Рекомендовано до друку
кафедрою астрофізики
Протокол № 5 від 26.05.2000

Уклала Любов Янків-Вітковська

Редактор М. Мартиняк

ТЕОРЕТИЧНА АСТРОФІЗИКА
Методичні рекомендації
до виконання лабораторних робіт
для студентів 4-го курсу фізичного факультету

Підп. до друку 19.06.2001. Формат 60x84/16
Папір друк. Різогр. друк. Умовн. друк. арк. 2.9.
Тираж 100 прим. Зам. 249
Видавничий центр Львівського національного
університету імені Івана Франка
79000 Львів, вул. Дорошенка, 41

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1

Побудова профілів фраунгоферових ліній

Мета роботи: вивчити й освоїти методику побудови профілів фраунгоферових ліній; навчитися обчислювати з побудованого профілю залишкову інтенсивність, глибину, півширину, доплерівську півширину, еквівалентну ширину лінії; навчитися обчислювати гаусіани цієї лінії; визначити зміну головних спектральних параметрів профілю у разі переміщення від центра до краю диска Сонця.

Прилади та матеріали: атлас профілів фраунгоферових ліній; таблиці фраунгоферових ліній; планіметр.

Література:

1. *Мартынов Д.Я.* Курс практической астрофизики.
2. *Амбарцумян В.А., Мустель Э.Р., Северный А.Б., Соболев В.В.* Теоретическая астрофизика.
3. *Каули Ч.* Теория звездных спектров.

Методика виконання

Головна проблема теорії зоряних спектрів полягає в отриманні точних відомостей про фізичний стан атмосфери зорі. Виняткову роль в успішному вирішенні цієї проблеми відіграють *профілі* спектральних ліній. Наявність ліній поглинання в спектрі зорі означає, що *інтенсивність* її неперервного спектра в певних частотах ослаблена. Ці частоти відповідають переходам електронів від рівня з нижчою енергією на рівень з вищою енергією. *Лінії поглинання*, які здаються темними різкими лініями на фоні неперервного спектра, насправді не є цілком чорними. В межах кожної лінії інтенсивність змінюється за особливими законами, які пов'язані зі структурою зовнішніх сонячних шарів.

Такий розподіл інтенсивності всередині спектральної лінії в астрофізиці характеризують терміном *профіль лінії*. Отримавши в шкалі інтенсивностей залежність *між інтенсивністю* і *довжиною хвилі*, відшукують характеристики, що визначають фізичний стан світила.

Такою характеристикою перш за все є *неперервний спектр*. Від нього, як від головного рівня відліку, відраховують розподіл інтенсивності у самій лінії. Під час дослідження Сонця для ліній поглинання сонячного спектра за головний рівень беруть неперервний спектр (*континуум*) центра сонячного диска. Як звичайно, під континуумом розуміють той рівень інтенсивності, який вдалось би реєструвати, якби не було ліній поглинання.

Визначення рівня континууму – одне з кардинальних питань зоряних спектрів. Його складність зумовлена, здебільшого, взаємним перекриттям (*блендуванням*) спектральних ліній.

Розподіл інтенсивності всередині лінії, або, як зазначено вище, профіль лінії, має певну *глибину*, *ширину* і *форму*. Для кількісної характеристики профілю спектральної лінії вводять так звану *залишкову інтенсивність* r_λ – відношення інтенсивності I_λ за заданої довжини хвилі всередині лінії до інтенсивності неперервного спектра I_λ^0 сусідньої ділянки спектра:

$$r_\lambda = I_\lambda / I_\lambda^0.$$

Зрозуміло, що для неперервного спектра залишкова інтенсивність r_λ=1. Величину ж r_{λ_0}, що відповідає найменшому значенню r_λ, називають центральною інтенсивністю лінії r_{λ_0}, а $R_\lambda = 1 - r_\lambda$ – глибиною профілю лінії.

Кожна лінія має властиву їй *природну ширину*, зумовлену тим, що енергетичні рівні самі по собі розмиті. Загальне розмиття залежить від механізмів, що викликають розширення лінії. Відстань між точками профілю, що відповідає половині залишкової інтенсивності (r_λ=0.5), називають *повною півшириною* лінії. Крім того, кожна лінія має характерну для неї *доплерівську півширину*, що виникає внаслідок теплового хаотичного руху поглинальних атомів. Внутрішні частини контуру лінії називають її *ядром*, а зовнішні частини лінії (щодо її центра) – *крилами*.

Для цілої низки задач велике значення має так зване *повне поглинання в лінії*, або, іншими словами, *еквівалентна ширина* лінії. Вона дорівнює площі, що є між профілем лінії і рівнем неперервного спектра:

$$W_\lambda = \int R_\lambda \, d\lambda .$$

Інтегрування виконують по всій площині лінії. Одиниці вимірювання ангстреми або міліангстреми.

Зрозуміло, що величина W_λ характеризує силу або інтенсивність цієї лінії в спектрі. Чим більша еквівалентна ширина лінії, тим сильніша ця лінія поглинання.

Профіль спектральної лінії з достатньою точністю можна записати у вигляді:

$$f(\Delta\lambda) = \delta_1(\Delta\lambda) R_0 e^{-(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda D})^2} + \delta_2(\Delta\lambda) b_1 \frac{1}{1+(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda\alpha})^2}, \qquad (1)$$

де R_0 – центральна глибина лінії; b_1 – емпірична стала; $\Delta\lambda D$ – півширина доплерівського ядра:

$$\Delta\lambda D = (\Delta\lambda)^{1/2} / 2\ln\sqrt{2},$$

$\Delta\lambda\alpha$ – півширина еквівалентного дисперсійного контуру, що є крилами ліній, $\Delta\lambda\alpha$ пов'язана з півшириною і доплерівською півшириною (з точністю до кількох сотих Å), таким співвідношенням:

$$(\Delta\lambda)^{1/2} = \frac{\Delta\lambda D + \Delta\lambda\alpha}{2}.$$

Функції δ_1 і δ_2 такі, що

$$\delta_1(\Delta\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{при } |\Delta\lambda| < \Delta\lambda_0; \\ 0 & \text{при } |\Delta\lambda| > \Delta\lambda_0; \end{cases}$$

$$\delta_2(\Delta\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{при } |\Delta\lambda| > \Delta\lambda_0; \\ 0 & \text{при } |\Delta\lambda| < \Delta\lambda_0. \end{cases}$$

Тут $\Delta\lambda_0$ – межа між ядром лінії, де допустиме доплерівське уявлення і крилом, де допустиме дисперсійне уявлення.

