

УДК 519.622.2

## МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РЕЖИМІВ ВИСОКОДОБРОТНИХ РАДІОЕЛЕКТРОННИХ СХЕМ

**М. Баран**

*Львівський національний університет ім. І.Франка  
кафедра радіофізики  
вул. Ген. Тарнавського, 107, 79017 Львів, Україна  
e-mail: [bmo2@mail.ru](mailto:bmo2@mail.ru)*

Розглянуто найвідоміші методи чисельного розрахунку періодичних режимів високочастотних схем. Наведено методи та алгоритми прискореного пошуку цих режимів та результати застосування згаданих методів до моделювання тестових завдань. Зроблено порівняльний аналіз переваг та недоліків розглянутих методів.

*Ключові слова:* прискорений пошук, періодичний режим, матриця переходу стану, метод Ньютона, метод Ейпріла–Тріка, градієнтний метод, гомотопний процес.

Знаходження стаціонарного режиму – завдання, яке регулярно виникає під час моделювання багатьох пристроїв радіоелектроніки. Особливу складність становить пошук періодичних режимів у слабкодемпфованих високочастотних схемах, оскільки моделювання таких систем пов'язані зі значними затратами ресурсів комп'ютера. Якщо в системі наявні швидкозагасаючі перехідні процеси, то її стаціонарний режим можна розрахувати досить просто, але перехідні процеси більшості схем, які працюють у радіочастотному діапазоні, загасають вкрай повільно. У цих випадках важливо інтегрувати систему рівнянь впродовж тривалого перехідного процесу, що зумовлює величезні затрати процесорного часу.

Тому, впродовж останніх десятиліть, зусилля дослідників скеровані на розробку методів прогнозування початкових умов, які відповідають стаціонарному режиму математичної моделі слабкодемпфованої системи. Поряд з такими загальноновизнаними підходами до передбачення початкових умов, які відповідають стаціонарному режиму, як квазіньютонівські [1], градієнтні [2] та екстраполяційні [3] методи, останнім часом дедалі ширше використовують гомотопні процеси [5].

В ході досліджень було виявлено, що в системах моделювання, які використовують неявні чисельні методи, оптимальним є використання квазіньютонівських алгоритмів, оскільки для їхньої роботи можна залучити інформацію, отриману при інтегруванні рівнянь математичної моделі. Розглянемо детальніше квазіньютонівські методи, зокрема метод Ньютона та його модифікації.

Нехай систему рівнянь математичної моделі досліджуваного пристрою сформовано у нормальній формі Коші:

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (1)$$

де  $x$  і  $f$  –  $n$ -вимірні вектори;  $f$  – періодична неперервна функція від  $t$  з періодом  $T$ , яка має неперервну частинну похідну по  $x$ ,  $t \in [0; \infty]$ .

Позначимо  $w(t)$  як періодичний режим системи (1) з періодом  $T$ :  $w(t) = w(t+T)$ . Його відшукаємо, інтегруючи систему (1), впродовж періоду  $[0; T]$  з початковою умовою  $w(0)$ . Періодичний режим буде стаціонарним, якщо задовольняються граничні умови  $x(0) = x(T)$ . Отже:

$$x(T) = \int_0^T f(x, \tau) d\tau + x(0). \quad (2)$$

Введемо позначення:  $x_0 = x(0)$ .

Вираз (2) можна подати через відображення  $x_0 = T(x_0)$ . Тоді  $T(x_0) = \int_0^T f(x, \tau) d\tau + x_0$ ,

де  $x(t)$  задовольняє рівняння (1) при  $t \in [0; T]$ . Цю задачу можна розв'язати за допомогою методу стискаючого відображення:  $x_0^{i+1} = T(x_0^i)$ .

Оскільки функція  $f(x, t)$  є періодична за  $t$  з періодом  $T$ , то

$$x_0^{i+1} = x[(i+1)T] = \int_0^{(i+1)T} f(x, \tau) d\tau + x_0^0.$$

Це рівноцінно інтегруванню системи (1) впродовж відповідного числа періодів, доки реакція перехідного режиму не стане настільки малою, що нею можна буде знехтувати. Цей метод характеризується слабкою збіжністю, і, якщо його застосовувати до високочастотних схем, потребує великих затрат процесорного часу.

