РОЗВИТОК ІДЕЇ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА: ВІД ДЕКАРТА ДО РІМАНА

Юрій Криницький, Андрій Ровенчак,

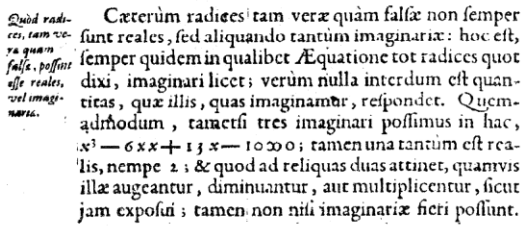
кафедра теоретичної фізики Львівського національного університету імені Івана Франка

У першій частині "Історія виникнення комплексних чисел" (читайте в журналі "Світ фізики", 2009. – № 3. – С. 3–9) було висвітлено зародження ідеї комплексного числа і перші спроби операцій з ними в XVI ст., пов'язані насамперед з іменами Джероламо Кардано й Рафаеля Бомбеллі. Пропонуємо читачам короткий огляд подальшого розвитку поняття комплексного числа та його застосувань.

XVII–XVIII сторіччя

Від часу першої появи в наукових працях комплексних чисел *per se*, яку найвірогідніше завдячуємо Рафаелеві Бомбеллі [1, p. 18–25], пройшло ще понад два сторіччя, доки уявні та комплексні числа стали звичним інструментом для математиків. Саме означення "уявний" (imaginarius) належить Рене Декартові (Rene Descartes), який у праці Geometria називав так "неправильні" (недійсні) корені рівняння [2, p. 76] (рис. 1), тобто ті числа, які ми тепер називаємо комплексними.

Рене Декарт [3]
(31.III.1596–11.II.1650)



Quòd radices, tam veræ quàm falſæ, poſſint eſſe reales, vel imaginariæ.

Cæterùm radices tam veræ quàm falſæ non ſemper ſunt reales, ſed aliquando tantùm imaginariæ: hoc eſt, ſemper quidem in qualibet Æquatione tot radices quot dixi, imaginari licet; verùm nulla interdum eſt quantitas, quæ illis, quas imaginamur, reſpondet. Quemadmodum, tametſi tres imaginari poſſimus in hac, $x^3 - 6xx + 13x - 1000$; tamen una tantùm eſt realis, nempe 2; & quod ad reliquas duas attinet, quamvis illæ augeantur, diminuantur, aut multiplicentur, ſicut jam expoſui; tamen non niſi imaginariæ fieri poſſunt.

Рис. 1. *Розділ, у якому Декарт пише про уявні числа. Він розглядає рівняння* $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$. *Знак, що нагадує розірвану зліва* ∞, *відповідає сучасному "=". Варто зазначити, що позначення* ∞ *для нескінченності ввів Джон Валліс, про якого йтиметься в наступному розділі*

У XVII–XVIII сторіччях з уявними числами намагалися працювати зокрема **Йоган Бернуллі I** (Johann Bernoulli I) і **Ґоттфрід Вільгельм Ляйбніц** (Gottfried Wilhelm Leibniz). Бернуллі отримав зв'язок між арктанґенсом і логарифмом, інтеґруючи вираз типу $\frac{1}{x^2 + a^2}$ з одного боку безпосередньо, а з іншого – за допомогою розкладу на прості дроби [4, 5].

Йоган Бернуллі I
(27.VII.1667–1.I.1748)

Ґоттфрід Вільгельм Ляйбніц
(1.VII(21.VI за ст. ст.). 1646–14.XI.1716)

Ляйбніц, намагаючись створити загальну теорію розв'язування алгебраїчних рівнянь, також застосовував уявні числа [6]. Наприклад, він показав, що

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}\,.$$

Йому ж належить розклад на лінійні множники виразу x^4+a^4:

$$x^4+a^4=\left(x+a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\left(x-a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\times$$
$$\times\left(x+a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(x-a\sqrt{\sqrt{-1}}\right),$$

опублікований 1702 року в журналі *Acta Eruditorum* [7, p. 223–225]. Однак, слід зауважити, що Ляйбніц вважав $\sqrt{\sqrt{-1}}$ числом нового типу.