Сумарне зображення контуру у вигляді (1) – це так зване уявлення контуром Фойгта. Причому перший доданок – це так звана функція Гаусса (гаусіана), другий – функція дисперсійного типу.

Побудова профілів ліній

В атласі «Профили избранных фраунгоферовых линий для разных положений центр-край на диске Солнца», виданому ГАО АН УРСР за редакцією Е.А.Гуртовенка, наведено близько 100 профілів ліній поглинання. Профілі приводяться для 5-ти положень на диску Сонця – $\cos\theta = 1; 0.8; 0.6; 0.44; 0.28$.

Для кожної лінії є таблиця, у якій зазначено: елемент, довжину хвилі цієї лінії, відстань від центра лінії, інтенсивності для фіолетового і червоного крил на певних відстанях від центра лінії у п'яти положеннях на диску Сонця.

У цій роботі потрібно побудувати такі профілі на міліметрівці для двох точок диска Сонця: $\cos\theta = 1$ і $\cos\theta = 0.28$, в такому масштабі: 1 см по осі абсцис відповідає 20 mÅ, 1 см по осі ординат відповідає 0.02 одиниць інтенсивності в частках інтенсивності континууму. Зрозуміло, що інтенсивність континууму прийнято за одиницю.

Потрібно обчислити центральну залишкову інтенсивність, центральну глибину лінії, повну півширину, обчислити площу S, що обмежена контуром лінії. Враховуючи ціну однієї клітинки, обчислити еквівалентну ширину профілю цієї лінії. Всі ці обчислення виконати для двох точок сонячного диска: $\cos\theta = 1$ і $\cos\theta = 0.28$. Зазначити, як змінюється центральна глибина, півширина й еквівалентна ширина у разі переходу від центра до краю сонячного диска.

Побудова гаусіан

Профіль Гаусса цієї лінії, як зазначено вище, має вигляд

$$f(\Delta\lambda) = \delta_i(\Delta\lambda)\, R_0\, e^{-(\Delta\lambda/\Delta\lambda_D)^2},$$

де $\delta_i(\Delta\lambda) = 1$ у тій частині лінії, де справджується уявлення Гаусса.

Треба побудувати гаусіану для заданої лінії (у центрі диска Сонця). Зіставити гаусіану зі спостережуваним контуром лінії. Визначити $\Delta\lambda_0$ – відстань, на якій профіль Гаусса перестає описувати спостережуваний профіль.

Зміст роботи

1. Побудувати спостережуваний профіль заданої лінії.
2. Визначити центральну залишкову інтенсивність, глибину, півширину, доплерівську півширину, еквівалентну ширину лінії для центра і краю диска Сонця.
3. Обчислити гаусіану заданої лінії. Зіставити її зі спостережуваним профілем (у центрі сонячного диска). Обчислити інтеграл від гаусіани і зіставити з попередніми результатами.

Зміст звіту

1. Коротко описати теорію питання.
2. Подати нанесені на міліметрівці профілі лінії.
3. Результати обчислень звести в таблицю:

λ, Å	R_0		$(\Delta\lambda)^{1/2}$		W_λ, м Å		$\Delta\lambda D$		λ_0	Wc / Wp
Елемент	$\cos\theta =$ 1	$\cos\theta =$ 0.28	$\cos\theta =$ 1	$\cos\theta =$ 0.28	$\cos\theta =$ 1	$\cos\theta =$ 0.28	$\cos\theta =$ 1	$\cos\theta =$ 0.28		

4. Роботу можна виконувати за допомогою комп'ютера (розрахунки і побудова кривих).

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2

Вивчення загасання у фраунгоферових лініях методом функцій Фойгта

Мета роботи: освоїти методику вивчення загасання у фраунгоферових лініях; навчитися опрацьовувати профілі фраунгоферових ліній методом функцій Фогта; визначити сталу загасання профілів ліній для центра і краю сонячного диска; з'ясувати зміну сталої загасання вздовж крила лінії і в разі переходу центр–край на диску Сонця.

Матеріали: спостережувальні профілі фраунгоферових ліній у центрі і на краю диска Сонця; таблиці функцій Фойгта.

Методика виконання

Загасання у фраунгоферових лініях – це одна з важливих, ще не вирішених проблем вивчення сонячного спектра. Серйозним гальмом вивчення загасань у слабких лініях тривалий час була недостатня роздільна здатність сонячних спектрографів.

Сьогодні завдяки отриманню високоточних спостережуваних профілів ліній поглинання збільшилися вимоги до теоретичних розрахунків *сталої загасання*. Дуже важко вирішити питання про те, чи залежить стала загасання переважно від загасання унаслідок випромінювання, чи загасання унаслідок зіткнень і за яких умов переважає той чи інший ефект.

Звичайно припускають, що порівняно з загасанням випромінювання, загасанням унаслідок зіткнень у зоряних атмосферах можна знехтувати.

Розглянемо процеси загасання класичного атома-осцилятора внаслідок випромінювання. Енергія випромінювального осцилятора спадає згідно з законом

$$E = E_0 e^{-\gamma t},$$

де $\gamma_0 = \frac{8\pi^2 e^2}{3mc} \cdot \frac{1}{\lambda^2} = \frac{0.22}{\lambda^2}$ – це *класична стала загасання*. Хвилі, які випромінює такий загасальний осцилятор, утворюють не безмежно тонку спектральну лінію, а лінію кінцевої ширини. Строго монохроматичне випромінювання (тобто абсолютно різка лінія) отримують тільки тоді, коли є безмежна послідовність хвиль сталої амплітуди.