Алгоритм аналізу стаціонарного режиму за методом Ньютона. Ітерацію за Ньютоном для системи  $x_0 = T(x_0)$  подамо у вигляді

$$x_0^{i+1} = x_0^i - [I - T'(x_0^i)]^{-1} [x_0^i - T(x_0^i)], \quad (3)$$

де  $x_0$  – заданий початковий стан системи.

У виразі (3) прийняті позначення:  $T'(x_0^i) = \Phi(T, 0; x_0^i)$ ;  $\Phi(T, 0; x_0^i)$  – матриця переходу стану;  $I$  – одинична матриця;  $i$  – номер ітерації Ньютона.

Матриця переходу стану для цієї системи  $\Phi(t, 0) = P(t)e^{Qt}$ , де  $P(t) = P(t+T)$ ,  $P(0) = I_n$ . Можна показати, що  $(x^{m+1} - x^m) = e^{Qt}(x^m - x^{m-1})$ . За умови, що всі власні значення  $e^{Qt}$  за модулем менші за одиницю (власні значення  $Q$  мають від'ємні дійсні частини), система є асимптотично стійкою. Тому ітерації збігаються до періодичного розв'язку  $w(t)$ .

Якщо матриця  $[I - \Phi(T, 0)]$  не вироджена, то існує  $[I - \Phi(T, 0)]^{-1}$ . Беручи до уваги усе, що сказане вище, можна сформулювати такий алгоритм:

1. Для заданого початкового стану  $x_0^i$  обчислимо розв'язок рівняння (1):  $x^i(t, x_0^i)$ ,  $t \in [0; T]$ .
2. Обчислимо матрицю переходу стану  $\Phi(T, 0; x_0^i)$ .
3. Прийнемо  $x_0^{i+1} = y_0^i$ .
4. Якщо не виконуються умови  $\|x^{i+1}(T) - x_0^i\| < \varepsilon$ , і  $\|x^{i+1}(T) - x_0^i\| < \delta$ , де  $\delta$  і  $\varepsilon$  – довільні як завгодно малі величини, повернемося до п. 1, використовуючи як початкове наближення  $x_0^{i+1}$ .

Алгоритм Ейпріла–Тріка. Найвідомішим квазіньютонівським алгоритмом є алгоритм Ейпріла–Тріка [1], який, використовуючи результати прямого інтегрування рівнянь математичної моделі схеми, прогнозує вектор початкових умов, що

відповідають встановленому періодичному режиму. Прогноз виконується на основі ітераційного процесу:

$$x^{(m+1)} = x^{(m)} - [E - \Phi]^{-1} \cdot x_{\Delta}, \quad (4)$$

де  $E$  – одинична матриця;  $\Phi$  – матриця переходу стану;  $x_{\Delta}$  – різниця значення вектора стану на початку і в кінці одного періоду вхідного сигналу.

Порівняємо ефективність використання прогнозу (4), обчисленого на основі неявного методу Ейлера [6]:

$$x_{m+1} = x_m + h \cdot f(x_{m+1}, t_{m+1}). \quad (5)$$

Одну з модифікацій алгоритму Ейпріла–Тріка сформулюємо так:

1. Використовуючи задані початкові умови  $x_0^i$ , інтегруємо неявним методом Ейлера систему диференціальних рівнянь (1) математичної моделі високочастотної схеми протягом двох періодів вхідного сигналу.
2. На початку другого періоду запам'ятовуємо вектор змінних стану  $x_n$ .
3. Упродовж інтегрування системи (1) на цьому періоді формуємо матрицю переходу стану  $\Phi$ .
4. На початку третього періоду запам'ятовуємо вектор змінних стану  $x_k$ . Знаходимо різницю  $x_k - x_n = x_{\Delta}$ . Обчислюємо вектор нев'язки  $(E - \Phi)^{-1} x_{\Delta}$ .
5. Якщо норма вектора нев'язки зростає, прогноз є невдалим, тому повертаємося до початку другого періоду  $x = x_n$  і повторюємо процедуру починаючи з кроку 1 ( $x_0 = x_n$ ).
6. Якщо норма вектора нев'язки зменшується, робимо прогноз початкових умов, які відповідають встановленому режиму за методом Ейпріла–Тріка:  $x^{(k+1)} = x^{(k)} - (E - \Phi)^{-1} x_{\Delta}$ , де  $x^{(k)} = x_n$ ,  $E$  – одинична матриця.
7. Змінюємо вектор змінних стану  $x$  на вектор прогнозованих значень, інтегруємо систему диференціальних рівнянь протягом періоду і перевіряємо умову досягнення періодичності. Якщо на  $m$ -му періоді інтегрування норма вектора нев'язки стає меншою від заданої похибки – визначений режим досягнуто.