Хибність цього твердження показав 1739 року французький математик Абрам Муавр (Abraham de Moivre) [7, p. 225], з іменем якого ми традиційно пов'язуємо формулу для степенів комплексних чисел. Цікаво, що в працях Муавра явно вона не фігурує, але трапляються різні споріднені вирази, наприклад, такий (1707 р., [8, p. 83] – зрозуміло, що тут використано сучасні позначення):

$$\cos\varphi=\frac{1}{2}(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)^{1/n}+$$
$$+\frac{1}{2}(\cos n\varphi-i\sin n\varphi)^{1/n}$$

та деякі інші [9].

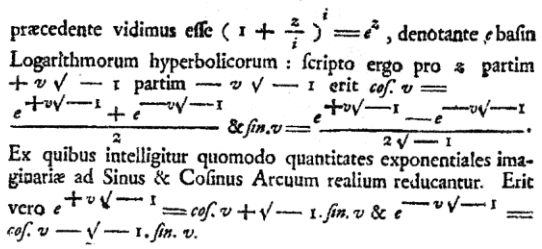
Абрам Муавр
(26.V.1667–27.XI.1754)

Багато особливо важливих результатів, щодо комплексних чисел, отримав **Леонард Ейлер** (Leonhard Paul Euler). Скажімо, у листі від 18.X.1740 до свого вчителя, Йогана Бернуллі, він зазначає, що розв'язок рівняння

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0\,,\quad y(0)=2\,,\quad y'(0)=0$$

можна подати і як $2\cos x$, і як $e^{-x\sqrt{-1}}$ [10]. Формули, що пов'язують тригонометричні функції з експонентою, опубліковані 1748 року [11, p. 104], див. рис. 2. Цікаво, що у цій же праці на стор. 90 введено позначення e для основи натурального логарифма.

Леонард Ейлер
(15.IV.1707–18(7 за ст. ст.). IX.1783)



præcedente vidimus esse $\left(1+\frac{z}{i}\right)^i = e^z$, denotante e basin Logarithmorum hyperbolicorum: scripto ergo pro z partim $+v\sqrt{-1}$ partim $-v\sqrt{-1}$ erit $cos.\,v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}}+e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$ & $sin.\,v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}}-e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$.
Ex quibus intelligitur quomodo quantitates exponentiales imaginariæ ad Sinus & Cosinus Arcuum realium reducantur. Erit vero $e^{+v\sqrt{-1}} = cos.\,v + \sqrt{-1}.sin.\,v$ & $e^{-v\sqrt{-1}} = cos.\,v - \sqrt{-1}.sin.\,v$.

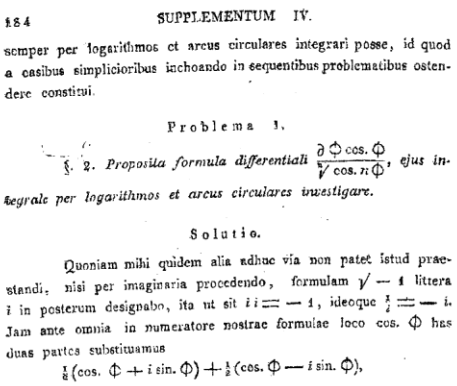
Рис. 2. *Фраґмент сторінки з праці Ейлера Introduction in analysin infinitorum*

Варто зазначити, що Ейлер не був відкривачем цих формул, принаймні англійський математик **Роджер Коутс** (Roger Cotes, 10.VII.1682–5.VI.1716) ще 1714 року знав такий зв'язок [12]:

$$\ln(\cos\varphi + i\sin\varphi = i\varphi\,.$$

Ейлер є також автором позначення і для уявної одиниці, яке він уперше використав 1777 року (друком ця праця вийшла 1794 [13], див. рис. 3).

