ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія фізична. 2008. Вип.41. С.125-130 Ser.Physic. 2008. № 41. P.125-130

УДК 621.372.413
PACS: 03.50 De; 11.10-z, 42.60 Da

ВЛАСНІ ЧАСТОТИ ПІВЦИЛІНДРИЧНОГО ДІЕЛЕКТРИЧНОГО РЕЗОНАТОРА З ЦИЛІНДРИЧНОЮ НЕОДНОРІДНІСТЮ

Ю. Прокопенко, Ю. Філіпов, І. Шипілова

Інститут радіофізики та електроніки імені О. Я. Усикова НАН України
відділ фізики твердого тіла
вул. Ак. Проскури, 12, 61085 Харків, Україна
e-mail: shipilova@ire.kharkov.ua

Досліджено півциліндричний діелектричний резонатор з циліндричною діелектричною неоднорідністю. Проаналізовано вимоги, яким має відповідати поле власних коливань резонатора. Запропоновано вирази для визначення компонентів електромагнітного поля аксіально-однорідного власного коливання резонатора. Отримано характеристичне рівняння, розв’язки якого визначають власні частоти резонатора. Такий резонатор є перспективним для вимірювання діелектричних властивостей речовин, які займають малі об’єми.

Ключові слова: діелектричний резонатор, характеристичне рівняння, власні частоти резонатора.

У наукових джерелах був описаний півциліндричний квазіоптичний діелектричний резонатор з ідеально провідними плоскими поверхнями [1]. У такому резонаторі, розташованому в повітрі, енергія електромагнітного поля власного коливання типу “галереї, що шепоче” зосереджена біля бічної циліндричної поверхні з максимумом всередині діелектрика. Дослідження електрофізичних параметрів речовин свідчать про їхню взаємодію з електромагнітними полями. Виникає природне бажання помістити досліджувану речовину в максимум цього поля. Певні перспективи в області дослідження електрофізичних параметрів речовин має півциліндричний діелектричний резонатор з циліндричною неоднорідністю (рис. 1). Резонатор на торцях обмежений ідеально провідними поверхнями. Півциліндр і циліндрична неоднорідність виготовлені з ізотропних діелектриків із проникностями $\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + i\,\mathrm{tg}\delta_1$ і $\varepsilon_{1'} = \varepsilon_{1'}' + i\,\mathrm{tg}\delta_{1'}$ відповідно. Магнітні проникності речовин є μ_1 і $\mu_{1'}$. Резонаторна структура занурена в середовище з проникностями $\varepsilon_2 = \varepsilon_2' + i\,\mathrm{tg}\delta_2$ і μ_2.

Поздовжня вісь Z' циліндра з речовини, яка відрізняється від речовини півциліндра, спрямована паралельно до осі Z резонатора. Основи півциліндра і циліндричної неоднорідності розміщені в одних площинах, які є торцевими стінками резонатора. Радіус кривизни півциліндричної поверхні резонатора дорівнює ρ_0. Поздовжня вісь Z' циліндричної неоднорідності, діаметр якої $2\rho_{cl}'$, розташована на відстані ρ_c від осі Z резонатора і має координати (ρ_c, φ_c, z). Відстань між поверхнею півциліндра і центром неоднорідності не менша віж її радіуса, тобто $\rho_0 - \rho_c > \rho'_{cl}$. Керуючись геометричними міркуваннями, для досліджуваного резонатора азимутальний кут напрямку до центра внутрішнього циліндра φ_c задовольняє умову $\alpha_{cl} < \varphi_c < \pi - \alpha_{cl}$, де $2\alpha_{cl}$ – кут огляду циліндричної неоднорідності (рис. 2).

