

УДК 535.543, 535.56  
PACS 42.25.Bs, 78.20.Ek, 78.20.Fm

## МОДЕЛЮВАННЯ КОНОСКОПІЧНИХ КАРТИН ОДНОВІСНИХ КРИСТАЛІВ

Н. Фтомин<sup>1</sup>, Я. Шопа<sup>2</sup>, І. Судак<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Львівський національний університет імені Івана Франка  
вул. Кирила і Мефодія, 8, 79005 Львів, Україна  
e-mail: nazar.ftomyn@gmail.com

<sup>2</sup> Cardinal Stefan Wyszyński University in Warsaw  
ul. Dewajtis 5, 01-815 Warszawa  
e-mail: i.shopa@uksw.edu.pl

Розглянуто методику розрахунку коноскопичних картин для одновісних кристалів. Використовуючи матриці Джонса, враховано вплив оптичної анізотропії (лінійне двозаломлення, оптична активність) на коноскопичні інтерференційні картини. Отримано коноскопичні картини для тестових одновісних кристалів  $\text{LiNbO}_3$ ,  $\text{SiO}_2$ .

**Ключові слова:** Коноскопична картина, двозаломлення, оптична активність, матриця Джонса

Коноскопичні дослідження є надзвичайно інформативними в сучасній оптиці кристалів. Візуалізація та аналіз інтерференції поляризованого світла в кристалах у більшості випадків є початковим етапом експериментальних кристалооптичних досліджень. Зокрема знак кристала, напрямок повороту площини поляризації, орієнтація оптичної індикатриси, інші параметри анізотропії досліджуваного зразка можна однозначно визначити за допомогою коноскопичного методу [1, 2].

Коноскопична картина (КК) одновісних кристалів складається з ізогир та ізохром [1]. Зокрема для кристалів вирізаних перпендикулярно до оптичної осі, за умови схрещених поляризаторів, кривим сталої різниці фаз (ізохромам) відповідатимуть кола, тоді як ізогир формують так званий “мальтійський хрест” у центрі зображення. Якщо оптична вісь кристала є нахилоною під деяким кутом, точка перетину балок хреста зміщується відносно центра, а ізохроми в граничному випадку вироджуються у сімейство гіпербол (у випадку, якщо зразок вирізаний паралельно до оптичної осі).

Незважаючи на складність математичного опису коноскопії ця задача розв’язувалася багатьма авторами [3–10]. Натомість інтерференційна картина розраховувалася на основі функції оптичного пропускання поляризаційної системи поляризатор-зразок-аналізатор (PSA – Polarizer-Specimen-Analyzer) з використанням спеціально розроблених програмних пакетів, а також систем комп’ютерної алгебри.

Мета цієї статті – комп’ютерне моделювання КК одновісних кристалів вирізаних перпендикулярно до оптичної осі, а також аналіз впливу параметрів оптичної анізотропії (оптична активність, лінійне двозаломлення) на результат інтерференції поляризованих хвиль у кристалі.

Загалом існує декілька методик, які можна використати для моделювання КК [3–6, 8]. Ми скористаємося матричним методом Джонса [11], адаптованим для цієї задачі [4]. Так, згідно [4] вектор Джонса (ВД) для світла на виході поляризаційної системи PSA можна розрахувати за допомогою співвідношення:

$$\mathbf{J}_{Out} = \mathbf{M}_A \mathbf{M}'_S \mathbf{M}_P \mathbf{J}_{In}. \quad (1)$$

де  $\mathbf{J}_{In,Out}$  – ВД для вхідного, вихідного світла,  $\mathbf{M}'_S = \mathbf{R}(-\varphi) \mathbf{M}_S \mathbf{R}(\varphi)$ ,  $\mathbf{M}_{P,A,S}$  – матриці Джонса (МД) для поляризатора, аналізатора та кристала,  $\mathbf{R}(\varphi)$  – поворотна матриця,  $\varphi$  – кут, що визначає орієнтацію повільної осі еліптичного зрізу оптичної індикатриси кристала [4].

МД для ідеальних поляризаційних елементів схеми представлено у [11], натомість  $\mathbf{M}_S$  для істотно анізотропного кристала (враховуючи лінійне та циркулярне двозаломлення, лінійний та циркулярний дихроїзм) з точністю до фазового множника матиме вигляд [12]:

$$\mathbf{M}_S = \begin{pmatrix} \cosh QL + (ig_0 + p_0) \frac{\sinh QL}{Q} & -(\omega + i\delta) \frac{\sinh QL}{Q} \\ (\omega + i\delta) \frac{\sinh QL}{Q} & \cosh QL - (ig_0 + p_0) \frac{\sinh QL}{Q} \end{pmatrix} \quad (2)$$

де  $L$  – довжина траєкторії променя світла у зразку;  $g_0$ ,  $\omega$  та  $p_0$ ,  $\delta$  – параметри МД які відповідають лінійному і циркулярному двозаломленню та лінійному і циркулярному дихроїзму, відповідно;  $Q = \sqrt{(ig_0 + p_0)^2 - (\omega + i\delta)^2}$  [12].