Вважають [12], що загальноприйнятим це позначення стало завдяки Карлові Фрідріхові Ґауссу (Carl Friedrich Gauβ), який вжив його у своїй праці *Disquisitiones aritmeticae* [14], див. рис. 4. Таке твердження можна прийняти із застереженнями. Можливо, насамперед популярним воно стало серед німецьких математиків. Принаймні у Франції і Британії щонайменше до 1820–1830-их років зберігалося позначення $\vee -1$.



184 SUPPLEMENTUM IV.

semper per logarithmos et arcus circulares integrari posse, id quod a casibus simplicioribus inchoando in sequentibus problematibus ostendere constitui.

Problema 1.

§. 2. *Proposita formula differentiali* $\frac{\partial\Phi\cos.\Phi}{\sqrt[n]{\cos.n\Phi}}$, *ejus integrale per logarithmos et arcus circulares investigare.*

Solutio.

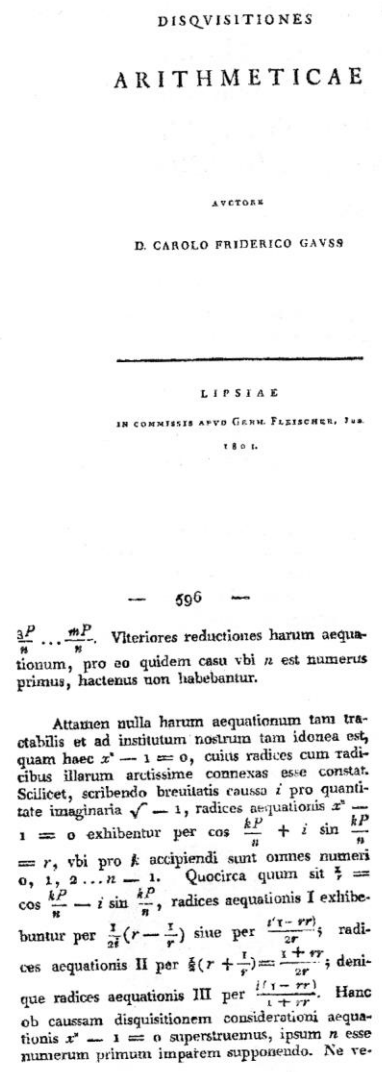
Quoniam mihi quidem alia adhuc via non patet istud praestandi, nisi per imaginaria procedendo, formulam $\sqrt{-1}$ littera i in posterum designabo, ita ut sit $ii = -1$, ideoque $\frac{1}{i} = -i$. Jam ante omnia in numeratore nostrae formulae loco cos. Φ has duas partes substituamus

$\frac{1}{2}(\cos.\Phi + i\sin.\Phi) + \frac{1}{2}(\cos.\Phi - i\sin.\Phi)$,

Рис. 3. *Фраґмент сторінки з праці Ейлера Institutionum calculi integralis*

Карл Фрідріх Ґаусс
(30.IV.1777–23.II.1855)

Ґауссові також належить сам термін "комплексне число" (numerus complexus), який він запровадив 1832 року [12].



DISQVISITIONES

ARITHMETICAE

AVCTORE

D. CAROLO FRIDERICO GAVSS

LIPSIAE

IN COMMISSIS APVD GERM. FLEISCHER, JUN.

1801.

— 596 —

$\frac{3P}{n} \ldots \frac{mP}{n}$. Viteriores reductiones harum aequationum, pro eo quidem casu vbi n est numerus primus, hactenus non habebantur.

