рішення (12) та (16) не є ліпшим від прямого розрахунку з застосуванням формули (10) (див. [6]), бо воно також потребує знання аналітичного виразу для $G(\vec{x}, \vec{x}')$. Але, як було зазначено, з метою пришвидшення чисельних розрахунків використання (12) є набагато зручнішим.

Чисельні розрахунки розподілу скалярного потенціалу, утвореного електроном у циліндричній камері дрейфу, проілюстровано на рис. 1. Показано розподіли потенціалу в різних перерізах $|\zeta - \tilde{\zeta}| = \text{const}$ для певних значень $|\phi - \tilde{\phi}| = \text{const}$; координати з тильдами позначають миттєве місцезнаходження електрона. Ряд (10) збігається дуже повільно на близьких відстанях від заряду $|\zeta - \tilde{\zeta}| < 0,02$, тому розрахувати з бажаною точністю скалярний потенціал на таких відстанях, використовуючи уявлення (10), майже неможливо. Наприклад, зазначимо, що кількість членів ряду, яку ми використовували для підрахунків, зазвичай дорівнювала за n до 450 та до 100 за s . Через це для відстаней вздовж осі $|\zeta - \tilde{\zeta}| < 0,02$ від заряду треба використовувати аналітичні вирази (12) та (16). Проте для відстаней $|\zeta - \tilde{\zeta}| > 0,03$ розрахунки за формулою (10) є швидшими за аналітичні вирази (12) та (16). Зазначимо, що абсолютна величина потенціалу дуже швидко знижується до нуля на відстанях $|\zeta - \tilde{\zeta}| \sim 1,5$, що підтверджує правильність припущення про відсутність торцевих стінок камери дрейфу (нескінченність циліндра), яке значно спрощує аналітичний вигляд виразу (10).

У статті одержано два аналітично рівнозначні вирази для розподілу скалярного потенціалу зарядженої частинки, що рухається довільно в нескінченній циліндричній камері дрейфу. Для нерелятивістських та слабкорелятивістських швидкостей заряджених частинок отримані вирази задають головний внесок до взаємодії зарядів між собою та з наведеними ними зарядами на стінках камери дрейфу. Скалярний потенціал і напруженість електричного поля, утворені частинкою у довільній точці, можна швидко обчислювати за формулою (10), окрім

