

УДК 539.171

PACS number(s): 42.65 Tg

РОЗСІЮВАННЯ СОЛІТОНІВ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ШРЕДІНГЕРА

Д. Левко

*Інститут Фізики НАН України, відділ газової електроніки
Проспект науки, 46, 03028 м. Київ, Україна
e-mail: unitedlevko@yandex.ru*

Отримано солітонні рішення збуреного нелінійного рівняння Шредінгера. З метою розв'язання рівняння використано метод квадратур. Показано, що солітонні рішення відповідають сепаратрисним рішенням нелінійного рівняння Шредінгера (НРШ). Досліджено залежність таких рішень від параметрів задачі. Проаналізовано кінцеві результати.

Ключові слова: нелінійне рівняння Шредінгера, солітон, сепаратриса.

Останнім часом дедалі частіше хвилі типу солітонів пропонують використовувати як носії інформації по оптичним волокнам (див. [1]–[5]). В оптичному волокні такі хвилі генеруються за рахунок компенсації двох механізмів: дисперсії, яка намагається розтягнути хвилю, та дифракції, яка намагається її перевернути.

Для моделювання розповсюдження солітонів по оптичним волокнам використовують нелінійне рівняння Шредінгера (далі НРШ). Це рівняння застосовують у різних галузях фізики, починаючи від теорії конденсату Бозе-Ейнштейна та закінчуючи раманівським розсіюванням світла у нелінійній оптиці.

В [1] розглянуто чисельний аналог НРШ у випадку одного просторового виміру для вивчення розсіювання дискретних солітонів у хвилеводі із свавільною нелінійністю. З'ясовано, що солітони можуть розсіюватись уздовж ґратки з невеличкими втратами енергії.

В [2]–[5] НРШ використано для дослідження поширення вихрових солітонів у випадку двохпросторового виміру. У всіх цих працях коефіцієнт заломлення середовища оптичного волокна описують як введення у праву частину звичайного НРШ додаткового члена.

В [6] розглянуто розсіювання солітонів потенціальною сходинкою. Обчислено коефіцієнти проходження та відбиття, отримано залежності цих величин від вхідних параметрів.

Недоліком [1]–[6] є використання чисельних методів для вивчення поведінки солітонів. У цій праці аналітично вивчено поведінку солітонів НРШ під дією потенціалу, який моделює періодичну ґратку. У статті розглянуто випадок одного просторового виміру.

Вихідне рівняння має вигляд:

$$iq_t + q_{xx} + \frac{q|q|^2}{1+S|q|^2} = -R(x)q,$$

де

$$R(x) = -\frac{\rho}{4}(1 - \cos(\Omega x)).$$

Цей потенціал описує коефіцієнт заломлення середовища оптичного волокна (для конденсату Бозе–Ейнштейна цей потенціал використовується для його затримання).

Тут ρ – глибина періодичної частини ґратки, Ω – частота повторення вузлів ґратки.

Насамперед, розв'яжемо допоміжну задачу – НРШ із свавільною нелінійністю без правої частини:

$$iq_t + q_{xx} + \frac{q|q|^2}{1+S|q|^2} = 0. \quad (1)$$

Це рівняння розв'яжемо методом квадратур (див. [7]–[9]). Рішення шукаємо у вигляді:

$$q(t, x) = y(z) \cdot e^{i(pz + t\omega)}, \quad (2)$$

де $z = x - Vt$ – це спізнююча координата, $p = \frac{V}{2}$, ω – частота.

Тоді отримуємо таке рівняння

$$y_{zz} = -\frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (3)$$

де ефективний потенціал визначається співвідношенням:

$$U = -2 \int F(y') y' dy' + E_0 y^2, \quad (4)$$

де

$$F(y) = \frac{|y|^2}{1+S|y|^2},$$

а $y(z)$ – дійсна функція.

Відшукуємо ефективний потенціал:

$$U(y) = \left(E_0 - \frac{1}{S} \right) y^2 + \frac{1}{S^2} \ln(1 + S y^2), \quad (5)$$

$$E_0 = p^2 - \omega,$$

$$U'(0) = 0, \quad U''(y) > 0, \quad U'(y) < \infty.$$

Величина E_0 є константою інтегрування (енергією).

У такому випадку рішення диференційного рівняння визначають за допомогою параметрів E_0 і E .

Із (3) отримуємо:

$$z - z_0 = \pm \int \frac{dy}{\sqrt{E - U(y)}}. \quad (6)$$

Отже, задача звелася до задачі обчислення інтеграла у правій частині.

Будемо розглядати сепаратрисні рішення. Такі рішення описують клас відокремлених хвиль ([7]). Розглянемо спочатку випадок $E_0 = 0$ та $E = 0$.