Приклад 1: Відшукаємо встановлений режим у високочастотному послідовному RLC-контурі (добротність – 100), на вході якого діє синусоїдний сигнал. Математичну модель контура представимо у вигляді такої системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{L} (\varepsilon_0 \sin(\omega t) - R x_1 - x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{C} x_1 \end{cases} \quad (6)$$

Обрано такі значення номіналів схеми:  $L=1$  мГн;  $C=0,1$  мкФ;  $R=1$  Ом;  $E_0=0,1$  В;  $f=16$  кГц;  $\omega = 2\pi \cdot f$ .

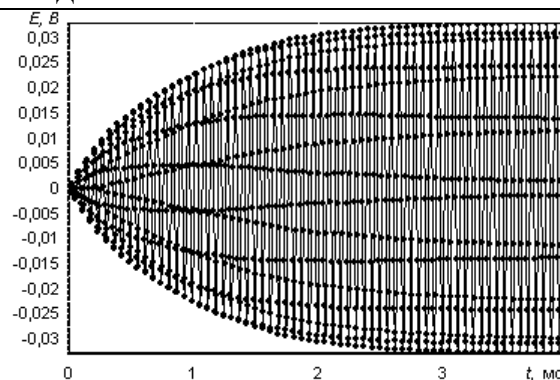


Рис. 1. Результати інтегрування рівнянь математичної моделі прикладу 1 без прискореного пошуку

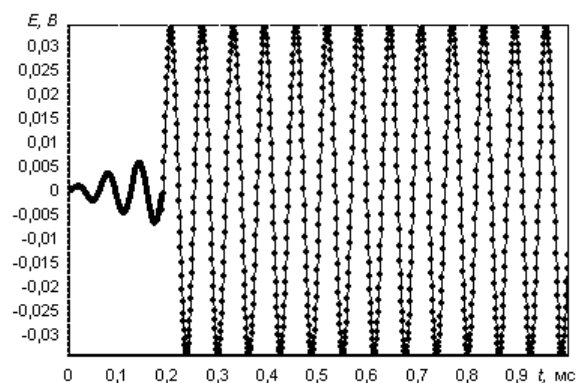


Рис. 2. Результати інтегрування рівнянь прикладу 1 із застосуванням алгоритму Ейпріла–Тріка

Гомотопний процес з узагальненими інверсіями. Гомотопний процес – це особливий підхід до чисельного знаходження періодичних відгуків нелінійних систем, при цьому базовий алгоритм – є однією з модифікацій методу Ейпріла–Тріка для неавтономних систем з відомим періодом, в якій прямі інверсії замінені на обернені. Для розрахунку за методом Ейпріла–Тріка розроблено єдиний підхід для знаходження періодичного розв’язку автономних і неавтономних систем.

Опишемо гомотопний процес з ітераціями Ньютона та узагальненими інверсіями [5]. Розглянемо математичну модель автономної системи (7)

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(x,t), & t \in (0,T) \\ x(0) = x(T) \end{cases}, \quad (7)$$

де  $x$  та  $f \in n$ -мірні вектори,  $f$  – неперервно диференційована, а період  $T$  – невідомий. Звичайно, функція  $f$  – нелінійна. У цьому випадку аналіз стаціонарного стану системи (7) полягає у визначенні невідомого періоду і періодичного відгуку системи.

Перетворимо систему (7) до форми (8) із виродженою матрицею Якобі. Нехай  $s = t/T$  і  $y(s) = x(T,s)$ , тоді:

$$\begin{cases} \frac{dz(s)}{ds} = g(z), & s \in (0,1) \\ z(0) = z(1) \end{cases} \quad (8)$$

Тут матриця Якобі буде вироджена для будь-яких значень  $z$ .