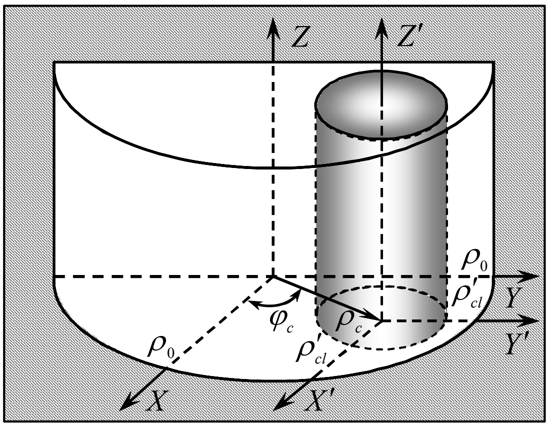

Рис. 1. Півциліндричний діелектричний резонатор з циліндричною неоднорідністю

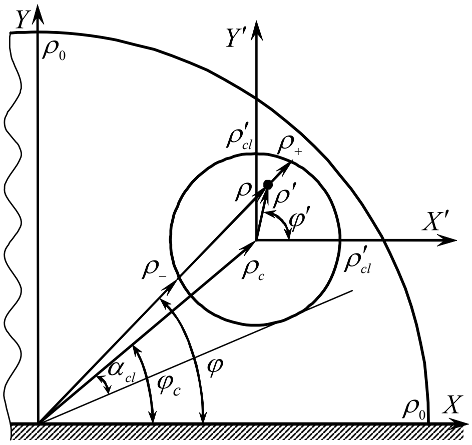

Рис. 2. Система координат півциліндричного діелектричного резонатора з циліндричною неоднорідністю

Проглядається дві можливості вибору системи координат у резонаторі: з початком на поздовжній осі циліндра (ρ, φ, z), з якого утворений півциліндричний резонатор, і з початком на осі циліндричної неоднорідності (ρ', φ', z'). Зв'язок між компонентами довільного вектора a, що подано в обох системах координат, виражений через матрицю якобіана переходу так:

$$\begin{pmatrix} a_\rho \\ a_\varphi \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\rho}{\partial\rho'} & \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial\varphi'} & 0 \\ \rho\dfrac{\partial\varphi}{\partial\rho'} & \dfrac{\rho}{\rho'}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\varphi'} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\rho'} \\ a_{\varphi'} \\ a_{z'} \end{pmatrix}.$$

З властивостей прямої і оберненої матриць якобіана переходу робимо висновок, що між системами (ρ , φ , z) і (ρ' , φ' , z') є функціональні зв'язки:

$$\rho'^2 + \rho_c\rho'\cos(\varphi_c - \varphi') = \rho^2 - \rho_c\rho\cos(\varphi_c - \varphi);\ \rho'\sin(\varphi_c - \varphi') = \rho\sin(\varphi_c - \varphi)$$

Поля власних коливань досліджуваної резонаторної структури визначаються розв'язками рівнянь Максвела. У циліндричній системі координат рівняння Максвела значно спрощуються у випадку аксіально-однорідних коливань ($\partial/\partial z \equiv 0$).

Розв'язки системи рівнянь Максвела у просторі півциліндра при $\rho \le \rho_0$ ($\nu = 1;1'$) мають задовольняти такі умови:

- поля в початках систем координат $\rho = 0$ і $\rho' = 0$ ($\rho = \rho_c$) є кінцевими;
- дотримано граничної умови на ідеально провідній плоскій поверхні за $\varphi = 0;\pi$;
- тангенціальні компоненти поля на поверхні циліндричної неоднорідності $\rho' = \rho'_{cl}$ (або $\rho = \rho_{cl}$) є безперервними.

Аксіальні компоненти поля власної $TM_{m\,s\,0}$ моди досліджуваної резонаторної структури усередині циліндричної неоднорідності мають вигляд:

$$E_{z1'} = A_{Em}\exp(-i\omega_p t)\sum_{m'=-\infty}^{+\infty}\frac{\Delta_B(\omega_p)}{\Delta_{m'}(\omega_p)}J_{m'}(\chi_{1'}\rho')\exp(im'\varphi');$$

$$E_{z1} = A_{Em}\exp(-i\omega_p t)\left[iJ_m(\chi_1\rho)\sin(m\varphi) + \sum_{m'=-\infty}^{+\infty}\frac{\Delta_D(\omega_p)}{\Delta_{m'}(\omega_p)}J_{m'}(\chi_1\rho')\exp(im'\varphi')\right];$$

$$E_{z2} = iA_{Em}\exp(-i\omega_p t)\frac{J_m(\chi_1\rho_0) - Q_{mm'}}{H_m^{(1)}(\chi_2\rho_0)}H_m^{(1)}(\chi_2\rho)\sin(m\varphi),$$

де $\Delta_{m'}(\omega_p) = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_{1'}}{\mu_{1'}}}\dfrac{J'_{m'}(\chi_{1'}\rho'_{cl})}{J_{m'}(\chi_{1'}\rho'_{cl})} - \sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\dfrac{J'_{m'}(\chi_1\rho'_{cl})}{J_{m'}(\chi_1\rho'_{cl})}$;

$$\Delta_B(\omega_p) = \frac{1}{J_{m'}(\chi_{1'}\rho'_{cl})}\left[G_{mm'} - F_{mm'}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\frac{J'_{m'}(\chi_1\rho'_{cl})}{J_{m'}(\chi_1\rho'_{cl})}\right];$$