Величину τ_0, обернену до класичної сталої загасання, називають *часом загасання осцилятора*.

У разі достатніх тисків поряд з загасанням унаслідок випромінювання суттєву роль починає відігравати загасання осцилятора внаслідок зіткнень. У разі кожного зіткнення коливання осцилятора на момент припиняється і майже відразу ж збуджується нове коливання з довільною фазою і амплітудою. Інакше кажучи, зіткнення зменшують послідовність випромінювальних хвиль, а також збільшують немонохроматичність спектральної лінії. Якщо τ – середній проміжок часу між зіткненнями, то випромінювальний цуг хвиль триватиме упродовж $1/\tau$ с і стале загасання внаслідок зіткнень $\gamma_c = 2/\tau$.

Отже, у разі врахування одночасного загасання внаслідок випромінювання і загасання внаслідок зіткнень вводять *ефективну сталу загасання* $\gamma = \gamma_0 + \gamma_c$. Обчислення дають для γ_0 і γ_c значення порядку 10^8.

Точний теоретичний розрахунок γ дуже складний. Тому емпіричне визначення сталої загасання є важливою і необхідною задачею.

Фотоелектричні спостереження, які дають високоточні лінії поглинання, дають змогу виконати такий емпіричний аналіз щодо загасання.

Більшість фраунгоферових ліній має профілі, які досить добре можна уявити профілем Фойгта. З визначення функція Фойгта – це накладання функції дисперсійного типу

$$f(x) = \frac{C_1}{1 + \frac{x^2}{\beta_1^2}} \qquad x \to \Delta\lambda$$

і функції Гаусса

$$f(x) = C_2 e^{-x^2/\beta_2^2},$$

де C_1 і C_2 – сталі; x – відстань від центра лінії. У цьому випадку фойгтівську функцію характеризуватимуть два параметри: β_1 і β_2, де β_1 – півширина загасального профілю, β_2 – доплерівська півширина.

З теорії функції Фойгта випливає, що $\gamma/\gamma_0 = 16.96\,\beta_1$, де β_1 у міліангстремах. Справді, $\gamma_0 = 5.9 \cdot 10^{-2}\ M\ ^{\circ}A$, тобто щоб отримати відношення справжнього загасання в лінії до класичного, треба його помножити на $1/5.9 \cdot 10^{-2} = 16.96$ і врахувати, що $\gamma = \beta_1$, якщо β_1 виражено у міліангстремах.

На підставі великої кількості досліджень з'ясовано, що профілі фраунгоферових ліній підлягають такій дії загасання, яке, в крайньому разі, на два порядки перевищує класичне загасання внаслідок випромінювання: $\gamma / \gamma_0 = 100$.

Опрацювання профілів ліній методом функцій Фойгта

Профілі фраунгоферових ліній методом функцій Фойгта опрацьовують так. З профілю лінії знімають такі параметри: центральну глибину R_0, повні ширини лінії при $0.5R_0 \to \widetilde{h}_{05}$, $0.4R_0 \to \widetilde{h}_{04}$, $0.3R_0 \to \widetilde{h}_{03}$, $0.2R_0 \to \widetilde{h}_{02}$, $0.1R_0 \to \widetilde{h}_{01}$, $0.5R_0 \to \widetilde{h}_{005}$.

Для заданих ширин ліній на різних глибинах профілю визначають їхні відношення до півширини:

$$\frac{h_{04}}{h_{05}}, \frac{h_{03}}{h_{05}}, \frac{h_{02}}{h_{05}}, \frac{h_{01}}{h_{05}}, \frac{h_{005}}{h_{05}}.$$

З таблиць Фойгта для відповідних значень цих відношень $\frac{h}{h_{05}}$, використовуючи у разі потреби екстраполяцію, визначаємо параметр b_1. Далі за співвідношенням $\beta_1 = b_1 \cdot h_{05}$ знаходимо параметр β_1, тобто півширину загасального профілю. Оскільки $\gamma / \gamma_0 = 16.96\,\beta_1$, то отримуємо значення γ / γ_0. Класичну сталу загасання для лінії заданої довжини хвилі, як відомо, можна обчислити за формулою $\gamma_0 = \frac{0.22}{\lambda^2} \cdot 10^8$, де λ виражена в мікронах. Отже, маємо і загасання γ профілю досліджуваної фраунгоферової лінії. Отримана стала загасання γ є емпіричною величиною, оскільки вона визначена зі спостережуваного профілю.

Для зразка, нижче наведено таблицю, в якій відображено послідовність дій у разі отримання емпіричної сталої загасання методом функцій Фойгта. Розрахунки стосуються центра сонячного диска, де $\cos\theta = 1$. Елемент x, довжина хвилі λ.

h / h_{05}	Екстрапол	b_1	β_1	γ / γ_0	γ
$\frac{h_{04}}{h_{05}} = \frac{70}{61} = 1.1475$	0	0	0	0	0
$\frac{h_{03}}{h_{05}} = \frac{81}{61} = 1.3279$	1.3264 1.3282	0.05 0.05383 0.06	7.1126	120.63	$69.845\ 10^8$
$\frac{h_{02}}{h_{05}} = \frac{99}{61} = 1.6393$	1.6284 1.8220	0.20 0.1940 0.22	25.0202	425.84	$246.13\ 10^8$
$\frac{h_{01}}{h_{05}} = \frac{130}{61} = 2.1311$	2.1167 2.1630	0.20 0.2062 0.22	25.1564	426.65	$247.03\ 10^8$
$\frac{h_{005}}{h_{05}} = \frac{170}{61} = 2.7869$	2.7617 2.8635	020 0.2049 0.22	24.9978	423.96	$245.47\ 10^8$

З цієї таблиці видно, що стала загасання γ збільшується в крилах ліній. Це означає, що γ зростає з глибиною в атмосфері Сонця.