Attamen nulla harum aequationum tam tractabilis et ad institutum nostrum tam idonea est, quam haec $x^n - 1 = 0$, cuius radices cum radicibus illarum arctissime connexas esse constat. Scilicet, scribendo breuitatis caussa i pro quantitate imaginaria $\sqrt{-1}$, radices aequationis $x^n - 1 = 0$ exhibentur per $\cos\frac{kP}{n} + i \sin\frac{kP}{n} = r$, vbi pro k accipiendi sunt omnes numeri $0, 1, 2 \ldots n-1$. Quocirca quum sit $\frac{1}{r} = \cos\frac{kP}{n} - i\sin\frac{kP}{n}$, radices aequationis I exhibebuntur per $\frac{1}{2i}(r - \frac{1}{r})$ siue per $\frac{i(1-rr)}{2r}$; radices aequationis II per $\frac{1}{2}(r + \frac{1}{r}) = \frac{1+rr}{2r}$; denique radices aequationis III per $\frac{i(1-rr)}{1+rr}$. Hanc ob caussam disquisitionem considerationi aequationis $x^n - 1 = 0$ superstruemus, ipsum n esse numerum primum imparem supponendo. Ne ve-

Рис. 4. *Сторінки з праці Ґаусса Disquisitiones aritmeticae*

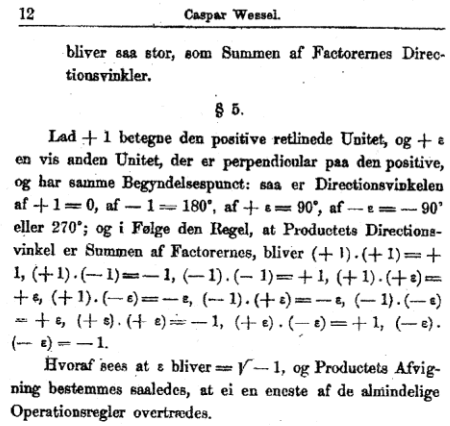
Геометрична інтерпретація комплексних чисел

Перші відомі спроби геометричної інтерпретації комплексних чисел належать англійському математикові **Джонові Валлісу** (John Wallis). Цей учений уперше ввів від'ємні абсциси [15], надавши змісту різним напрямкам числової осі. У праці *A Treatise of Algebra* (1685), фактично узагальнюючи цю ідею й намагаючись дати інтерпретацію від'ємної площі, він дуже близько підійшов до ідеї виходу за межі дійсної осі [12]. Ще раніше, 1673 року, Валліс робив спроби розв'язувати квадратні рівняння з від'ємним дискримінантом за допомогою геометричних побудов [16]. На жаль, ці потуги не були вдалими.

Джон Валліс
(23.XI.1616–28.X.1703)

Правдоподібно, автором першої успішної спроби геометричної інтерпретації комплексних чисел був норвежець **Каспар Вессель** (Caspar Wessel, 8.VI.1745–25.III.1818), земельний інспектор, який 1797 року зробив перед Данською Королівською Академією доповідь "Про аналітичне зображення напрямків...", що була згодом опублікована у часописі Академії (данською мовою): "Om Directionens analytiske Betegning, et Fors ø g, anvendt fornemmelig til plane og sphæriske Polygoners Opl ø sning" [17]. Крім власне геометричного зображення, у цій праці встановлено відому відповідність між арифметичними операціями над комплексними числами і поворотами площини.

Цікаво зазначити, що для позначення Вессель використовував літеру ε ? (див. рис. 5).



12 Caspar Wessel.

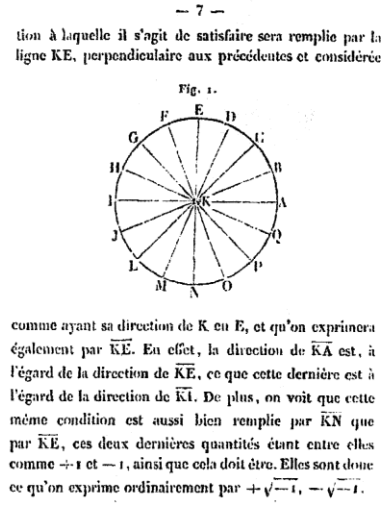
bliver saa stor, som Summen af Factorernes Directionsvinkler.

