

УДК 530.145

PACS 03.65.-w, 05.30.Pr, 14.80.Nv

Спектр системи двох еніонів у сталому магнітному полі з магнітними зарядами

Б. Собко, А. Ровенчак

*Кафедра теоретичної фізики,
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Драгоманова, 12, 79005 Львів, Україна
e-mail: {bohanka.sobko.d, andrij.rovenchak}@gmail.com*

У роботі розглянуто задачу двох еніонів у магнітному полі з магнітними зарядами. За допомогою теорії збурень, де малим параметром виступає поле від магнітних зарядів, розраховано поправки до спектра такої системи. Показано, що перша поправка знімає виродження енергетичних рівнів.

Ключові слова: еніон, магнітне поле, магнітний заряд, теорія збурень

Вступ

У 1977 році фізики-теоретики з університету Осло — Йон Манне Лайнос (Jon Magne Leinaas) і Ян Міргайм (Jan Myrheim) — довели, що традиційний поділ частинок на ферміони і бозони не є застосовним у двовимірному просторі [1]. З топологічних міркувань можна показати, що при перестановці двох тотожних частинок, які “живуть” на площині, хвильова функція може домножатись на довільний фазовий множник. Тому для таких об’єктів Френк Вілчек у 1982 році [2] запропонував назву *еніон* (*anyon*, від англ. *any* — ‘будь-який’) — їхня статистика не бозонна і не ферміонна, а “ану”-онна.

У тривимірному (і більше) просторі частинки строго діляться на два типи, згідно з тим, якій статистиці вони підкоряються: ферміони (півцілий спін) — статистиці Фермі–Дірака, бозони (цілий спін) — статистиці Бозе–Айнштейна. Наприклад, в разі двочастинкового стану маємо дію оператора перестановки (в позначеннях Дірака):

$$\hat{P}_{12}|12\rangle = +|21\rangle \quad \text{для бозонів;} \quad (1)$$

$$\hat{P}_{12}|12\rangle = -|21\rangle \quad \text{для ферміонів.} \quad (2)$$

Однак, у двовимірних системах можна спостерігати квазічастинки, які підкоряються розподілу, що варіюється безперервно між статистиками Бозе–Айнштейна і Фермі–Дірака:

$$\hat{P}_{12}|12\rangle = e^{i\pi\alpha}|21\rangle, \quad (3)$$

де еніонний параметр α — дійсне число з діапазону $[0; 1]$. При $\alpha = 0$ маємо статистику Бозе–Айнштейна, а при $\alpha = 1$ — статистику Фермі–Дірака. У випадку $0 < \alpha < 1$ отримуємо дещо інше — еніон. Співвідношення між спіновим квантовим числом s та параметром α можна записати так: $\alpha = 2s$.

Незважаючи на те, що фундаментальні частинки можуть бути лише бозонами або ферміонами, елементарні збудження в системах, де виникає, наприклад, дробовий квантовий ефект Холла [3], можна з великою точністю розглядати як еніони [4].

На підставі еніонів навіть пропонується побудувати топологічний квантовий комп'ютер, який через свою топологічну природу повинен бути набагато більш толерантним до перешкод і помилок, ніж “звичайний” квантовий комп'ютер [5]. Відкривається широке поле для роботи у даній сфері.

У даній роботі розглядатимемо питання опису двох еніонів у магнітному полі. На відміну від стандартного підходу, ми включимо в розгляд ефекти, пов'язані з існуванням гіпотетичних магнітних зарядів, відомих як монополі Дірака [6]. Окрім методичного інтересу, така задача може бути пов'язана з інтерпретацією експериментів у конденсованих середовищах, де магнітні монополі виникають ефективно [7, 8].

1 Дві частинки в однорідному магнітному полі

Розглянемо задачу про рух двох частинок у площині, перпендикулярній до вектора \mathbf{B}_0 , який задає стале магнітне поле. У першому наближенні знехтуємо кулонівським відштовхуванням. Розгляд цього питання дуже подібний на розгляд звичайного електрона на рівнях Ландау, але з певними відмінностями, які накладає еніонна статистика [9].