Аналогічні розрахунки потрібно виконати і для профілів у точці $\cos\theta = 0.28$ диска. Оскільки ці профілі на краю диска утворюються в вищих шарах сонячної атмосфери, то стала загасання γ повинна для точки $\cos\theta = 0.28$ зменшитись.

Зміст роботи

1. Таблиця функцій Фойгта додається.
2. Побудувати профілі ліній для точок $\cos\theta = 1$ і $\cos\theta = 0.28$.
3. Знайти потрібні параметри профілю: R_0, h_{05} і h.
4. З таблиць відшукати b_1.
5. Розрахувати сталу загасання профілів у $\cos\theta = 1$ і $\cos\theta = 0.28$.
6. Порівняти отримані дані про сталу загасання для різних точок диска.

Зміст звіту

1. Коротко описати теорію питання.
2. Отримані результати записати у таку таблицю:

h / h_{05}	b_1	β_1	γ / γ_0	γ

ТАБЛИЦЯ ФУНКЦІЙ ФОЙГТА

h_{04} / h_{05}	h_{03} / h_{05}	h_{02} / h_{05}	h_{01} / h_{05}	h_{005} / h_{05}	b_1
1.1497	1.3179	1.5239	1.8226	2.0789	0.00
1.1502	1.3195	1.5275	1.8319	2.0978	0.01
1.1508	1.3211	1.5313	1.8416	2.1180	0.02
1.1514	1.3228	1.5352	1.8518	2.1395	0.03
1.1520	1.3246	1.5392	1.8625	2.1622	0.04
1.1526	1.3264	1.5434	1.8737	2.1863	0.05
1.1533	1.3282	1.5477	1.8853	2.2118	0.06
1.1539	1.3301	1.5522	1.8974	2.2388	0.07
1.1546	1.3320	1.5568	1.9101	2.2675	0.08
1.1553	1.3340	1.5816	1.9233	2.2979	0.09
1.1560	1.3361	1.5663	1.9371	2.3302	0.10
1.1575	1.3404	1.5771	1.9664	2.4015	0.12
1.1592	1.3451	1.5885	1.9987	2.4815	0.14
1.1610	1.3502	1.6008	2.0344	2.5692	0.16
1.1625	1.3558	1.6141	2.0737	2.6633	0.18
1.1650	1.3618	1.6284	2.1167	2.7617	0.20
1.1672	1.3684	1.6439	2.1630	2.8633	0.22
1.1696	1.3756	1.6605	2.2123	2.9675	0.24
1.1722	1.3833	1.6786	2.2843	3.0732	0.26
1.1750	1.3917	1.6981	2.3187	3.1800	0.28
1.1779	1.4006	1.7191	2.3751	3.3876	0.30
1.1811	1.4102	1.7418	2.4332	3.3936	0.32
1.1846	1.4204	1.7661	2.4929	3.5037	0.34
1.1883	1.4312	1.7919	2.5541	3.6118	0.36
1.1923	1.4427	1.8189	2.6163	3.7198	0.38
1.1968	1.4548	1.8472	2.6793	3.8273	0.40
1.1991	1.4612	1.8618	2.7112	3.8809	0.41
1.2016	1.4673	1.8766	2.7431	3.9345	0.42
1.2042	1.4746	1.8915	2.7751	3.9880	0.43
1.2069	1.4816	1.9066	2.8073	4.0414	0.44
1.2097	1.4889	1.9219	2.8393	4.0946	0.45
1.2126	1.4983	1.9372	2.8717	4.1478	0.46
1.2155	1.5039	1.9527	2.9038	4.2008	0.47
1.2185	1.5116	1.9683	2.9359	4.2537	0.48
1.2216	1.5193	1.9840	2.9680	4.3064	0.49
1.2247	1.5273	2.000	8.0005	4.3565	0.50

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3

Розрахунок профілів ліній поглинання сонячного спектра

Мета роботи: освоїти головні поняття з елементарної теорії профілів ліній поглинання; навчитися розраховувати профілі ліній поглинання.

Матеріали: атлас профілів фраунгоферових ліній; таблиці фраунгоферових ліній.

Література:

1. *Соболев В.В.* Курс теоретической астрофизики. – М.: Наука, 1967.
2. *Мартынов Д.Я.* Курс практической астрофизики.
3. *Каули Ч.* Теория звездных спектров.
4. *Грей Д.* Наблюдения и анализ звездных фотосфер.
5. *Аллен Х.* Астрофизические величины.

Головні поняття з елементарної теорії профілів ліній поглинання (див. у Лабораторній роботі 1).

Мета цієї роботи – навчитися обчислювати теоретичні профілі ліній поглинання.

Для розрахунку теоретичних профілів спектральних ліній потрібно обчислити інтенсивності випромінювання в лінії у неперервному спектрі I_{λ_0}:

$$I_\lambda = -\int_{-\infty}^{+\infty} B(T) e^{-\tau_\lambda/\mu} d\tau\lambda / \mu$$

і

$$I_{н.с} \int_{-\infty}^{+\infty} B(T) e^{-\tau_{н.с}/\mu} d\tau_{н.с} / \mu .$$

де $B(T)$ – функція Планка; τ_λ – оптична глибина лінії; $\tau_{н.с}$ – оптична глибина в неперервному спектрі; $\mu = \cos\theta$ – косинус кута між

напрямом випромінювання і напрямом радіуса-вектора. Для центра диска Сонця $\mu = 1$, для краю – $\mu = 0$.

Межі інтегрування є від $-\infty$ до $+\infty$, тобто від найглибших до зовнішніх шарів атмосфери.