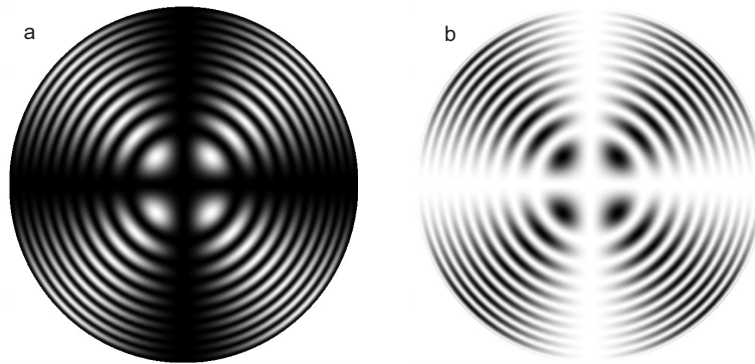


Рис. 1. Розраховані інтерференційні КК для кристалів LiNbO<sub>3</sub> для двох орієнтацій поляризаторів у системі PSA (а – поляризатори схрещені, б – поляризатори паралельні)

Під час поширення світлових променів у кристалі в напрямках відмінних від оптичної осі (під кутом  $\theta$ ) необхідно враховувати біжуче двозаломлення ( $\Delta n(\theta) = n_e(\theta) - n_o$ ), зміну величини повороту площини поляризації (явний вигляд гіраційної поверхні), а також  $L = L(\theta) = d / \cos \theta$  (де  $d$  – товщина кристалічної пластинки,

$n_{o,e}$  – звичайний та незвичайний показники заломлення). Таким чином алгоритм розрахунку коноскопічної інтерференційної картини полягатиме в обчисленні інтенсивності світла на виході поляризаційної системи PSA в залежності від кутів  $\varphi$  та  $\theta$  за допомогою рівняння  $I = \mathbf{J}_{Out}^\dagger \mathbf{J}_{Out}$  [11] (де символом  $\dagger$  позначено ермітове спряження).

Ми скористалися системою комп'ютерної алгебри Mathcad 14 для моделювання КК. В якості тестових матеріалів було використано добре вивчені кристали  $\text{LiNbO}_3$  та  $\text{SiO}_2$  ( $d = 3$  мм). Так для довжини хвилі  $\lambda = 632,8$  нм показники заломлення цих зразків дорівнюють:  $n_o = 2,2865$ ,  $n_e = 2,2022$  ( $\text{LiNbO}_3$ ) та  $n_o = 1,54263$ ,  $n_e = 1,55269$  ( $\text{SiO}_2$ ), відповідно. Натомість оптична активність (ОА) описується за допомогою тензора гірації, ненульові компоненти якого для кристалів кварцу становлять  $g_{33} = \mp 10,258 \times 10^{-5}$ ,  $g_{11} = \pm 5,539 \times 10^{-5}$  [6] (де знаки “+” та “-” біля  $g_{33}$  відповідають додатному та від'ємному повертанню площини поляризації світла вздовж оптичної осі кристала)

На рис. 1-а, б представлено розраховані КК для кристалів  $\text{LiNbO}_3$ . Чітко видно, що інтерференційні картини отримані для двох різних орієнтацій поляризаторів (рис. 1-а – схрещені, рис. 1-б – паралельні) у системі PSA є взаємодоповнюючими.

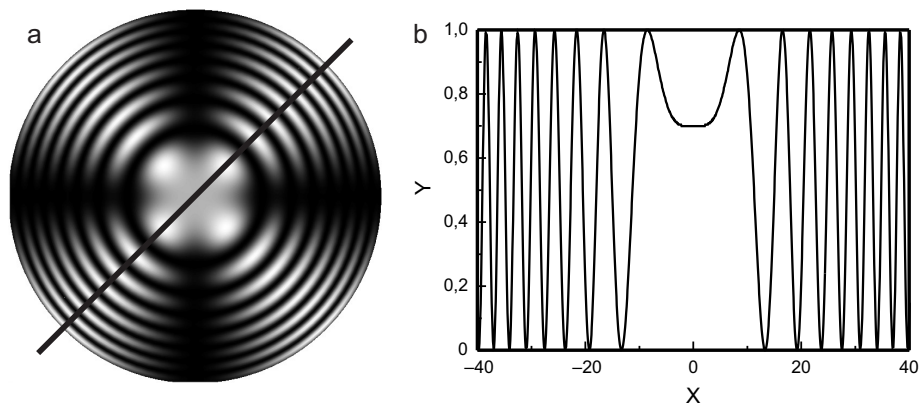


Рис. 2. Розрахована інтерференційна КК для кристалів  $\text{SiO}_2$  (а) та її  $\varphi = \pi/4$ -зріз (позначений прямою на КК) в координатах: інтенсивність світла  $I$ , кут падіння  $\alpha$  (б)