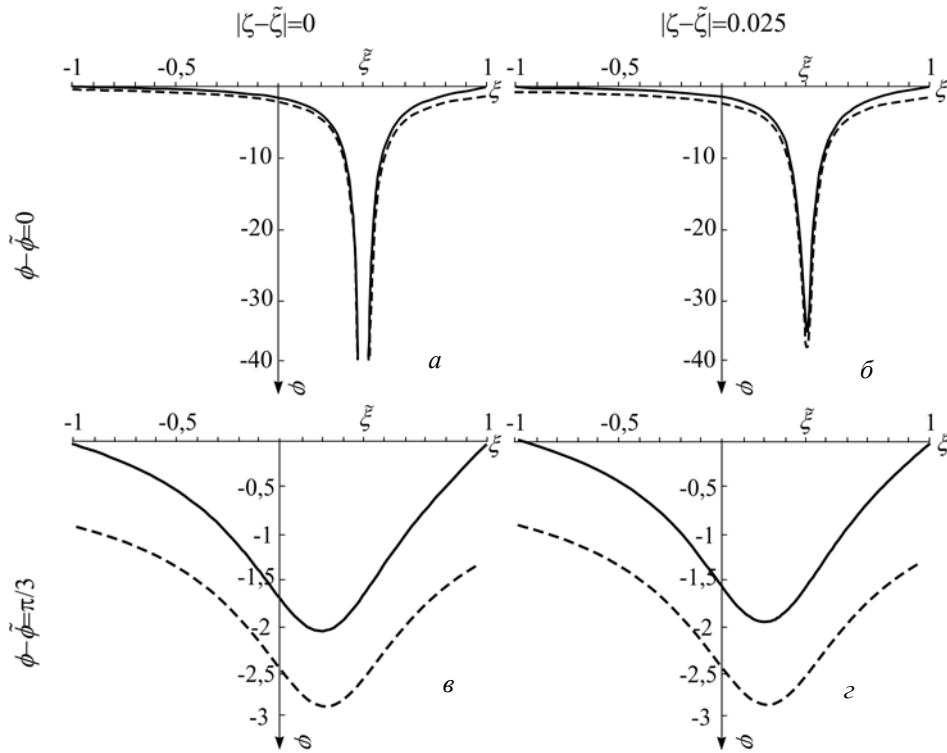


Рис. 1. Графіки розподілу скалярного потенціалу обчислені за формулами: *a, в* – (12) та (16) при $|\zeta - \tilde{\zeta}| = 0$; *б, г* – (10) при $|\zeta - \tilde{\zeta}| = 0,025$. Наведено перерізи двовимірних розподілів: *a, б* – $|\phi - \tilde{\phi}| = 0$; *в, г* – $|\phi - \tilde{\phi}| = \pi/3$. Значення розподілу потенціалу побудовано в одиницях $|e|/a$. Пунктирною лінією вказано розподіл потенціалу, що створювався б електроном у вільному просторі

відстаней $|z - \tilde{z}|$ порядку $0,02 a$ від місця знаходження заряду \tilde{z} (a – радіус камери дрейфу). Зазначимо, що за менших відстаней від частинки вирази (12) та (16) дають змогу значно швидше обчислити силу, що діє на заряд з боку наведених ним самим зарядів на стінках камери дрейфу (див. [6]). Врахування таких сил є важливим для обчислень за методом великих частинок динаміки сильнотісних криволінійних електронних пучків, що рухаються на великих відстанях ($\geq 0,6a$) від вісі циліндричної камери дрейфу.

1. *Зинченко Н.С.* Курс лекций по электронной оптике.—Харьков: Издательство Харьковского университета, 1961.
2. *O'Shea P.G., Welsh D., Destler W.W., Striffler C.D.* Intense relativistic electron beam propagation in evacuated drift tubes // *J. Appl. Phys.* 1984. Vol. 55. N 11. P. 3934–3939.
3. *Hartemann F.* Eulerian formalism of linear beam-wave interactions // *Phys. Rev. A.* 1990. Vol. 42. N 5. P. 2906–2914.
4. *Hess M., Chen C.* Equilibrium and confinement of bunched annular beams // *Phys. Plasmas.* 2002. Vol. 9. N 4. P. 1422–1430.
5. *Рамазанов Р.З., Сотников Г.В., Ткач Ю.В.* Мощный коаксиальный убитрон СВЧ-диапазона: моделирование методом частиц // *Электромагнитные явления.* 2004. Т. 4. №1. С. 75–84.
6. *Ильенко К.В., Горбык Г.М., Яценко Т.Ю.* К расчёту силы, действующей на движущийся заряд в цилиндрической камере дрейфа // *Радиофизика и электроника.* 2004. Т. 9. №3. С. 556–561.
7. *Гайдук В.И., Палатов К.И., Петров Д.М.* Физические основы электроники сверхвысоких частот. Москва: Советское радио, 1971.
8. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1972.

THE ELECTRON'S POTENTIAL DISTRIBUTION CALCULATIONS IN CYLINDRICAL DRIFT TUBE

G. Gorbyk^{1,2}, K. Pyenko¹

¹*A. Usikov Institute for Radiophysics and Electronics of NAS of Ukraine
Ak. Proskura Str., 12, UA-61085 Kharkiv, Ukraine
e-mail: kost@ire.kharkov.ua*

²*V. Karazin Kharkiv National University
Svobody Sq., 4, UA-61077 Kharkiv, Ukraine*

In the Coulomb gauge using the Green function's method we analytically calculated scalar potential distribution of a moving point charge in a cylindrical drift tube. We obtained two equivalent analytical expressions for potential distribution and analyzed their appropriateness for numerical calculation by a method of large particles.

Key words: Green function, Coulomb gauge.

Стаття надійшла до редколегії 26.05.2005

Прийнята до друку 26.02.2007