Отже, будемо спочатку розглядати дві ідентичні безспінові заряджені частинки масою m і зарядом e в однорідному магнітному полі [9]. Гамільтоніан системи:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left[\left(\hat{\mathbf{p}}_1 - \frac{e}{c} \mathbf{A}_1 \right)^2 + \left(\hat{\mathbf{p}}_2 - \frac{e}{c} \mathbf{A}_2 \right)^2 \right], \quad (4)$$

де векторний потенціал у симетричному калібруванні

$$\mathbf{A}_k = \frac{1}{2} [\mathbf{B}, \mathbf{r}_k]. \quad (5)$$

Нехай магнітне поле спрямоване вздовж осі Oz , $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$. Без втрати загальності можна вважати $B_0 > 0$.

В термінах координат центра мас і відносного руху (\mathbf{R} та \mathbf{r} відповідно) гамільтоніан розділиться на дві частини, $\hat{H} = \hat{H}_{\text{c.m.}} + \hat{H}_{\text{rel}}$:

$$\hat{H}_{\text{c.m.}} = \frac{1}{4m} \left(\hat{\mathbf{P}} - \frac{2e}{c} \mathbf{A}_{\text{c.m.}} \right)^2 \quad (6)$$

та

$$\hat{H}_{\text{rel}} = \frac{1}{m} \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{2c} \mathbf{A}_{\text{rel}} \right)^2, \quad (7)$$

де

$$\mathbf{A}_{\text{с.м.}} = \frac{1}{2}[\mathbf{B}, \mathbf{R}], \quad \mathbf{A}_{\text{rel}} = \frac{1}{2}[\mathbf{B}, \mathbf{r}]. \quad (8)$$

Рівняння Шредингера, що відповідає гамільтоніанові відносного руху, зручно записати в циліндричній системі координатах:

$$\hat{H}_{\text{rel}}\Psi(r, \phi) = E\Psi(r, \phi). \quad (9)$$

Хвильову функцію шукатимемо у вигляді

$$\Psi(r, \phi) = e^{i\ell\phi}R(r), \quad (10)$$

де $\ell = 0, \pm 2, \pm 4, \dots (\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots)$ для бозонів (ферміонів). Надалі ми відштовхуватимемося від бозонної задачі, тому обмежимося парними значеннями ℓ . Для радіальної частини матимемо рівняння

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\ell^2}{r^2} + \frac{eB_0\ell}{2\hbar c} - \frac{e^2 B_0^2 r^2}{16\hbar^2 c^2} + \frac{mE}{\hbar^2} \right] R(r) = 0. \quad (11)$$

Власні значення для енергії будуть

$$E_{n,\ell} = (2n + |\ell| - \ell + 1)\hbar\omega_c, \quad (12)$$

де $\omega_c = eB_0/(2mc)$ — циклотронна частота, квантові числа $n = 0, 1, 2, \dots$, а $\ell = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$. Відповідна радіальна хвильова функція буде

$$R_{n,\ell}(r) = r^{|\ell|} \exp\left(-\frac{m\omega_c}{4\hbar} r^2\right) L_n^{|\ell|}\left(\frac{m\omega_c}{2\hbar} r^2\right). \quad (13)$$

Тут $L_n^{|\ell|}(x)$ — приєднані поліноми Лагерра.

Для переходу до задачі двох еніонів потрібно зробити заміну ℓ на $\ell - \alpha$ [9]. Хвильова функція матиме вигляд

$$\Psi(r, \phi) = e^{i(\ell-\alpha)\phi}R(r), \quad (14)$$

а радіальне рівняння Шредингера перепишеться так:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{(\ell - \alpha)^2}{r^2} + \frac{eB_0(\ell - \alpha)}{2\hbar c} - \frac{e^2 B_0^2 r^2}{16\hbar^2 c^2} + \frac{mE}{\hbar^2} \right] R(r) = 0. \quad (15)$$

Власні значення енергії задачі двох еніонів будуть

$$E_{n,\ell} = [2n + |\ell - \alpha| - (\ell - \alpha) + 1]\hbar\omega_c. \quad (16)$$

Легко зауважити, що вони є двох типів:

$$E_{n,\ell}^{(1)} = (2n + 1)\hbar\omega_c \quad \text{при } \ell > 0, \quad (17)$$

$$E_{n,\ell}^{(2)} = (2n + 2|\ell| + 2\alpha + 1)\hbar\omega_c \quad \text{при } \ell \leq 0. \quad (18)$$