Відомо, що для гіротропних зразків (якщо ОА вздовж оптичної осі не заборонена симетрією зразка) матимемо просвітлення центру коноскопічної інтерференційної картини [2]. Крім того, коноскопічний метод дає можливість однозначно визначати напрямок повороту площини поляризації оптично активних кристалів.

Результат моделювання КК для кристалів  $\text{SiO}_2$  представлено на рис. 2-а. Під час розрахунку ми використали наступні параметри:  $g_{33} = -10,258 \times 10^{-5}$ ,  $g_{11} = 5,539 \times 10^{-5}$ . Варто зауважити, що залежність інтенсивності світла  $I$  від кута падіння  $\alpha$  ( $\alpha = \arcsin(\bar{n} \sin \theta)$ ) – обчислюється згідно закону Снеліуса;  $\bar{n}$  – середній показник заломлення світлових променів для  $\varphi = \pi/4$ -зрізу коноскопічної картини (див. рис. 2-б) добре узгоджується з результатами представленими у [6].

Класичним методом визначення знаку ОА кристалів є аналіз КК, отриманих під час проходження світла крізь систему, яка складається з поляризатора, аналізатора-

ра та двох послідовно розташованих зразків із різним знаком повертання площини поляризації вздовж оптичної осі. Такі інтерференційні картини називаються спіралями Ейрі (Airy's spiral), а напрям закручення спіралі однозначно вказуватиме на напрямок повороту площини поляризації першої після поляризатора пластинки [2].

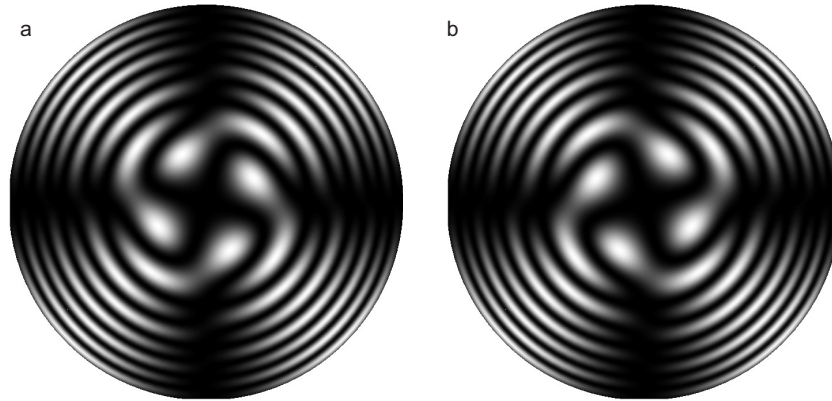


Рис. 3. Розраховані спіралі Ейрі для двох кристалічних пластинок  $\text{SiO}_2$  (а – правовертальний кварц розміщено перед лівовертальним, б – лівовертальний кварц розміщено перед правовертальним, відповідно)

На рис. 3-а, б представлено розраховані спіралі Ейрі для двох випадків взаємного розміщення кристалічних пластинок  $\text{SiO}_2$ . Варто зауважити, що ВД у цьому випадку розраховували згідно співвідношення (1) з врахуванням наявності двох зразків та послідовності їх розташування в поляризаційній системі:  $\mathbf{M}'_S = \mathbf{R}(-\varphi) \mathbf{M}_S^L \mathbf{M}_S^R \mathbf{R}(\varphi)$  – рис. 3-а,  $\mathbf{M}'_S = \mathbf{R}(-\varphi) \mathbf{M}_S^R \mathbf{M}_S^L \mathbf{R}(\varphi)$  – рис. 3-б ( $\mathbf{M}_S^L, \mathbf{M}_S^R$  – МД для ліво- та правовертального кристалів). Як видно з рис. 3 напрям закручування ізогир відповідає знаку ОА кристалічної пластинки, розміщеної після поляризатора.

### Висновки

Отже, матричний метод Джонса можна однозначно використовувати для моделювання коноскопічних інтерференційних картин одновісних кристалів. Розраховані з використанням параметрів тестових кристалів  $\text{LiNbO}_3$  та  $\text{SiO}_2$ , КК достатньо добре узгоджуються з відомими експериментальними результатами. Крім того дану методику можна розширити для аналізу та обчислення інтерференційних картин у дихроїчних кристалах, двовісних кристалах, а також досліджуючи ефекти параметричної кристалооптики.