Для довільного значення  $z_0$ , яке приймають за початкові умови, відшукуємо розв'язок у вигляді траєкторії  $z(s)$ .

Матрицю Якобі для системи (8), або  $g(s)$  запишемо так:

$$\nabla_g(z) = \begin{bmatrix} T\nabla_f(y) & f(y) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

де  $\nabla_f(y)$  – це матриця Якобі від  $f(y)$ .

Алгоритм гомотопного процесу з узагальненими інверсіями:

Крок 0: дано  $z_{in,0}$ , визначимо  $z_{in}(0) = z_{in,0}$  та  $\lambda = 0$ ;

Крок 1: для  $l = 0, 1, \dots, L-1$ , виконуємо:

$$z_{in}^{(l+1)} = z_{in}^{(l)} - \nabla_G^+(z_{in}^{(l)}) \cdot (G(z_{in}^{(l)}) - (1-\lambda) \cdot G(z_{in,0})),$$

якщо  $\|z_{in}^{(l+1)} - z_{in}^{(l)}\| < \varepsilon$  то перейти до кроку 2;

Крок 2: встановлюємо  $\lambda = \lambda + \Delta\lambda$ , якщо  $\lambda > 1$ , то процес завершуємо; інакше встановлюємо  $z_{in}^{(0)} = z_{in}^{(L)}$  і переходимо до кроку 1.

Тут  $\lambda$  – параметр кроку,  $z_{in,0}$  – деяке задане початкове наближення,  $z_{in,0}$  – нульова точка,  $\nabla_G = \nabla_F - I_{n+1}$  – матриця Якобі для будь-якого фіксованого  $\lambda$ ,  $I_{n+1}$  матриця ідентичності,  $\Delta\lambda$  – довжина кроку на параметрі  $\lambda$  від 0 до 1,  $\varepsilon$  – значення точності для критерію зупинки процесу.

Варто зазначити, що без описаного вище алгоритму розрахований періодичний розв'язок, може бути нестійким [4].

Доцільно звернути увагу на те, що, як було показано в [4] при дослідженні осцилятора Ван дер Поля (10),

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = \mu(1-x_1^2) \cdot x_2 - x_1 \end{cases}, \quad (10)$$

базовий алгоритм може також збігтися до нестійкого розв'язку для  $\mu = 0,1$  і нульових початкових умов.

Процедура застосування ітерацій Ньютона з використанням гомотопного процесу майже така ж, як і в методі Ейпріла–Тріка. Даний підхід є ньютоноподібним алгоритмом визначення періодичного відгуку в автономних та неавтономних випадках. Числові приклади, наведені в літературних джерелах ілюструють обґрунтованість гомотопного алгоритму. Дослідження засвідчують, що при вдалих початкових наближеннях гомотопний процес є ефективним методом знаходження стаціонарного режиму.

Числові експерименти, наведені у [5], базуються на двох тестових прикладах. Перший – модель нервової мембрани, а інший – осцилятор Ван дер Поля. У цьому випадку ітераційні похибки визначені як сума квадратів різниць векторів, взятих по всіх дискретних точках.

Приклад 2: Розглянемо модель нервової мембрани, яка описана такою системою:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = 3x_1(t) - x_1^3(t) + 3x_2(t) + \sigma \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -(x_1(t) + 0,8x_2(t) - 0,7)/3 \end{cases}, \quad (11)$$

де  $\sigma$  – параметр, див. [4], [5]. Нехай  $\sigma = -3$  і крок по часу 0,001. За базовим алгоритмом узагальнених суперечностей: розрахований розв’язок  $x_1^* = 1,0455$ ,  $x_2^* = 0,1750$  і  $T^* = 9,6070$  і для початкового наближення  $x_{1,0} = 3$ ,  $x_{2,0} = 1,5$  і  $T_0 = 12$ , для другого наближення  $x_{1,0} = 1$ ,  $x_{2,0} = 1$  і  $T_0 = 5$ , розрахований розв’язок  $x_1^* = 1,3109$ ,  $x_2^* = 0,3226$  і  $T^* = 9,6070$ . Числові результати показано на рис. 3.