Відповідні радіальні хвильові функції будуть:

$$R_{n,\ell}^{(1)}(r) = r^{\ell-\alpha} \exp\left(-\frac{m\omega_c}{4\hbar} r^2\right) L_n^{\ell-\alpha}\left(\frac{m\omega_c}{2\hbar} r^2\right) \quad \text{при } \ell > 0, \quad (19)$$

$$R_{n,\ell}^{(2)}(r) = r^{|\ell|+\alpha} \exp\left(-\frac{m\omega_c}{4\hbar} r^2\right) L_n^{|\ell|+\alpha}\left(\frac{m\omega_c}{2\hbar} r^2\right) \quad \text{при } \ell \leq 0. \quad (20)$$

Як бачимо з (17), відповідні стани є безмежно виродженими (фізичне обмеження зверху на квантове число ℓ накладає лише скінченність площі реальних зразків) [9, р. 53]. Стани другого типу (18) мають кратність виродження $(n_1/2+1)$, де $n_1 = n + |\ell|$ [9, р. 54].

2 Електромагнітне поле з магнітними зарядами

Вважатимемо, що поряд з електричними існують магнітні заряди. 4-вектор потенціалу, який пов'язаний з електричними зарядами, позначатимемо $A_\xi^{(e)}$, а з магнітними — $A_\xi^{(m)}$. Величина магнітного заряду нехай буде μ .

Для частинки масою m з електричним зарядом e дія в електромагнітному полі запишеться в такому випадку:

$$\begin{aligned} S &= \int \left\{ -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt - \frac{e}{c} A_\xi^{(e)} dx^\xi - \frac{\mu}{c} A_\xi^{(m)} dx^\xi \right\} \\ &= \int \left\{ -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\varphi^{(e)} - \mu\varphi^{(m)} + \frac{e}{c} \mathbf{A}^{(e)} \mathbf{v} + \frac{\mu}{c} \mathbf{A}^{(m)} \mathbf{v} \right\} dt = \int \mathcal{L} dt, \end{aligned} \quad (21)$$

Отже, лагранжіан \mathcal{L} дорівнює

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\varphi^{(e)} - \mu\varphi^{(m)} + \frac{e}{c} \mathbf{A}^{(e)} \mathbf{v} + \frac{\mu}{c} \mathbf{A}^{(m)} \mathbf{v}, \quad (22)$$

так що узагальнений імпульс $\mathbf{P} = \partial\mathcal{L}/\partial\mathbf{v}$ пов'язаний з механічним імпульсом $\mathbf{p} = m\mathbf{v}(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ співвідношенням

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}^{(e)} - \frac{\mu}{c} \mathbf{A}^{(m)}. \quad (23)$$

Відзначмо, що магнітне поле дорівнюватиме [10], порівн. [11]:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}^{(e)} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}^{(m)}}{\partial t}. \quad (24)$$

Для того, щоб воно було сталим, виберемо векторні потенціали у вигляді

$$\mathbf{A}^{(e)} = \frac{1}{2} [\mathbf{B}_0, \mathbf{r}], \quad \mathbf{A}^{(m)} = \mathbf{a}t, \quad (25)$$

де \mathbf{B}_0 та \mathbf{a} — сталі вектори. Отже,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \frac{1}{c} \mathbf{a}. \quad (26)$$

Нехай величина $a \equiv |\mathbf{a}|$ — мала, тоді залежність від часу буде слабкою. У такому випадку можна розглядати квантовомеханічну задачу в так званому адиабатичному наближенні, коли час буде просто параметром.

Гамільтоніан двох частинок матиме вигляд:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left[\left(\hat{\mathbf{p}}_1 - \frac{e}{c} \mathbf{A}_1^{(e)} - \frac{\mu}{c} \mathbf{A}_1^{(m)} \right)^2 + \left(\hat{\mathbf{p}}_2 - \frac{e}{c} \mathbf{A}_2^{(e)} - \frac{\mu}{c} \mathbf{A}_2^{(m)} \right)^2 \right], \quad (27)$$

Для гамільтоніана відносного руху

$$\hat{H}_{\text{rel}} = \frac{1}{m} \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{2c} \mathbf{A}_{\text{rel}}^{(e)} - \frac{\mu}{2c} \mathbf{A}_{\text{rel}}^{(m)} \right)^2, \quad (28)$$

вважаючи, що вектор $\mathbf{a} = a\mathbf{e}_\phi$, після низки перетворень, аналогічних до наведених у попередньому розділі, отримаємо в полярних координатах радіальне рівняння для двох еніонів