$$G_{mm'} = \frac{i}{2\pi\mu_1}\int_0^{2\pi}\frac{1}{k_p\rho_{cl}}[J'_m(\chi_1\rho_{cl})\chi_1\left(\rho'_{cl} + \rho_c\cos(\varphi_c - \varphi')\right)\sin(m\varphi_{cl}) - \\ - \frac{m\rho_c}{\rho_{cl}}J_m(\chi_1\rho_{cl})\sin(\varphi_c - \varphi')\cos(m\varphi_{cl})]\exp(-im'\varphi')d\varphi';$$

$$F_{mm'}=\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}J_m(\chi_1\rho_{cl})\sin(m\varphi_{cl})\exp(-im'\varphi')d\varphi' ;$$

$$\Delta_D(\omega_p)=\frac{1}{J_{m'}(\chi_1\rho'_{cl})}\left[G_{mm'}-F_{mm'}\sqrt{\frac{\varepsilon_{1'}}{\mu_{1'}}}\frac{J'_{m'}(\chi_{1'}\rho'_{cl})}{J_{m'}(\chi_{1'}\rho'_{cl})}\right];$$

$$Q_{mm'}=\frac{2i}{\pi}\sum_{m'=-\infty}^{+\infty}\frac{\Delta_D(\omega_p)}{\Delta_{m'}(\omega_p)}\int_0^{\pi}J_{m'}(\chi_1\rho'_0)\sin(m\varphi)\exp(im'\varphi'_0)d\varphi ;$$

$\chi_\nu^2=\varepsilon_\nu\mu_\nu k_p^2$, $J_m(\chi_\nu\rho_\nu)$ і $N_m(\chi_\nu\rho_\nu)$ – циліндричні функції Беселя і Неймана, $H_m^{(1)}(\chi_2\rho)$ – циліндрична функція Ханкеля першого роду, $k_p=\omega_p/c$, ω_p – комплексна власна частота резонатора, A_{Em} – постійна величина, яка визначається умовами збудження. Штрих у циліндричних функцій позначає диференціювання за аргументом.

Поперечні компоненти поля власної $\mathrm{TM}_{m\,s\,0}$ моди резонатора виражені так:

$$H_{\rho 1'}=\frac{1}{\rho'}\left[\left(\rho-\rho_c\cos(\varphi_c-\varphi)\right)H_{\rho' 1'}+\rho_c\sin(\varphi_c-\varphi)H_{\varphi' 1'}\right]\exp(-i\omega_p t);$$

$$H_{\varphi 1'}=\frac{1}{\rho'}\left[\rho_c\sin(\varphi-\varphi_c)H_{\rho' 1'}+\left(\rho-\rho_c\cos(\varphi_c-\varphi)\right)H_{\varphi' 1'}\right]\exp(-i\omega_p t);$$

$$H_{\rho 1}=\frac{A_{Em}}{\mu_1 k_p\rho}\left[mJ_m(\chi_1\rho)\cos(m\varphi)+\sum_{m'=-\infty}^{+\infty}\frac{\Delta_D(\omega_p)}{\Delta_{m'}(\omega_p)}[i\chi_1 J'_{m'}(\chi_1\rho')\frac{\rho_c\rho\sin(\varphi_c-\varphi)}{\rho'}+\right.$$
$$\left.+m'J_{m'}(\chi_1\rho')\frac{\rho^2-\rho_c\rho\cos(\varphi_c-\varphi)}{\rho'^2}]\exp(im'\varphi')\right]\exp(-i\omega_p t);$$

$$H_{\varphi 1}=-\frac{A_{Em}}{\mu_1 k_p}\left[\chi_1 J'_m(\chi_1\rho)\sin(m\varphi)+\sum_{m'=-\infty}^{+\infty}\frac{\Delta_D(\omega_p)}{\Delta_{m'}(\omega_p)}[m'J_{m'}(\chi_1\rho')\frac{\rho_c\sin(\varphi_c-\varphi)}{\rho'^2}-\right.$$
$$\left.-i\chi_1 J'_{m'}(\chi_1\rho')\frac{\rho-\rho_c\cos(\varphi_c-\varphi)}{\rho'}]\exp(im'\varphi')\right]\exp(-i\omega_p t);$$

$$H_{\rho 2}=A_{Em}\frac{m}{\mu_2 k_p\rho}\frac{J_m(\chi_1\rho_0)-Q_{mm'}}{H_m^{(1)}(\chi_2\rho_0)}H_m^{(1)}(\chi_2\rho)\cos(m\varphi)\exp(-i\omega_p t);$$

$$H_{\varphi 2}=-A_{Em}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\frac{J_m(\chi_1\rho_0)-Q_{mm'}}{H_m^{(1)}(\chi_2\rho_0)}H_m^{(1)\prime}(\chi_2\rho)\sin(m\varphi)\exp(-i\omega_p t),$$