Для  $(x_{1,0}, x_{2,0}) \in [-1, 3] \times [-1, 3]$  і  $T_0 = 5$  ми відповідно прийняли гомотопний процес та базовий алгоритм для чисельного розв’язку (11). Просторова область сітки довжин встановлена як 0,1 для  $x_1$  та  $x_2$ . Розраховану область збіжності показано на рис. 4, де початкові наближення збіжності позначено штрихами. Очевидно, що область збіжності гомотопного процесу набагато більша за область збіжності базового алгоритму.

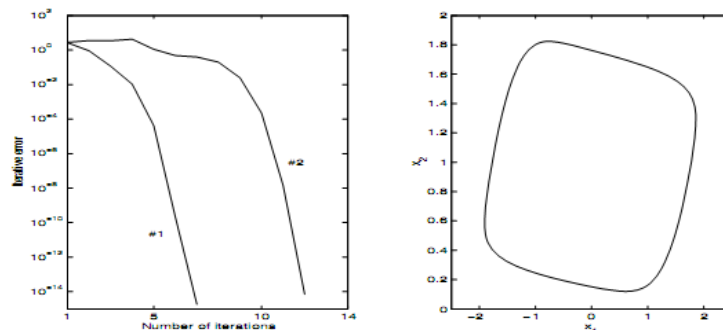


Рис. 3. Поведінка збіжності (зліва) та розрахована фаза (справа) для прикладу 2 за базовим алгоритмом

Приклад 3: Розглянемо математичну модель осцилятора Ван дер Поля:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = \mu(1 - x_1^2) \cdot x_2 - x_1 \end{cases}, \quad (12)$$

де  $\mu$  параметр.

З метою розрахунку прикладу використано базовий алгоритм і визначено крок за часом 0,005. Початкове наближення  $x_{1,0} = 2$ ,  $x_{2,0} = 1$  і  $T_0 = 5$ . Для  $\mu = 0,1$  розрахований

розв'язок  $x_1^* = 0,3468$ ,  $x_2^* = 1,6504$  і  $T^* = 6,2780$ . Для  $\mu = 0,5$  розрахований розв'язок  $x_1^* = 0,0368$ ,  $x_2^* = 2,0116$  і  $T^* = 6,3192$ . Для  $\mu = 1$  розрахований розв'язок  $x_1^* = -0,3645$ ,  $x_2^* = 1,7862$  і  $T^* = 6,5153$ . Для випадку  $\mu = 0,1$  результати показано на рис. 3.

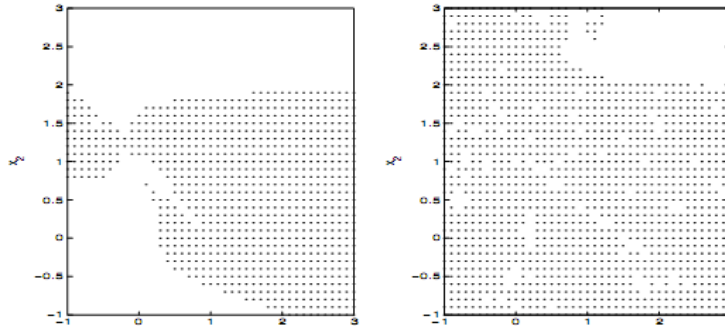


Рис. 4. Область збіжності для базового алгоритму (ліворуч) та для гомотопного процесу (праворуч) для прикладу 1

Для осцилятора Ван дер Поля базовий алгоритм може також збігтися до нестійкого розв'язку для  $\mu = 0,1$   $x^* = [0,0]^T$ , якщо початкове наближення взяти як  $x_{1,0} = 0,1$ ,  $x_{2,0} = 0,1$  і  $T_0 = 5$ .