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{(\ell - \alpha)^2}{r^2} + \frac{eB_0(\ell - \alpha)}{2\hbar c} - \frac{e^2 B_0^2 r^2}{16\hbar^2 c^2} + \frac{\mu a t}{\hbar c} \frac{\ell - \alpha}{r} - \frac{e\mu B_0 a t}{4\hbar^2 c^2} r - \left(\frac{\mu a t}{2\hbar c} \right)^2 + \frac{mE}{\hbar^2} \right] R(r) = 0. \quad (29)$$

Цікаво, що, за Діраком, електричні і магнітні заряди квантуються [6]:

$$2 \frac{e\mu}{\hbar c} = k, \quad \text{де } k \text{ — ціле число.} \quad (30)$$

Відзначимо також, що вибір векторного потенціалу $\mathbf{A}^{(m)} = \mathbf{a}t$ у вигляді, наприклад, $\mathbf{a} = a\mathbf{e}_r$, не дасть нових результатів для спектра власних значень, оскільки таку задачу можна звести до вихідної з гамільтоніаном (7) за допомогою градієнтного перетворення [12, с. 416–417].

Розв'язуватимемо отриману задачу таким чином. З (29) виділимо відому нам задачу двох частинок (15). Решта доданків — збурення

$$\hat{V} = -\frac{\hbar^2}{m} \left[\frac{\mu a t}{\hbar c} \frac{\ell - \alpha}{r} - \frac{e\mu B_0 a t}{4\hbar^2 c^2} r - \left(\frac{\mu a t}{2\hbar c} \right)^2 \right]. \quad (31)$$

Розрахунки за теорією збурень наведено в наступному розділі.

3 Поправки до спектра

Як зазначалося в розділі 1, енергетичні рівні нульової задачі вироджені, тобто одному значенню енергії відповідає не одна власна функція, а декілька, що ускладнює розрахунки за теорією збурень [13, с. 434–435].

У нашому випадку, завдяки кутовій залежності $e^{i(\ell-\alpha)\phi}$ у хвильовій функції (14), матричні елементи оператора збурення будуть діагональними за квантовим числом ℓ :

$$\frac{\langle m\ell' | \hat{V} | n\ell \rangle}{\langle n\ell | n\ell \rangle} \equiv \frac{1}{\langle n\ell | n\ell \rangle} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dr r e^{-i(\ell-\alpha)\phi} R_{m,\ell}(r) \hat{V} e^{i(\ell-\alpha)\phi} R_{n,\ell}(r) = V_{mn}^{\ell\ell} \delta_{\ell'\ell}. \quad (32)$$

Тому умовою нетривіальності розв'язку задачі теорії збурень є рівність нулеві такого визначника:

$$\begin{vmatrix} V_{nn}^{22} - \Delta E_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & V_{nn}^{44} - \Delta E_n & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & V_{nn}^{66} - \Delta E_n & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{vmatrix} = 0 \quad \text{для } \ell = 2, 4, 6, \dots \quad (33)$$

Отже, поправки до енергій n -го рівня (17) просто дорівнюють

$$\Delta E_{n,\ell}^{(1)} = V_{nn}^{\ell\ell}. \quad (34)$$

Поправки $\Delta E_{n,\ell}^{(2)}$ до рівнів другого типу (18) з $\ell = 0, -2, -4, \dots$ отримуємо аналогічним способом.

Знайдемо спочатку квадрати норми хвильової функції (14) з урахуванням двох типів радіальних залежностей (19), (20):

$$\begin{aligned} \langle n\ell | n\ell \rangle^{(1)} &\equiv \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dr r e^{-i(\ell-\alpha)\phi} R_{n,\ell}^{(1)}(r) e^{i(\ell-\alpha)\phi} R_{n,\ell}^{(1)}(r) \\ &= 2\pi \left(\frac{m\omega_c}{2\hbar} \right)^{-(\ell-\alpha+1)} \frac{\Gamma(n+1+\ell-\alpha)}{2n!}, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \langle n\ell | n\ell \rangle^{(2)} &\equiv \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dr r e^{i(|\ell|+\alpha)\phi} R_{n,\ell}^{(2)}(r) e^{-i(|\ell|+\alpha)\phi} R_{n,\ell}^{(2)}(r) \\ &= 2\pi \left(\frac{m\omega_c}{2\hbar} \right)^{-(|\ell|+\alpha+1)} \frac{\Gamma(n+1+|\ell|+\alpha)}{2n!}, \end{aligned} \quad (36)$$

де $\Gamma(x)$ — гамма-функція Ейлера.