§ 5.

Lad + 1 betegne den positive retlinede Unitet, og + ε en vis anden Unitet, der er perpendicular paa den positive, og har samme Begyndelsespunct: saa er Directionsvinkelen af + 1 = 0, af — 1 = 180°, af + ε = 90°, af — ε = — 90° eller 270°; og i Følge den Regel, at Productets Directionsvinkel er Summen af Factorernes, bliver (+ 1).(+ 1) = + 1, (+ 1).(— 1) = — 1, (— 1).(— 1) = + 1, (+ 1).(+ ε) = + ε, (+ 1).(— ε) = — ε, (— 1).(+ ε) = — ε, (— 1).(— ε) = + ε, (+ ε).(+ ε) = — 1, (+ ε).(— ε) = + 1, (— ε).(— ε) = — 1.

Hvoraf sees at ε bliver = $\sqrt{-1}$, og Productets Afvigning bestemmes saaledes, at ei en eneste af de almindelige Operationsregler overtrædes.

Рис. 5. *Сторінка з праці Весселя, де фактично введено комплексну площину*



— 7 —

tion à laquelle il s'agit de satisfaire sera remplie par la ligne KE, perpendiculaire aux précédentes et considérée

Fig. 1.

comme ayant sa direction de K en E, et qu'on exprimera également par $\overline{KE}$. En effet, la direction de $\overline{KA}$ est, à l'égard de la direction de $\overline{KE}$, ce que cette dernière est à l'égard de la direction de $\overline{KI}$. De plus, on voit que cette même condition est aussi bien remplie par $\overline{KN}$ que par $\overline{KE}$, ces deux dernières quantités étant entre elles comme + 1 et — 1, ainsi que cela doit être. Elles sont donc ce qu'on exprime ordinairement par $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$.

Рис. 6. *Сторінки з праці Арґана [18]*

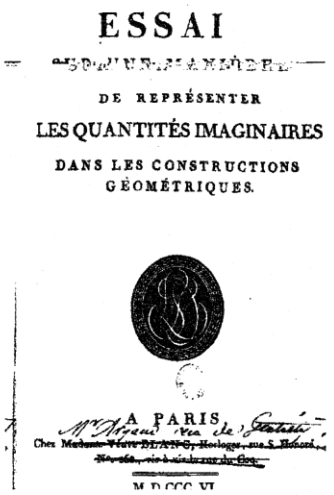
Незалежно від Весселя до аналогічних висновків прийшов 1806 року швайцарець **Жан–Робер Арґан** (Jean–Robert Argand, 18.VII.1768–13.VIII.1822), також непрофесійний математик (див. рис. 6).

Близько 1800 року Ґаусс також розвинув ідею зображення комплексного числа на площині, однак ці результати він тоді не опублікував [12].

Взагалі кажучи, дивно, що до геометричної інтерпретації не прийшов Ейлер, маючи фактично готові формули. Ймовірно, у нього не виникало такої потреби.

Створення теорії функцій комплексної змінної

Французький математик **Жан лє Рон д'Аламбер** (Jean le Rond d'Alembert) був одним із перших, хто фактично започаткував дослідження функцій комплексної змінної і дослідив умови, за яких функція є аналітичною [19]. Зараз ці умови відомі як умови д'Аламбера–Ейлера–Коші–Рімана, або просто Коші–Рімана.



ESSAI

DE REPRÉSENTER

LES QUANTITÉS IMAGINAIRES

DANS LES CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES.

A PARIS

M DCCC VI

Жан лє Рон д'Аламбер (16.XI.1717–29.X.1783)

Огюстен Луї Коші
(21.VIII.1789–23.V.1857)

Огюстен Луї Коші (Augustin Louis Cauchy) дуже глибоко розвинув теорію функцій комплексної змінної [20]. Інтегралом Коші називають інтегральне зображення аналітичної функції, він є автором теорії лишків та ін. Коші, зокрема, належить термін "спряжені" (conjuguees) на позначення пари чисел $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ [21, p. 158].