У разі великих z потенціал (5) можна моделювати наступним потенціалом:

$$\tilde{U}(y) = -Cy^2, \quad (7)$$

(не треба плутати введення такого потенціалу з НРШ з кубічною нелінійністю, котре розв'язують методом оберненої задачі), де стала $C > 0$ визначається сталими, які входять у (5).

Отримуємо таке рішення:

$$y(z) = e^{(z - z_0)\sqrt{C}}. \quad (8)$$

Бачимо, що під час наближення координати до нескінченності, рішення стає супуручливим. Отже, розглянуто випадок, коли $E_0 = 0$, не має фізичного змісту.

Розглянемо тепер випадок, коли $E_0 > 0$. Моделюючий потенціал має вигляд:

$$\tilde{U}(y) = -C_1 y^2. \quad (9)$$

Цей вираз для потенціалу було знайдено у порівнянні графіків для вихідного потенціалу та потенціалу (9) (див. рис. 1, 2). Сталі в останньому рівнянні як і раніше визначаються сталими E_0 і S .

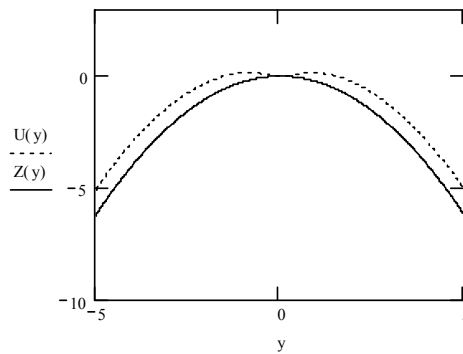


Рис. 1. Моделюючий потенціал на малих відстанях

На рис. 1 показано порівняння моделюючого потенціалу (суцільна лінія) та потенціалу (5) (пунктирна лінія) на малих відстанях.

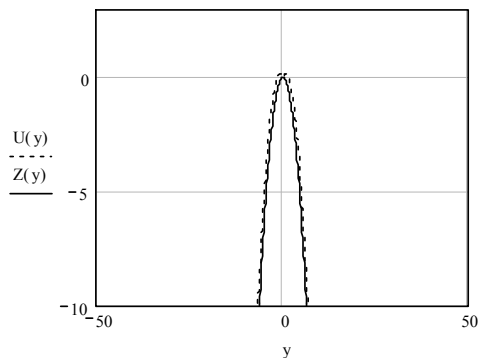


Рис. 2. Моделюючий потенціал на великих відстанях

На рис. 2 показано порівняння моделюючого потенціалу та потенціалу (5) на великих відстанях. Прості обчислення дають змогу виявити, що значення потенціалів, наприклад при $z = 30$, збігаються з точністю до 0,01.

Солітонні рішення відповідають руху зображувальної точки на фазовій площині між точкою зупинки (це положення, яке зображальна точка досягає за кінцевий час) та точкою обернення (це положення, яке зображальна точка не досягає за кінцевий час).

У цьому випадку рішення таке:

$$y(z) = \sqrt{\frac{E}{C_1}} \cdot \sin \sqrt{C_1} (z - z_0). \quad (10)$$

Кінцевий вираз має вигляд

$$q(z, t) = \sqrt{\frac{E}{C_1}} \cdot \sin \sqrt{C_1} (z - z_0) \cdot e^{i(\omega t + pz)}. \quad (11)$$

На рис. 3 наведено фазовий портрет сепаратрисних рішень НРШ (1).

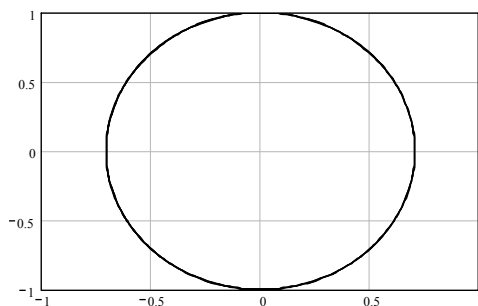


Рис. 3. Фазовий портрет сепаратрисних рішень

Тепер розглянемо НРШ із правою частиною. Розглянемо випадок повільних солітонів. Тоді, шукаючи рішення у вигляді (2), отримаємо рівняння Хілла:

$$y_{zz} + (\lambda + \mu \cdot \cos(\Omega z))y = 0, \quad (12)$$

в котрому

$$\lambda = \frac{\rho}{4} - C_1,$$

$$\mu = \frac{\rho}{4}.$$

Тут маємо випадок, коли $\lambda > 0$, тоді як в оберненому випадку отримаємо не фізичні рішення, які на нескінченності розходяться.