В операторі збурення (31) останній доданок (пропорційний до a^2) дає внесок лише в другу поправку до енергії, тому ми обмежимося першими двома:

$$\begin{aligned} \langle n\ell | \hat{V} | n\ell \rangle^{(1)} &\equiv -2\pi \frac{\hbar^2}{m} \int_0^\infty dr r R_{n,\ell}^{(1)}(r) \left[\frac{\mu at}{\hbar c} \frac{\ell - \alpha}{r} - \frac{e\mu B_0 at}{4\hbar^2 c^2} r \right] R_{n,\ell}^{(1)}(r) \\ &= -2\pi \frac{1}{2n!} \left(\frac{m\omega_c}{2\hbar} \right)^{-(\ell-\alpha+3/2)} \frac{\hbar^2}{m} \left[\frac{m\omega_c}{2\hbar} \frac{\mu at}{\hbar c} P(n, \ell, \alpha) - \frac{e\mu B_0 at}{4\hbar^2 c^2} Q(n, \ell, \alpha) \right], \end{aligned} \quad (37)$$

де коефіцієнти P та Q виражаються через гіпергеометричну функцію [14]:

$$P(n, \ell, \alpha) = (\ell - \alpha) \frac{\Gamma(\ell - \alpha + 1/2)\Gamma(n + 1/2)\Gamma(n + \ell - \alpha + 1)}{n!\Gamma(1/2)\Gamma(\ell - \alpha + 1)} \times {}_3F_2\left(-n, \ell - \alpha + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -n + \frac{1}{2}, \ell - \alpha + 1; 1\right), \quad (38)$$

$$Q(n, \ell, \alpha) = \frac{\Gamma(\ell - \alpha + 3/2)\Gamma(n - 1/2)\Gamma(n + \ell - \alpha + 1)}{n!\Gamma(-1/2)\Gamma(\ell - \alpha + 1)} \times {}_3F_2\left(-n, \ell - \alpha + \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; -n + \frac{3}{2}, \ell - \alpha + 1; 1\right) \quad (39)$$

З такими виразами складно працювати, тому для зручності просто розглянемо далі результати для окремих значень n та ℓ .

Враховуючи, що хвильові функції за від'ємних значень ℓ можна отримати з відповідних виразів для $\ell > 0$ замінами $\ell \rightarrow |\ell|$ та $\alpha \rightarrow -\alpha$, матричні елементи дорівнюватимуть

$$V_{nn}^{\ell\ell} = \frac{\hbar^2}{m} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega_c}} \frac{e\mu}{4\hbar^2 c^2} \frac{Q(n, \ell, \alpha) - P(n, \ell, \alpha)}{\Gamma(n + 1 + \ell - \alpha)} B_0 at \quad \text{для } \ell = 2, 4, 6, \dots, \quad (40)$$

$$V_{nn}^{\ell\ell} = \frac{\hbar^2}{m} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega_c}} \frac{e\mu}{4\hbar^2 c^2} \frac{Q(n, |\ell|, -\alpha) - P(n, |\ell|, -\alpha)}{\Gamma(n + 1 + |\ell| + \alpha)} B_0 at \quad \text{для } \ell = 0, -2, -4, \dots \quad (41)$$

Зокрема, для кількох перших рівнів значення числового коефіцієнта біля

$$\frac{\hbar^2}{m} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega_c}} \frac{e\mu}{4\hbar^2 c^2} B_0 at$$

розкладаються в ряд за параметром α з точністю до α^2 у вигляді:

$$\begin{aligned} n = 0, \ell = -2: & \quad 0.332335 - 0.07299\alpha + 0.0238716\alpha^2, \\ \ell = 0: & \quad 0.886227 - 1.22857\alpha + 2.30937\alpha^2, \\ \ell = 2: & \quad 0.332335 + 0.07299\alpha + 0.0238716\alpha^2; \\ \\ n = 1, \ell = -2: & \quad 0.858532 - 0.142400\alpha + 0.036145\alpha^2, \\ \ell = 0: & \quad 1.55090 - 1.04222\alpha + 1.39789\alpha^2, \\ \ell = 2: & \quad 0.858532 + 0.142400\alpha + 0.036145\alpha^2; \\ \\ n = 2, \ell = -2: & \quad 1.28866 - 0.176215\alpha + 0.0378834\alpha^2, \\ \ell = 0: & \quad 2.00786 - 0.921021\alpha + 1.06818\alpha^2, \\ \ell = 2: & \quad 1.28866 + 0.176215\alpha + 0.0378834\alpha^2. \end{aligned} \quad (42)$$

Графічно відповідні залежності зображено на рис. 1.