У дисертації німецького математика **Ґеорґа Фрідріха Бернгарда Рімана** (Georg Friedrich Bernhard Riemann) "Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse" ("Основи загальної теорії функцій однієї комплексної змінної", 1851) [22] послідовно викладено теорію аналітичних функцій з геометричного погляду, введено поняття, відоме як "ріманова поверхня".

Ґеорґ Фрідріх Бернгард Ріман
(17.IX.1826–20.VII.1866)

Імена Коші та Рімана фактично символізують початок нового розділу математики комплексних чисел – комплексного аналізу. Для завершення ж попереднього варто згадати ірландського математика **Вільяма Рована Гамільтона** (Sir William Rowan Hamilton), який аксіоматизував комплексні числа, розглядаючи їх як упорядковані пари дійсних чисел, так звані "алґебраїчні пари" (algebraic couples). Доповідь на цю тему він виголосив перед Ірландською Королівською Академією 4 листопада 1833 року [23]. Розвиваючи свої ідеї, Гамільтон побудував гіперкомплексні числа – кватерніони.

Вільям Рован Гамільтон
(4.VIII.1805–2.IX.1865)

Завершення

Споглядаючи цей короткий огляд розвитку уявлень про комплексні числа, ми можемо зробити деякі цікаві висновки.

Насамперед, комплексні числа виникли не через бажання ранніх математиків уміти виконувати математичні дії (а саме добувати квадратний корінь) над будь-якими числами (включно із від'ємними) просто, щоб уміти. Насправді, вони фактично були змушені навчитися це робити через "незвідний випадок", який виникав у цілком реальних задачах.

По-друге, відсутність такої потреби в інших задачах не стимулювала вчених продовжувати швидко розвивати теорію комплексних чисел, адже від Кардано і Бомбеллі до Ейлера пройшло 200 років!

Наприкінці скажемо, що середньовічні математики не мали за звичку вивчати властивості таких абстракцій, якими, без сумніву, були комплексні числа. Мабуть, якби подібні об'єкти виникли у наш час, на створення їхньої загальної теорії довелося б чекати лише кільканадцять років.

Література

[1] P. J. Nahin. *An imaginary tale: the story of* $\sqrt{-1}$ // Princeton University Press, 1998.

[2] R. Des Cartes. *Geometria.* – Amstelædami, 1659; http://gallica.bnf.fr

[3] J. J. O'Connor, E. F. Robertson. *The MacTutor History of Mathematics archive*; http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk (2007).

Тут і далі саме за цим джерелом наводимо біографічні дані вчених, а також їхні портрети.

[4] F. Cajori// Am. Math. Mon., 1913. – **20**. – No. 2. – 35 S.

[5] G. A. Miller// Natl. Math. Mag., 1943. – **17**. – 212 S.

[6] R. B. McClenon// Amer. Math. Mon., 1923. – **30**. – 369 S.

[7] R. Laubenbacher, D. Pengelley. *Mathematical Expeditions: Chronicles by the Explorers.* – Springer, 2000.

[8] E. Maor. *Trigonometric delights.* – Princeton University Press, 2002.

[9] D. R. Bellhouse, Ch. Genest// Statistical Science, 2007. – **22**. – 109 S.

[10] L. Douglas. *The history and utility of complex numbers;* http://faculty.college-prep.org/~lew/talks/Complex%20Numbers.pdf (2001).

[11] L. Eulero. *Introductio in analysin infinitorum. Tomus primus.* – Bousquet: Lausannæ, 1748. http://math.dartmouth.edu/~euler/

[12] D. R. Green, Math.// Gazette **60**, 99, 1976.