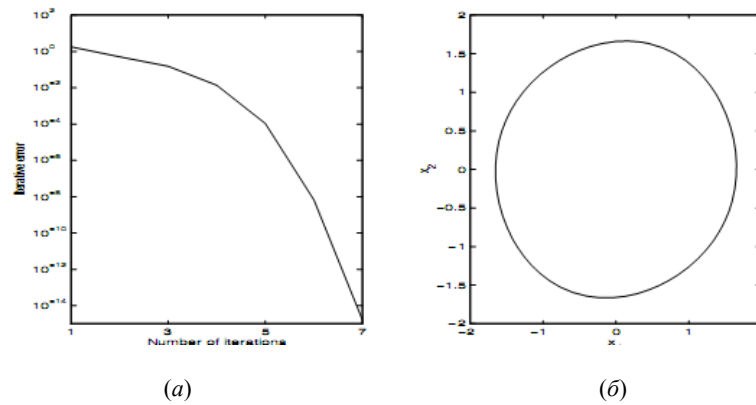


Рис. 5. Поведінка збіжності (а) та розрахована фаза (б) для прикладу 3 для  $\mu = 0,1$  за базовим алгоритмом

Метод Накла-Бреніна. У [2] описано градієнтний метод, який хоча має дещо повільнішу швидкість збіжності ніж метод Ейпріла-Тріка, іноді володіє над значно ширшою областю збіжності і очікується що він потребуватиме набагато менше обчислень для великих задач. В цьому методі алгоритм оптимізації використовується для мінімізації квадрата величини вектора невідповідності  $\delta(x_0)$ . Розрахунок градієнта скалярної функції  $x_0$  вимагає одного повного періоду інтегрування вперед звичайних диференціальних рівнянь, як в методі Ейпріла-Тріка, і ще одного повного періоду

інтегрування назад зв'язаного вектора невідповідності. Окрім того, не накладаючи ніяких обмежень на фазу, градієнтний метод може збігтися із будь-якою точкою уздовж траєкторії у будь-якому автономному чи неавтономному випадку, замість збіжності до одної точки. Це розширює область та збільшує швидкість збіжності, представляючи значно більшу цінність для ітераційного процесу.

Алгоритм знаходження періодичної точки (1), його відповідний розв'язок, ґрунтується на результатах [2]:

1. Вибираємо перше наближення  $x_0$ , інтегруючи (1) впродовж перших кількох періодів.

2. Використовуємо  $x_0$  як початкові умови (1) для інтегрування вперед від  $t = 0$  до  $t = T$ , зберігаючи траєкторію  $x(t; x_0)$  оскільки її все одно розраховують.

3. Обчислюємо вектор невідповідності  $\delta(x_0)$  та квадрат його величини  $P(x_0)$ . Якщо  $P(x_0)$  є менший за відповідний критерій збіжності, тоді завершуємо обчислення.

4. Використовуємо  $\delta(x_0)$  як початкові умови для (12) зв'язане варіаційне рівняння при  $t = T$  і інтегруємо назад до  $t = 0$ , застосовуючи траєкторію  $x(t; x_0)$ , в зворотному порядку, щоб знайти значення величини коефіцієнта матриці  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^t$  протягом цього процесу інтегрування.

5. Обчислюємо зв'язаний вектор невідповідності й подвоюємо його для здобуття вектора градієнта  $g(x_0)$ . Потім використовуємо  $P(x_0)$  та  $g(x_0)$  як аргументи для процедури оптимізації щоб мінімізувати  $P(x_0)$ .

6. Використовуємо  $\Delta x_0$  – вектор корекції, повернений з процедури оптимізації, підраховуємо подальше наближення  $x_0$ , і переходимо до кроку 2.

При виборі відповідного критерію збіжності на кроці 3, абсолютна похибка є неадекватною. В [2] використано критерій відносної похибки з  $P(x_0)$  порівняно з квадратом  $x_0$ . З іншого боку, відношення квадрата величини  $x_0$  до  $\Delta x_0$  може бути використано як критерій збіжності; але це потребує зворотного інтегрування системи рівнянь і виклику процедури оптимізації.

Процедура оптимізації яка використовується для мінімізації  $P(x_0)$  спирається на метод Флетчера, виконується абсолютно задовільно. Як і очікувалося, вектор невідповідності  $\delta(x_0)$ , зв'язаний вектор невідповідності та вектор градієнта  $g(x_0)$  стають досить малими, коли  $P(x_0)$  наближається до нульового мінімуму.

Порівняємо розрахункові затрати на один крок інтегрування.