Далі обчислимо величину μ малим параметром. Будемо шукати рішення методом малого параметра ([8]):

$$y(z) = y_0 + \mu \cdot y_1 + \dots$$

Використовуючи (12), отримаємо систему рівнянь для пошуку нульового та першого наближень

$$\begin{cases} y_{0zz} + \lambda \cdot y_0 = 0, \\ y_{1zz} + \lambda \cdot y_1 = y_0 \cos(\Omega z) \end{cases}, \quad (13)$$

із початковими умовами

$$y_0(0) = 0, \quad y_0'(0) = 1, \quad (14)$$

$$y_1(0) = y_1'(0) = 0$$

Кінцевий набуде вигляду:

$$\begin{aligned} y(z) = \sin(\sqrt{\lambda}z) + \mu \frac{\Omega^2 - 2\lambda}{\Omega\sqrt{\lambda}(\Omega^2 - 4\lambda)} \sin(\sqrt{\lambda}z) + \mu \frac{1}{2\Omega(\Omega + 2\sqrt{\lambda})} \sin(\Omega + \sqrt{\lambda})z + \\ + \mu \frac{1}{2\Omega(\Omega - 2\sqrt{\lambda})} \sin(\Omega - \sqrt{\lambda})z. \end{aligned} \quad (15)$$

Бачимо, що вираз (15) у нульовому наближенні збігається із рішенням (10) невимушеного рівняння. Вираз (15) досить точно описує рішення рівняння Хілла (15), що підтверджується чисельним моделюванням.

Отже, у статті було розглянуто нелінійне рівняння Шредінгера із задовільною нелінійністю та із правою частиною. Це рівняння розв'язане методом квадратур та отримано рівняння для хвиль на великих відстанях від початку координат.

Із (15) робимо висновок, що третій та четвертий доданок описують хвилю, яка пройшла та відбилась від потенціалу відповідно. Перший доданок – це хвиля, яка була спочатку, а другий – хвиля, яка потрапила на потенціал на великій відстані. Якщо накласти додаткові умови на параметри λ та μ , то отримаємо таку ж хвилю, яка була спочатку.

Якщо нормувати множники перед синусами у третьому та четвертому доданках на множник перед другим доданком (або на одиницю за додаткових умов, накладених на параметри), то отримаємо із рівності одиниці суми коефіцієнтів проходження та відбиття, що хвилі розповсюджуються із втратами енергії.

Отже можна зробити висновок, що хоча використаний метод і не дозволяє описувати взаємодію двох та більше солітонів, він дозволяє зрозуміти поведінку хвиль при взаємодії із потенціальною стінкою.

1. Cuevas J., Eilbeck J.C. Discrete soliton collisions in a waveguide array with saturable nonlinearity // arXiv: nlin. PS / 0501050 2005. Vol. 2,
2. Xu Z. et al. Multicolor vortex solitons in two-dimensional photonic lattices // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 71. 016616.
3. Fleischer J.W. et al. Observation of Vortex-Ring “Discrete” solitons in 2D photonic lattices // Phys. Rev. Lett. Vol. 92. N 12. 123904.
4. Bartal G. et al. Observation of second-band vortex solitons in 2D photonic lattices // Phys. Rev. Lett. Vol. 95. 053904.
5. Kartashov Y.V. et al. Stable ring-profile vortex solitons in Bessel optical lattices // Phys. Rev. Lett. Vol. 94. 043902.
6. Sakaguchi H., Tamura M. Scattering of solitons and dark solitons by potential walls in the Nonlinear Schrödinger Equation // arXiv: nlin. PS / 0410060. 2004. Vol. 1. N 27.
7. Баскаран Д. та ін. О деяких солітонних рішеннях рівнянь Шредінгера із сингулярною нелінійністю // Вісн. МУ. Серія 3. Фізика, астрономія. 2000. № 3. С. 3–6.
8. Корнієнко А.Г., Френкін А.Р., Чижов Г.А. Класифікація рішень нелінійних рівнянь типу Шредінгера спеціального виду // Вісн. МУ. Серія 3. Фізика, астрономія. 1997. № 5. С. 10–13.
9. Френкін А.Р. О залежності особливих рішень одновимірних нелінійних рівнянь типу Шредінгера від параметрів задачі // Вісн. МУ. Серія 3. Фізика, астрономія. 1999. № 2. С. 9–12.

SCATTERING OF NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION'S SOLITONS

D. Levko

*Institute of Physics NAS of Ukraine, department of gas electronics
Prospekt Nauki, 46, 03028 Kiev, Ukraine
e-mail: unitedlevko@yandex.ru*

The soliton solutions of perturbation nonlinear Schrödinger equation are received. For the solving of equation is used the quadratures method. That the soliton solutions are correspond the separatrix solutions are shown. The dependence of such solutions from problem's parameters are investigated. The total results are analyzed.

Key words: nonlinear Schrödinger equation, soliton, separatrix.

Стаття надійшла до редколегії 17.05.2006
Прийнята до друку 09.06.2008