де
$$H_{\rho' 1'}=\frac{A_{Em}}{\mu_{1'}k_p\rho'}\sum_{m'=-\infty}^{+\infty}\frac{\Delta_B(\omega_p)}{\Delta_{m'}(\omega_p)}m'J_{m'}(\chi_{1'}\rho')\exp(im'\varphi');$$

$$H_{\varphi' 1'}=iA_{Em}\sqrt{\frac{\varepsilon_{1'}}{\mu_{1'}}}\sum_{m'=-\infty}^{+\infty}\frac{\Delta_B(\omega_p)}{\Delta_{m'}(\omega_p)}J'_{m'}(\chi_{1'}\rho')\exp(im'\varphi').$$

Задовольняючи граничні умови безперервності тангенціальних компонент поля на поверхні півциліндра $\rho=\rho_0$, одержуємо систему однорідних алгебричних рівнянь. Умова існування її нетривіальних розв'язків має вигляд характеристичного рівняння

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\frac{J'_m(\chi_1\rho_0)-W_{mm'}}{J_m(\chi_1\rho_0)-Q_{mm'}}=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\frac{H_m^{(1)'}(\chi_2\rho_0)}{H_m^{(1)}(\chi_2\rho_0)}, \quad (1)$$

розв'язки якого визначають комплексні власні частоти досліджуваної резонаторної структури з $\mathrm{TM}_{m\,s\,0}$ модами. Тут

$$W_{mm'}=\frac{2}{\pi}\sum_{m'=-\infty}^{+\infty}\frac{\Delta_D(\omega_p)}{\Delta_{m'}(\omega_p)}\int_0^{\pi}\left[\frac{im'}{\chi_1}\frac{\rho_c\sin(\varphi_c-\varphi)}{\rho_0'^2}J_{m'}(\chi_1\rho_0')+\right.$$

$$\left.+\frac{\rho_0-\rho_c\cos(\varphi_c-\varphi)}{\rho_0'}J'_{m'}(\chi_1\rho_0')\right]\sin(m\varphi)\exp(im'\varphi_0')d\varphi.$$

Отож, у роботі наведено результати електродинамічного аналізу півциліндричного діелектричного резонатора з циліндричною неоднорідністю. Показано, що власні частоти такого резонатора визначаються розв'язками характеристичного рівняння (1). Наявність ідеальної провідної поверхні $y=0$ зумовлює пропорційність компонент $E_{z\nu}\sim\sin(m\varphi)$ і $H_{z\nu}\sim\cos(m\varphi)$, що зумовлено виконанням граничних умов на поверхні ідеального провідника при $\varphi=0$ і $\varphi=\pi$.

Півциліндричний діелектричний резонатор з циліндричною неоднорідністю викликає зацікавленість для вимірювання діелектричних проникностей речовин, наприклад, які займають малі об'єми. Загалом властивості речовини, як з малими, так і з великими втратами, визначаються розв'язками рівняння (1) відносно діелектричної проникності неоднорідності $\varepsilon_{1'}$ на основі експериментально виміряних спектральних та енергетичних характеристик резонатора з $\mathrm{TM}_{m\,s\,0}$ модою за відомих діелектричних властивостей інших середовищ.

---

1. *Филиппов Ю. Ф., Харьковский С. Н.* Квазиоптический зеркальный диэлектрический резонатор // Квазиоптическая техника мм и субмм диапазонов волн. Харьков: Ин-т радиофизики и электроники АН УССР, 1989. С. 28–34.

EIGEN FREQUENCIES OF SEMI-CYLINDRICAL DIELECTRIC RESONATOR WITH CYLINDRICAL NON-UNIFORMITY

Yu. Prokopenko, Yu. Filipov , I. Shipilova

Usikov Institute of Radiophysics and Electronics
National Academy of Sciences of Ukraine
department of solid-state physics
12, Akademika Proskury, 61085 Kharkov, Ukraine
e-mail: shipilova@ire.kharkov.ua

A semi-cylindrical dielectric resonator with cylindrical non-uniformity was studied. The requirements for field of eigen oscillations are analyzed. The expressions for determination of electromagnetic field components for axial-homogeneous eigen oscillations of resonator are given. The characteristic equation was obtained to determine eigen frequencies of resonator. Such resonator is of interest for measurement of dielectric properties of substances, which are occupying small volumes.

Key words: dielectric resonator, characteristic equation, eigen frequencies of resonator.

Стаття надійшла до редколегії 17.05.2006
Прийнята до друку 09.06.2008