Для задач малої розмірності ( $N = 10$  і менше):

$$AT = \frac{k+3}{3}N^3 + kN^2 - \frac{k}{3}N \text{ – для методу Ейпріла–Тріка і}$$

$$GM = \frac{k+1}{3}N^3 + (k+1)N^2 - \frac{k-1}{3}N \text{ – для градієнтного методу.}$$



Для великих розріджених матриць ( $N = 100$  і більше) відповідно використовують формули:  $AT = (0.6N+k)O(N)$ ,  $GM = (1+k)O(N)$ .

Приклад 4:

Параметри схеми:  $E_0 = 20$  В,  $I_0 = 10e-6$  А,  $R_1 = 10^5$  Ом,  $R_2 = 10^5$  Ом,  $C_1 = 10^{-7}$  Ф,  $C_2 = 5 \cdot 10^{-9}$  Ф.

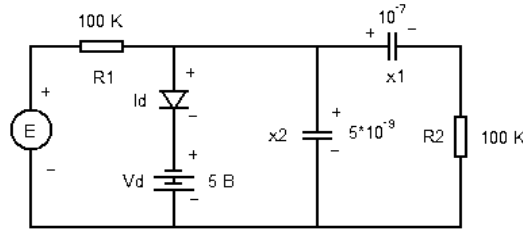


Рис. 6. Нелінійне RC-коло з періодичним вхідним сигналом  $E = 20\sin(\pi 10^4 t)$ ,  $I_d = 10^{-6}(e^{40I_d} - 1)$

Таблиця 1

Визначення періодичного відгуку [2]

Пряме інтегрування			Градiєнтний метод		
№ ітерації	$P(x_0)$	$x_0$	№ ітерації	$P(x_0)$	$x_0$
0	$0,44 \cdot 10^0$	0,0000; 0,0000	0	$0,44 \cdot 10^0$	0,0000; 0,0000
4	$0,33 \cdot 10^{-2}$	0,0316; -1,140	1	$0,27 \cdot 10^{-1}$	0,35994; -0,72327
8	$0,43 \cdot 10^{-6}$	0,0353; -1,183	2	$0,14 \cdot 10^{-4}$	0,47944; -0,96355
20	$0,40 \cdot 10^{-6}$	0,0425; -1,181	3	$0,13 \cdot 10^{-4}$	0,47938; -0,96358
50	$0,22 \cdot 10^{-6}$	0,0571; -1,174	4	$0,11 \cdot 10^{-10}$	0,09952; -1,15267
85	$0,10 \cdot 10^{-6}$	0,0705; -1,167	5	$0,34 \cdot 10^{-15}$	0,09948; -1,15268

Приклад 5:

Параметри схеми:  $J_0=2$ ,  $I_0=10e-6$  А,  $R_1=5$  Ом,  $R_2=10e+3$  Ом,  $C_1=10e-6$  Ф,  $C_2=10e-3$  Ф,  $C_3=10e-3$  Ф,  $L_1=0,1$  Гн.

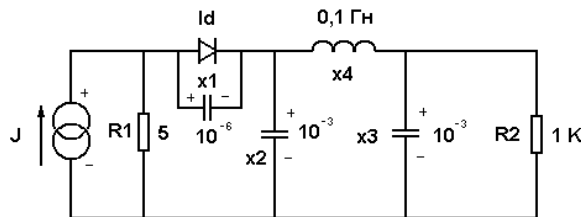


Рис. 6. Коло подачі живлення з періодичним вхідним сигналом  $J = 2\sin(120\pi t)$ ,  $I_d = 10^{-6}(e^{40I_d} - 1)$

Визначення періодичного відгуку [2]

Гرادієнтний метод					
№ ітерації	$P(x_0)$	№ ітерації	$P(x_0)$	№ ітерації	$P(x_0)$
0	8,36	5	0,219	10	$0,105 \cdot 10^{-4}$
1	0,453	6	0,198	11	$0,107 \cdot 10^{-5}$
2	0,451	7	$0,234 \cdot 10^{-1}$	12	$0,215 \cdot 10^{-7}$
3	0,447	8	$0,324 \cdot 10^{-2}$	13	$0,258 \cdot 10^{-9}$
4	0,436	9	$0,787 \cdot 10^{-4}$	14	$0,804 \cdot 10^{-12}$

У разі застосування методу (2) без прискорення періодичний режим досягається за 50 періодів, при застосуванні методу (1) – за 3 періоди (2 ітерації прогнозу), при застосуванні методу (3) з прогнозуванням (1) – за 3 періоди (7 ітерацій прогнозу).