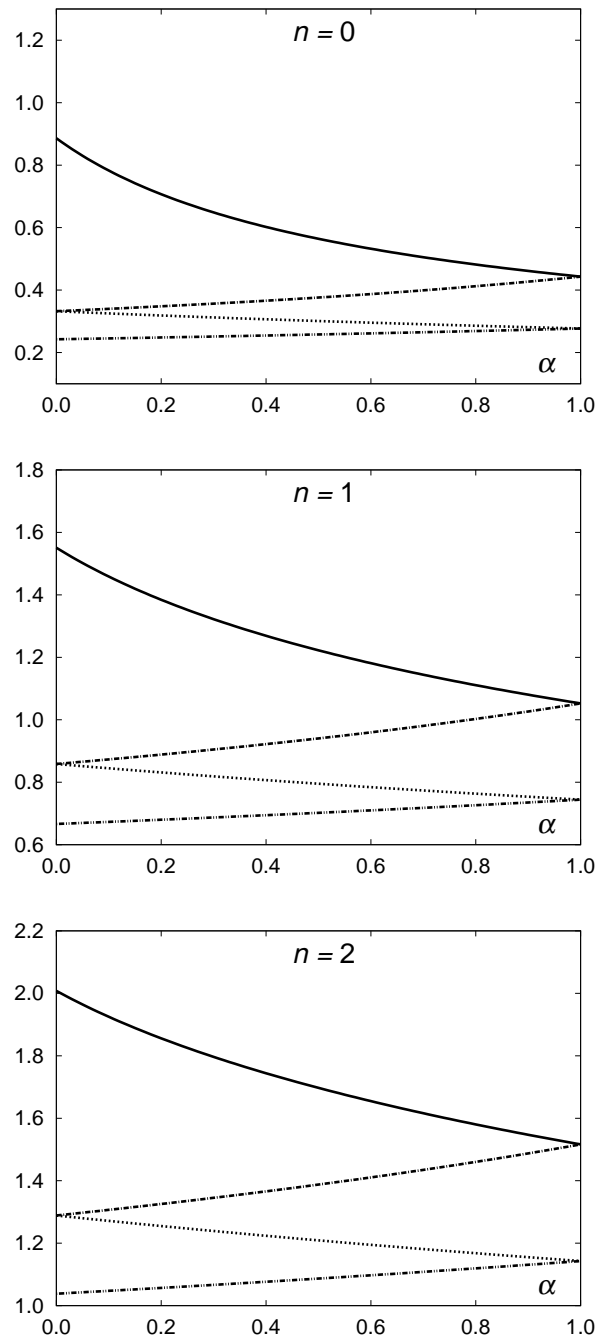


Рис. 1: Числові коефіцієнти в поправці (42) до енергії при $n = 0, 1, 2$. Суцільна лінія відповідає $l = 0$, пунктирна — $l = -2$, штрих-пунктирна — $l = 2$, штрихова з двома крапками — $l = 4$.

Висновки

У даній роботі розглянуто задачу знаходження енергетичного спектра двох еніонів у сталому магнітному полі з урахуванням внесків від гіпотетичних магнітних зарядів. Відповідний внесок ми вважали малим параметром, внаслідок чого розраховано першу поправку за теорією збурень і показано, що її врахування знімає виродження енергетичних рівнів за орбітальним квантовим числом.

Після незначних модифікацій зроблені розрахунки можуть бути застосовані до інших задач, у яких збурення має подібний характер. У перспективі передбачено докладний аналіз способів уведення в теорію магнітних зарядів, зокрема у просторах різної вимірності, та дослідження систем еніонів за таких умов.

Подяки. Автори висловлюють подяку проф. В. М. Ткачуку за обговорення деяких аспектів роботи.

Ця публікація частково підтримана в межах теми ФФ-30Ф (номер держреєстрації 0116U001539) МОН України та гранту ДФФД України Ф-64 (номер держреєстрації 0116U005055).