У цій роботі розрахунок теоретичних профілів ліній поглинання виконують у кілька етапів. Зокрема, спочатку обчислюють інтенсивність випромінювання в неперервному спектрі $I_{н.с}$. Для цього потрібно розрахувати функцію Планка $B(T)$ для різних шарів моделі сонячної атмосфери. Щоб обчислити інтенсивність у лінії, треба розрахувати оптичну глибину в цій лінії. Цей розрахунок теж проводиться по частотах.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4

Визначення сум по станах для хімічних елементів

Мета роботи: навчитись визначати суми по станах для окремих хімічних елементів.

Матеріали: таблиці моделей сонячної атмосфери; довідник з атомними параметрами хімічних елементів.

Література:

1. *Аллер Л.* Астрофизика, т. 1. 1955.
2. *Грей Д.* Наблюдения и анализ звездных фотосфер.

Методика виконання

Сума по станах для атома хімічного елемента складається зі статистичної ваги основного рівня g_0 і суми статистичних ваг усіх збуджених рівнів Q':

$$U = g_0 + \sum_{j}^{1} Q' .$$

Статистична вага енергетичного рівня виражає відносну імовірність того, що атом перебуває на цьому рівні за інших однакових умов. Якщо два стани мають один і той самий потенціал збудження, то їхня відносна залежність в умовах рівноваги пропорційна до статистичних ваг.

Сума статистичних ваг усіх збуджених рівнів

$$Q' = \sum g_i \cdot 10^{\kappa_i \theta} + 2g_{pr} Q_{as}(l,z) \cdot 10^{z\theta} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{m} \alpha_\nu 10^{-\gamma_\nu \theta} + 2g_{pr} Q_{as}(l,z) \cdot 10^{-\chi_{ion}\theta} ,$$

де $\theta = 5040 / T$, g_i і κ_i – статистична вага і потенціал збудження заданого рівня; $2g_{pr}$ – подвоєна статистична вага неперервних термів; χ – потенціал іонізації даного атома; α_ν і γ_ν – коефіцієнти, Q_{as} – статистична вага всього об'єму терму.

У табл. 4 для кожного хімічного елемента в заданому стані іонізації наведено: g_0 – статистичну вагу основного рівня, ряд зі значеннями α_ν і γ_ν, $2g_{pr}$ – подвоєну статистичну вагу; l – орбітальне квантове число; χ_{ion} – потенціал іонізації хімічного елемента.

Статистична вага всього терму

$$Q_{as}(l,z) = \frac{1}{3}[h(h+1)(h+1/2) - l(l+1)(l+1/2)] + a(h-l) + \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{z}\right),$$

де $h = \sqrt{\dfrac{13{,}595z}{\Delta\kappa}}$,

причому $z = 1$ для нейтральних атомів, $z = 2$ для іонів, $\Delta\kappa = 4{,}98 \cdot 10^{-4}\theta\sqrt{Pe}$, Pe – електронний тиск, $a = 31{,}321 z^2 \theta$.

Як бачимо, в загальному випадку суми по станах залежать від температури і тиску.

Для розрахунку залежності зміни суми по станах з глибиною в сонячній атмосфері використаємо таблицю «Модель сонячної атмосфери», де наведений розподіл температури T і електронного тиску Pe з глибиною.

Зміст роботи

1. Обчислити значення a для деяких оптичних глибин сонячної атмосфери, використавши таблицю «Модель сонячної атмосфери». Побудувати графік залежності a від $\lg\tau$. Знайти проміжні значення $a(\tau)$ і заповнити стовпець 3 в табл. 2.
2. Обчислити $\Delta\kappa$ для деяких оптичних глибин, побудувати графік залежності $\Delta\kappa$ від $\lg\tau$, знайти проміжні значення $\Delta\kappa$ і заповнити стовпець 4 в табл. 1.
3. Обчислити h, дані записати в табл. 1.
4. Обчислити $Q_{as}(l,z)$, побудувати графік залежності $Q_{as}(l,z)$ від $\lg\tau$, дані записати в табл. 1.
5. Обчислити $\sum Q$, дані записати в табл. 1.

6. Обчислити суми по станах U для заданого хімічного елемента в заданому стані іонізації, результати записати в табл. 1.

Таблиця 1

$\lg\tau$	Q	a	$\Delta\kappa$	h	Q_{ai}	$\sum Q$	U
1	2	3	4	5	6	7	8
-1,4							
-1,3							
...							
...							
0,8							
0,9							
1,0							

7. Повторити всі розрахунки за пунктами 1-6 і заповнити табл. 2 і 3.

Таблиця 2

$\lg\tau$	Q	a	$\Delta\kappa$	h	Q_{ai}	$\sum Q$	U
1	2	3	4	5	6	7	8
-1,4							
-1,3							
...							
...							
0,8							
0,9							
1,0							

Таблиця 3

$\lg\tau$	Q	a	$\Delta\kappa$	h	Q_{ai}	$\sum Q$	U
1	2	3	4	5	6	7	8
-1,4							
-1,3							
...							
...							
0,8							
0,9							
1,0							

Таблиця 4

Значення деяких фізичних величин для обчислення сум по станах (залізо)

Елемент	g_0	χ_{ion}	$2g_{pr}$	l	γ_v	α_v
1	2	3	4	5	6	7
FeI	9	7,896	60	5,0	0,066	14,41
					0,339	2,70
					2,897	421,66
					6,585	940,15
		8,195	56	5,0	0,923	36,22
					1,679	22,89
					4,620	239,60
					7,053	825,29
		8,927	40	5,0	4,249	110,02
					5,875	992,30
					7,781	640,67
FeII	10	16,178	50	5,0	0,062	17,05
					0,283	32,38
					1,504	34,32
					5,430	420,96

1	2	3	4	5	6	7

		18,662	18	5,0	11,210	1067,21
					2,792	154,01
					7,627	462,11
					13,623	329,86
FeIII	9	30,640	12	6,0	0,077	15,79
					3,723	47,1186
					12,137	279,93
					23,700	692,10
		34,607	72	5,0	12,688	91,02
					7,595	206,31
					15,444	706,99
					25,587	836,67

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 5

Розрахунок іонізації водню в сонячній атмосфері

Мета роботи: навчитись розраховувати вміст атомів різного ступеня іонізації у сонячній(зоряній) атмосфері.