[13] L. Eulero, *Institutionum calculi integralis. Vol. IV.* – Petropoli: Academiae Imperialis Scientarum, 1794. http://math.dartmouth.edu/~euler/

[14] C. F. Gauss. *Disquisitiones aritmeticae.* – Lipsie, 1801. http://gallica.bnf.fr

[15] А. И. Бородин, А. С. Бугай. *Биографический словарь деятелей в области математики.* – Київ: Радянська школа, 1979.

[16] F. Cajori// Am. Math. Mon., 1912. – **19**. – No. 10/11, P. 167–171.

[17] C. Wessel. Nye Samling af det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, 1799. – **5**. 469 P.; Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, 1895. – **18**. – 5 P.

[18] J.–R. Argand. *Essai sur une manière de représénter les quantités imaginaires dans les constructions géomeriqués.* – Paris, 1806. http://gallica.bnf.fr

[19] D'Alembert. *Essai d'une nouvelle theorie de la résistance des fluides.* – Paris, 1752. http://gallica.bnf.fr

[20] F. Smithies. *Cauchy and the Creation of Complex Function Theory.* – Cambridge University Press, 1997.

[21] A.–L. Cauchy. *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique. 1re partie. Analyse algébrique.* – Paris: Imprimerie royale, 1821. http://gallica.bnf.fr

[22] B. Riemann, Ph. D. Thesis. – Gottingen, 1851. http://www.emis.de/classics/Riemann/ http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Grund/

[23] W. R. Hamilton// Trans. Royal Irish Acad., 1837. – **17**. – P. 293–422. http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/PureTime/

Світ фізики

№1 2010

науково-популярний журнал

...Русини таки дождуться свого університету в Галичині, коли тільки працюватимуть дальше в науках і вірно постоють за свої права. Нема здобутків на світі без праці і жертв.

Іван Пулюй

165 років від дня народження Івана Пулюя

світ фізики
науково-популярний журнал
1(49)'2010

Журнал "**СВІТ ФІЗИКИ**",
заснований 1996 року,
реєстраційне свідоцтво № КВ 3180
від 06.11.1997 р.
Виходить 4 рази на рік

Засновники:
Львівський національний університет
імені Івана Франка,
Львівський фіз.-мат. ліцей,
СП "Євросвіт"

Комп'ютерне макетування та друк
СП "Євросвіт", наклад 1000 прим.

Адреса редакції:
редакція журналу "Світ фізики"
вул. Саксаганського, 1,
м. Львів 79005, Україна
тел. у Львові 380 (0322) 39 46 73
у Києві 380 (044) 416 60 68
phworld@franko.lviv.ua; sf@ktf.franko.lviv.ua
www.franko.lviv.ua/publish/phworld

Світова наукова громадськість 2010 року відзначатиме 50 років від дня створення першого лазера, одного з найреволюційніших винаходів сучасності.

У 1960 році американський учений Теодор Мейман продемонстрував перший працюючий лазер.

Нині отримано генерацію на понад 1000 об'єктах: кристалах, активованому склі, рідинах, напівпровідниках, плазмах, газах, хемічних реакціях, ударних хвилях тощо.

На базі наукових досліджень з'явився новий напрям у фізиці – квантова електроніка.

Лазери класифікують на:

твердотільні; напівпровідникові; рідинні; газові на атомних переходах; на йонних переходах; молекулярні; фотодисоціаційні; електройонізаційні; газодинамічні; хемічні; плазменні; ексімерні; лазери на вільних електронах; рентгенівські лазери; гамма-лазери; лазери з перебудовою довжини хвилі; комбінаційні лазери; лазери на вільних електронах.

Лазер має велике майбутнє.

Лазер, що генерує інтенсивні та потужні промені світла, є компонентом безлічі пристроїв, які ми використовуємо щодня – від DVD-програвачів до сканерів у супермаркетах і оптоволоконних кабелях, через які передається інформація в Інтернеті. Його планують використовувати для розгортання білків і нуклеосинтезу.

ЗМІСТ