Метод Ейпріла–Тріка з ітераційним процесом Ньютона–Рафсона збігається швидше, але область збіжності часом обмежена і час розрахунку ітерації може бути великий для великих задач. Окрім того, для автономних систем метод Ейпріла–Тріка потребує щоб один з  $N$  елементів вектора  $x_0$  мав виправлене значення, яке повинно знаходитись десь всередині амплітуди варіації відповідної змінної протягом повного періоду інтегрування упродовж кожної ітерації, інакше метод не збіжиться. При виборі цього значення можуть виникнути певні проблеми, якщо амплітуда варіації невідома заздалегідь.

У порівнянні відносних переваг методу Ейпріла–Тріка та градієнтного методу [2], питання розміру задачі та розрідженості матриці мали важливе значення. Для малих задач, де розрідженість матриці не є важлива, метод Ейпріла–Тріка навіть тоді, коли він має меншу область збіжності, завжди кращий за градієнтний метод, за швидкістю збіжності та за обчислювальною вартістю за ітерацію. Проте для великих задач градієнтний метод може краще використовувати властивість розрідженості, і тому повинен виконуватися помітно краще.

1. *Ейпрілл Т. Д., Трик Т. Н.* Анализ стационарного режима нелинейных цепей с периодическими входными сигналами // Труды инст. инж. по электротехн. и радиоэлектрон. 1972. Т. 60. С. 148–150.
2. *Nakhla M. S., Branin F. H.* Determining the periodic response of nonlinear systems by a gradient method // Circuit theory and applications. 1977. Vol. 5. P. 255–273.
3. *Shampine L. F.* Type-Insensitive ODE Codes Based on Extrapolation Methods // SIAM J. Stat. Comput. 1983. Vol. 4. N 4. P. 635–644.
4. *Kleiner M. A., Afsar M. N.* Determining the steady-state responses in RF circuits using GMRES, CGS, and BICGSTAB solution in sSpice for Linux // Microwave Symposium Digest., MTT-S International, Boston, MA, USA, 2000. Vol. 1. P. 87–90.
5. *Jiang Y. L., Kong Q. X.* Steady-States of Nonlinear Oscillators Based on Homotopic Process with Generalized Inverses // Applied Mathematical Sciences, 2007. Vol. 1. N 41. P. 2043–2052.
6. *Хвищун І.О.* Програмування і математичне моделювання: підруч. К.: Видавничий Дім “Ін Юре”, 2007. 544 с.

**DESIGN OF PERIODIC RESPONSES OF HIGH-Q RADIO ELECTRONIC CIRCUITS****M. Baran**

*Ivan Franko National University of L'viv,  
Tarnavsky Str., 107, UA-79017 Lviv, Ukraine  
e-mail: [bmo2@mail.ru](mailto:bmo2@mail.ru)*

The known methods of numeral calculation of the periodic responses of high-Q charts are considered. Methods and algorithms of speed-up search of these responses and results of application of the mentioned methods are resulted to the design of test problems. The comparative analysis of advantages and lacks of the considered methods is done.

*Key words:* speed-up search, responses periodic, state transient matrix, method of Newton, method of Aprill-Trik, gradient method, homotopic process.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ ВИСОКОДОБРОТНЫХ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ****Н. Баран**

*Львовский национальный университет им. И.Франко  
кафедра радиофизики  
ул. Ген. Тарнавского, 107, 79017 Львов, Украина  
e-mail: [bmo2@mail.ru](mailto:bmo2@mail.ru)*

Рассмотрены известные методы численного расчета периодических режимов высокодобротных схем. Приведены методы и алгоритмы ускоренного поиска этих режимов и результаты применения указанных методов для моделирования тестовых задач. Сделано сравнительный анализ преимуществ и недостатков рассмотренных методов.

*Ключевые слова:* ускоренный поиск, периодический режим, матрица перехода состояния, метод Ньютона, метод Ейприла–Трика, градиентный метод, гомотопный процесс.

Стаття надійшла до редколегії 11.05.2009  
Стаття прийнята до друку 20.07.2009