Матеріали: модель атмосфери Сонця; таблиці даних з атомними параметрами для водню.

Література:

1. *Аллер Л.* Астрофизика. Т. 1, М., 1955
2. *Грей Д.* Наблюдения и анализ звездных фотосфер.

Методика викладання

Іонізацію водню, як і інших хімічних елементів, обчислюють за формулою Саха:

$$\frac{N_1}{N_0} P_e = (2\pi m)^{3/2} (kT)^{5/2} \frac{2u_1}{u_0} e^{-\frac{IP}{kT}}, \qquad (1)$$

де N_0, N – відповідно, кількість атомів та іонів водню в одиниці об'єму; P_e – електронний тиск; T – температура; u_0 *і* u_1 – суми по станах для атома та іона водню (протона); IP – потенціали іонізації; m, k – маса електрона та стала Больцмана. Формулу (1) можна звести до вигляду, більш вигідного для обчислень:

$$\frac{N_0}{N_1} = \frac{u_0}{u_1} P_e = \left(\frac{5040}{T}\right)^{5/2} \cdot 10^{\frac{5040}{T} IP(ев) - 9.08}. \qquad (2)$$

Звичайно для водню приймають $\lg \frac{2u_1}{u_0} = 0$. Усі обчислення виконують у системі CGS; IP для водню дорівнює 13.54 ев.

У разі обчислення концентрації від'ємних іонів водню у формулі (1) приймають

$N_0 \equiv N(H^-)$; $N_1 \equiv N(H)$. Формулу (1) можна записувати і в логарифмічному вигляді:

$$\lg \frac{N(H)}{N(H^-)} = -\lg P_e - \frac{5040}{T} IP + \frac{5}{2}\lg T + \lg 2 - 0.1706, \qquad (3)$$

IP для від'ємних іонів водню – 0.754 ев.

Відомо, що іони H^- є головним джерелом неперервного поглинання в зоряних атмосферах зір типу Сонця, тобто достатньо пізніх спектральних класів:

$$\frac{N(H^-)}{N(H)} = 4.158\,10^{-10} \cdot P_e \cdot \theta^{5/2} \cdot 10^{0.754\theta}, \qquad (4)$$

де $\theta = \frac{5040}{T}$.

У разі розрахунку концентрації H^- беремо на Сонці $u_0(H^-) = 1; u_1(H) = 2$. Усі розрахунки виконуємо за однією з моделей сонячної атмосфери. В нашому випадку – модель 1980 року з умовною назвою VAL-80C.

Завдання:

1. Отримати з формули (1) формулу (2), виконавши числові перетворення.
2. Отримати з формули (1) формулу (3) також числовими перетвореннями.
3. Отримати формулу (4) з попередніх формул.
4. Обчислити відсотковий вміст у сонячній атмосфері в різних її шарах іонів, атомів, від'ємних іонів водню. Спочатку визначити кількість атомів та іонів. Потім за наявною кількістю іонів обчислити кількість від'ємних іонів водню. Електронний тиск визначити за формулою $P_e = n_e kT$.
5. Результати оформити у вигляді таблиці:

τ	n_I	n_{H^-}	n_H	$\sum = 100\%$

Модель VAL-80 C.

τ_ν	T	n_N	n_e
1. 0	447000	$1\ 10^{9}$	$1.205\cdot 10^{9}$
6. $5.2354\cdot 10^{-8}$	32000	$1.378\cdot 10^{10}$	$1.498\cdot 10^{10}$
11. $2.426\cdot 10^{-7}$	24000	$1.932\cdot 10^{10}$	$2.009\cdot 10^{10}$
16. $2.674\cdot 10^{-7}$	18500	$2.732\cdot 10^{10}$	$2.620\cdot 10^{10}$
21. $3507\cdot 10^{-7}$	8180	$6.541\cdot 10^{10}$	$3.780\cdot 10^{10}$
26. $7.717\cdot 10^{-7}$	6940	$1.380\cdot 10^{11}$	$4.028\cdot 10^{10}$
31. $4.084\cdot 10^{-6}$	6220	$4.200\cdot 10^{12}$	$7.486\cdot 10^{10}$
36. $1.553\cdot 10^{-5}$	5650	$8.135\cdot 10^{13}$	$1.064\cdot 10^{11}$
41. $1.456\cdot 10^{-4}$	4230	$1.382\cdot 10^{15}$	$1.733\cdot 10^{11}$
46. $1.117\cdot 10^{-1}$	5180	$4.917\cdot 10^{16}$	$6.476\cdot 10^{12}$
51. $5.747\cdot 10^{0}$	7610	$1.317\cdot 10^{17}$	$4.645\cdot 10^{3}$

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №6

Рівновага іонізації в зоряних атмосферах

Мета роботи: навчитись визначати вміст іонізованих хімічних елементів у зоряних атмосферах.

Матеріали: таблиці з параметрами нейтральних та іонізованих окремих атомів.

Методики викладання

В астрофізиці фундаментальне значення має формула для рівноважної іонізації, так звана формула Саха. Її виводять зі статистичної теорії ідеальних газів. Ця формула відображає, яка кількість атомів хімічного елемента перебуває в рівновазі з іонами цього елемента за заданих значень електронного тиску $P_e = n_e kT$ і T. Формула Саха має вигляд

$$\frac{n_e n_i}{n_a} = \frac{g_e g_i}{g_a} \cdot \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{IP}{kT}}, \qquad (1)$$

де $n_i, n_e, n_a, g_i, g_e, g_a$ – відповідно, концентрації і статистичні ваги іонів, електронів та атомів; IP – потенціал іонізації хімічного елемента. Для вільного електрона

$$g_e = 2j+1 = 2(L=0, j=s=1/2).$$

Статистична вага (сума) атомів і іонів, відповідно:

$$g_a = \sum_k (g_a) k e^{-\frac{EP_k}{kT}}, \qquad (2)$$

$$g_i = \sum_k (g_{ai}) k e^{-\frac{EP_k}{kT}}, \qquad (3)$$

$$(g_{i,a}) = [(2l+1)(2s+1)]_k, \qquad (4)$$

де k – номер збудженого рівня; EP_k – енергія збудженого рівня атома чи іона; l і s – квантові числа енергетичних рівнів.