### Список використаної літератури

1. Борн М. Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф. – М.: Наука, 1970. – 856 с.
2. Романюк М. О. Практикум з кристалооптики і кристалофізики / М. О. Романюк. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2012. – 362 с.

3. Влох О.Г. Явления пространственной дисперсии в параметрической кристаллооптике / О.Г. Влох. — Львов: Вища школа, 1984. — 156 с.
4. Geday M. A. A new view conoscopic illumination of optically active crystals / M. A. Geday, A. M. Glazer // *J. Appl. Cryst.* — 2002. — Vol. 35. — P. 185-190.
5. Veiras F. Wide angle conoscopic interference patterns in uniaxial crystals / F. Veiras, M. Garea, L. Perez // *Applied Optics.* — 2012. — Vol. 51, No. 15. — P. 3081-3090.
6. Rudoy K. A. Conoscopic figures of optically active uniaxial crystals / K. A. Rudoy, B. V. Nabatov, V. I. Stroganov [et al.] // *Crystallography Reports.* — 2003. — V. 48, No. 2. — P. 300-304.
7. Kolesnikov A. Isochrome shapes in conoscopic patterns of uniaxial crystals / A. Kolesnikov, I. Kaplunov A. Ivanova [et al.] // *Ferroelectrics.* — 2012. — V. 441. — P. 75-83.
8. Nastishin Yu. A. Optical conoscopy of distorted uniaxial liquid crystals: computer simulation and experiment / Yu. A. Nastishin, O. B. Dovgyi, O. G. Vlokh // *Ukr. J. Phys. Opt.* — 2001. — V.2, №2. — P. 98-106.
9. Nastishin Yu. A. Computer simulation of conoscopic patterns for gyrotropic birefringent crystals / Yu. A. Nastishin, O. G. Vlokh, O. B. Dovgyi // *Ukr. J. Phys. Opt.* — 2001. — V.2, №3. — P. 133-140.
10. Vasylyk Yu. Conoscopic patterns for optically uniaxial gyrotropic crystals in the vicinity of isotropic point / Yu. Vasylyk, Yu. Nastishin, R. Vlokh // *Ukr. J. Phys. Opt.* — 2006. — V.7, №3. — P. 89-99.
11. Аззам Р. Эллипсометрия и поляризованный свет / Р. Аззам, Н. Башара. — М.: Мир, 1981. — 584 с.
12. Kobayashi J. Optical properties of superconducting  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCuO}_8$  / J. Kobayashi, T. Asahi, M. Sakurai [et al.] // *Phys. Rev. B* — 1996. — V.53, No. 17. — P. 11784-11795.

Стаття надійшла до редакції 21.02.2017  
прийнята до друку 27.06.2017

## MODELING THE CONOSCOPIC PATTERNS OF UNIAXIAL CRYSTALS

N. Ftomyn<sup>1</sup>, Y. Shopa<sup>2</sup>, I. Sudak<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Ivan Franko National University of Lviv  
Kyrylo and Mefodiy St., 8, 79005 Lviv, Ukraine  
e-mail: nazar.ftomyn@gmail.com*

<sup>2</sup> *Cardinal Stefan Wyszyński University in Warsaw  
ul. Dewajtis 5, 01-815 Warszawa  
e-mail: i.shopa@uksw.edu.pl*

A method of the calculus of conoscopic patterns for uniaxial crystals is considered. The effect of optical anisotropy (linear birefringence, optical activity) on conoscopic interference image is taken into account using Jones matrices. The conoscopic patterns are obtained for uniaxial LiNbO<sub>3</sub>, SiO<sub>2</sub> test materials.

**Key words:** Conoscopic pattern, birefringence, optical activity, Jones matrix

## МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНОСКОПИЧЕСКИХ КАРТИН ОДНООСНИХ КРИСТАЛЛОВ

Н. Фтомын<sup>1</sup>, Я. Шоп<sup>2</sup>, И. Судак<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Львовский национальный университет имени Ивана Франко  
ул. Кирилла и Мефодия 8, 79005 Львов, Украина  
e-mail: nazar.ftomyn@gmail.com*

<sup>2</sup> *Cardinal Stefan Wyszyński University in Warsaw  
ul. Dewajtis 5, 01-815 Warszawa  
e-mail: i.shopa@uksw.edu.pl*

Рассмотрена методика расчета коноскопических картин для одноосных кристаллов. Используя матрицы Джонса, учтено влияние оптической анизотропии (линейное двулучепреломления, оптическая активность) на коноскопические интерференционные картины. Получено коноскопические картины для тестовых одноосных кристаллов LiNbO<sub>3</sub>, SiO<sub>2</sub>.

**Ключевые слова:** Коноскопическая картина, двулучепреломления, оптическая активность, матрица Джонса