Література

1. *Leinaas J. M.* On the theory of identical particles / J. M. Leinaas, J. Myrheim // *Nuovo Cim.* — 1977. — Vol. 37B, No. 1. — P. 1–23.
2. *Wilczek F.* Quantum mechanics of fractional-spin particles / F. Wilczek // *Phys. Rev. Lett.* — 1982. — Vol. 49, No. 14. — P. 957–959.
3. *Tsui D. C.* Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit / D. C. Tsui, H. L. Stormer, A. C. Gossard // *Phys. Rev. Lett.* — 1982. — Vol. 48, No. 22. — P. 1559–1562.
4. *Arovas D.* Fractional statistics and the quantum Hall effect / D. Arovas, J. R. Schrieffer, F. Wilczek // *Phys. Rev. Lett.* — 1984. — Vol. 53, No. 7. — P. 722–723.
5. *Kitaev A. Yu.* Fault-tolerant quantum computation by anyons / A. Yu. Kitaev // *Ann. Phys.* — 2003. — Vol. 303, No. 1. — P. 2–30.
6. *Dirac P. A. M.* Quantised singularities in the electromagnetic field / P. A. M. Dirac // *Proc. Roy. Soc. London A.* — 1931. — Vol. 133, No. 821. — P. 60–72.
7. *Castelnovo C.* Magnetic monopoles in spin ice / C. Castelnovo, R. Moessner, S. L. Sondhi // *Nature.* — 2008. — Vol. 451, No. 7174. — P. 42–45.
8. Possible observation of highly itinerant quantum magnetic monopoles in the frustrated pyrochlore $\text{Yb}_2\text{Ti}_2\text{O}_7$ / Y. Tokiwa, T. Yamashita, M. Udagawa [et al.] // *Nature Commun.* — 2016. — Vol. 7. — Art. 10807. — 6 p.

9. *Khare A.* Fractional Statistics and Quantum Theory / A. Khare. — 2nd edition. — Singapore : World Scientific, 2005. — xiv, 300 p.
10. *McDonald K. T.* Electrodynamics in 1 and 2 spatial dimensions [Electronic resource] / K. T. McDonald. — 2014. — 11 p. — Available from: <http://www.physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/2dem.pdf>.
11. *Dirac P. A. M.* The theory of magnetic poles / P. A. M. Dirac // Phys. Rev. — 1948. — Vol. 74, No. 7. — P. 817–830.
12. *Бом Д.* Квантовая теория / Д. Бом. — Москва : Наука, 1965. — 729 с.
13. *Вакарчук І. О.* Квантова механіка / І. О. Вакарчук. — 4-те вид. — Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2012. — 872 с.
14. *LaguerreL: Generalized Laguerre Polynomials.* — Wolfram Research, Inc., 1998–2016. — Available from: <http://functions.wolfram.com/Polynomials/LaguerreL3/21/02/01/>.

Стаття надійшла до редакції 08.06.2016
прийнята до друку 17.06.2016

Spectrum of two anyons in a constant magnetic field with magnetic charges

B. Sobko, A. Rovenchak

*Department for Theoretical Physics,
Ivan Franko National University of Lviv
12, Drahomanov St, 79005 Lviv, Ukraine
e-mail: {bohdanka.sobko.d, andrij.rovenchak}@gmail.com*

In the paper, the problem of two anyons in the magnetic field with magnetic charges is considered. The perturbation theory is developed over the contribution from magnetic charges being a small parameter. Corrections to the spectrum of such a system are calculated. The first perturbative correction is shown to lift the level degeneracy.

Key words: anyon, magnetic field, magnetic charge, perturbation theory

**Спектр системы двух энионов в постоянном магнитном поле
с магнитными зарядами**

Б. Собко, А. Ровенчак

*Кафедра теоретической физики,
Львовский национальный университет имени Ивана Франко
ул. Драгоманова, 12, 79005 Львов, Украина
e-mail: {bohanka.sobko.d, andrij.rovenchak}@gmail.com*

В работе рассмотрена задача двух энионов в магнитном поле с магнитными зарядами. С помощью теории возмущений, где малым параметром является поле магнитных зарядов, рассчитаны поправки к спектру такой системы. Показано, что первая поправка снимает вырождение энергетических уровней.

Ключевые слова: энион, магнитное поле, магнитный заряд, теория возмущений