Завдання:

1. Вивести формулу (1).
2. Для заданого елемента моделі атмосфери отримати відсотковий склад іонізованих атомів.

Дані до роботи

Таблиця 1

Нейтральні атоми

Хімічний елемент	Терм. основний стан	Потенціал іонізації	Збуджені атоми
He	^{1}S	24,58 ев	^{3}S 19,14; ^{1}S 20,5 ^{3}P 20,96; ^{1}P 21,13
C	3P	11,264	^{1}D 1,3; ^{1}S 2,7; ^{5}S 4,16
Al	2P	5,894	^{4}S 3,13; ^{4}P 3,5; ^{2}D 4,0; ^{2}P 4,0
F	2P	17,418	^{4}P 12,69; ^{2}P 12,98
Si	3P	8,149	^{1}D 0,80; ^{1}S 1,92; ^{3}P 4,93

Таблиця 2

Однозарядні іони

Хімічний елемент	Терм. основний стан	Потенціал іонізації	Збуджені атоми
He	^{2}S	^{2}S 40,9	^{2}P 40,9
C	^{2}P	^{4}P 5,2	^{2}D 9,2; 2S 11,92
Al	^{1}S	^{3}P 4,7	
F	^{3}P	^{3}P 20,3	^{5}S 21,6; 3S 22,5
Si	^{2}P	^{2}P 6,84	^{2}S 8,09

Значення енергії наведено в електронвольтах. Цифри при символах збуджених атомів означають енергію збудження.

Результати звести в таку таблицю:

n_e	τ	T	% атомів	% іонів

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 7

Емпіричне визначення сталої загасання з еквівалентних ширин фраунгоферових ліній

Мета роботи: обчислити емпіричну сталу загасання для вибраної фраунгоферової лінії в центрі та на краю сонячного диска. Список ліній наведено в табл. 2 і 3.

Методика виконання

Відомо, що профіль фраунгоферової лінії у разі його обчислення методом вагових функцій $g(\tau^c)$ такий:

$$d^L(\Delta\lambda) = \int_0^{\infty} g(\tau^c)\,\frac{\kappa^L(\Delta\lambda)}{\kappa^c}\exp\left(-\tau^L(\Delta\lambda)\right)d\tau^c\,, \qquad (1)$$

де κ^L і τ^c – коефіцієнт поглинання й оптична глибина в неперервному спектрі. В крилах ліній, які головно і відповідають за сталу загасання γ, звичайно приймають, що коефіцієнт поглинання в лінії $\kappa^L \ll 1$, тому експонентою в (1) можна знехтувати. Оскільки $g(\tau^c)$ залежить лише від моделі атмосфери, то форма спостережуваного профілю d^L повинна наближено повторювати форму коефіцієнта поглинання, що є під знаком інтеграла і в який входить γ. На цьому і ґрунтується визначення з профілів ліній.

Для профілів гаусової форми еквівалентна ширина лінії

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} d^L(\Delta\lambda)d(\Delta\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} d_0^L \exp\left(-\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda D}\right)^2 d(\Delta\lambda) = d_0^L\sqrt{\pi}\Delta\lambda D. \qquad (2)$$

Через повну півширину h з урахуванням її зв'язку з доплерівською шириною $\Delta\lambda_D\,(h = 1{,}66\Delta\lambda_D)$,

$$W = 1{,}06774\; h \cdot d_0^L. \qquad (3)$$

Еквівалентна ширина профілів лоренцівського типу, що відповідає загасанню внаслідок зіткнень чи близького проходження між собою збуджувальної частинки і випромінювального атома,

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} d_0^L \left[1 + \left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_{Da}}\right)^2 \right]^{-1} d(\Delta\lambda) = d_0^L \pi \Delta\lambda_{Da} = \frac{\pi}{2} d_0^L h = 1.57079 h d_0^L, \quad (4)$$

де півширина $h = 2\Delta\lambda_{Da}$.

У реальних сонячних лініях простежується розширення, зумовлене спільною дією доплер-ефекту і загасання, то для реальної сонячної лінії

$$W = p d_0^L h, \quad (5)$$

де $1.06744 \le p \le 1.57079$. Параметр p, що сюди входить, пов'язаний з параметром загасання:

$$a = \frac{\gamma_\lambda}{2\Delta\lambda D}, \quad (6)$$

що входять у функцію Фойгта $H(a,v)$. γ_λ – повна півширина профілю в одиницях довжини, якщо $\Delta\lambda D$ є в тих самих одиницях довжини.

Визначивши для кожної фраунгоферової лінії з відомими W, h, d_0^L параметр p, відшукуємо відповідні йому значення $\Delta\lambda_{Da} / h$ згідно з табл. 1. Стала загасання за профілем Лоренца

$$\gamma_\lambda = 2a\Delta\lambda D = 2\Delta\lambda_{Da} = 2\left(\frac{\Delta\lambda_{Da}}{h}\right) h. \quad (7)$$

Перехід до звичайної шкали (рад c^{-1}) виконують згідно з

$$\gamma[см] = \frac{\gamma_\lambda (рад \cdot c^{-1}) \lambda_0^2}{2\pi c}, \quad (8)$$

де λ_0 – довжина хвилі досліджуваної лінії.

Доплерівську півширину лінії визначають згідно з формулою і табл. 1:

$$\Delta\lambda D = \left(\frac{\Delta\lambda_{Da}}{h} / \frac{\Delta\lambda_{Da}}{\Delta\lambda D} \right) \cdot h. \quad (9)$$

Таблиця 1

Параметри профілю Фойгта

$\frac{\Delta\lambda_{1/2}}{h}$	$\frac{\Delta\lambda_{Da}}{\Delta\lambda D}$	$\frac{\Delta\lambda D}{h}$	P
0.00	0.000	0.601	1.064
0.05	0.088	0.568	1.108
0.10	0.188	0.533	1.154
0.15	0.302	0.497	1.201
0.20	0.435	0.459	1.251
0.25	0.599	0.417	1.302
0.30	0.807	0.372	1.354
0.35	1.086	0.322	1.408
0.40	1.53	0.262	1.462
0.45	2.41	0.187	1.517
0.48	4.1	0.117	1.548
0.5	∞	0	1.571

Правильність визначення γ і $\Delta\lambda D$ перевіряють за допомогою співвідношення, що випливає з теорії функцій Фойгта:

$$h = (\Delta\lambda_{Da}^2 + 1.66^2 \Delta\lambda_D^2)^{1/2} + \Delta\lambda_{Da}. \quad (10)$$

З (10) для чисто лоренцівського розширення $(\Delta\lambda_D = 0)$ $h = 2\Delta\lambda_{Da}$.

Таблиця 2

Список фраунгоферових ліній та їхніх головних характеристик у різних точках сонячного диска

	FeI 5250.212 Å					Fe 6173.343			
	⊙	0.5R	0.7R	0.9R	0.95 R	⊙	0.5R	0.7R	0.9R
$1-d^L$	0.297	0.324	0.339	0.358	0.367	0.397	0.438	0.459	0.484
W,mÅ	64.72	66.24	68.92	75.28	77.73	67.77	67.16	70.53	73.62
λ,mÅ	81.80	89.30	95.70	106.20	113.80	103.30	10.20	117.70	129.40

$\sin\theta = \frac{r}{R} \Rightarrow$ елемент поверхні, видимий під кутом θ до нормалі є на відстані r від центра диска.

Таблиця 3

λ	Ел	$1\text{-}d^L$		h, mÅ		W	
		⊙	1.6 від краю	⊙	1.6 від Краю	⊙	1.6 від краю
6270.238	FeI	0,542	0.588	101	121	52.70	55.44
6302.507	FeI	0.394	0.469	124	147	86.47	95.02
6380.748	FeI	0.554	0.616	101	129	51.31	55.94
6082.718	FeI	0.689	0.[illegible]	91	115	31.85	37.54
6213.438	FeI	0,360	0.438	115	139	83.24	86.56
6084.105	FeI	0,825	0.842	104	125	20.17	22.89

Раліус диска Сонця = 80 мм, або 16′.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 8

Дослідження загасання та турбулентних швидкостей у профілях фраунгоферових ліній методом функцій Фойгта

Мета роботи: вивчити й освоїти методику визначення загасання у фраунгоферових лініях; навчитися опрацьовувати профілі фраунгоферових ліній методом функцій Фойгта; визначити сталу загасання профілів ліній для центра і краю сонячного диска та її відношення до класичної сталої загасання; з'ясувати зміну сталої загасання в разі переходу центр–край на диску Сонця.

Прилади і матеріали: спостережувальні профілі фраунгоферових ліній у центрі і на краю диска; таблиці функцій Фойгта.

Методика виконання

У цій роботі ми виходимо з того, що спостережуваний профіль фраунгоферової лінії достатньо добре відображений профілем Фойгта. Згідно з визначенням, функція Фойгта – це накладання функції дисперсійного (лоренцівського) типу

$$f(\Delta\lambda) = C_1 / 1 + \frac{\Delta\lambda^2}{\Delta\lambda_{3a}^2}, \qquad (1)$$

і функції Гаусса

$$f(\Delta\lambda) = C_2 e^{-(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda D})^2}, \qquad (2)$$

де C_1 і C_2 – сталі; $\Delta\lambda$ – відстань від центра лінії. В цьому випадку функцію Фойгта характеризуватимуть два параметри $\Delta\lambda_{3a}$ і $\Delta\lambda_D$, причому силу крил, що є пропорційною до загасання в лінії, описує відношення $\Delta\lambda_{3a} / \Delta\lambda_D$. З іншого боку, коефіцієнт поглинання в лінії аналогічно відображенній накладанням функції розподілу Максвелла і функції загасання, у цьому разі $\Delta\lambda_{3a}$ – це півширина загасального профілю; $\Delta\lambda_D$ – доплерівська півширина. Тобто аналіз фойгтівськими функціями допускає, що профілі фраунгоферових ліній є усередненими профілями коефіцієнта поглинання в області сонячної атмосфери, в якій утворюються лінії поглинання.

З електродинаміки відомо, що природна півширина в довжинах хвиль

$$\gamma_{k\lambda} = (2\pi/3)\, e^2/Mc^2 = 5.9 \cdot 10^{-2}\ \text{МÅ},$$

В обернених секундах (c^{-1}) $\gamma_{k\nu} = (0.22/\lambda^2)[c^{-1}]$, якщо λ у сантиметрах. Очевидно, половинна півширина, зумовлена загасанням,

$$\gamma_{1/2} = \Delta\lambda_{za}\,(\text{МÅ}) \text{ або } \gamma_{1/2} = 16.96\ \gamma_{k\lambda}\ \Delta\lambda(\text{МÅ});$$

$$(16.96\ \gamma_{k\lambda} = 1).$$

Повна півширина, зумовлена загасанням, $\gamma = 2\Delta\lambda_{za}$.

Опрацювання профілів ліній методом функцій Фойгта полягає в такому. З профілю знімають параметри: центральну глибину r, повні півширини при $0.5r$, $0.4r$, $0.3r$, $0.2r$ для обчислення загасання; $0.6r$, $0.7r$, $0.8r$ для вичислення турбулентних швидкостей.

Для цих ширин ліній на різних глибинах профілю відшукуємо їхні відношення до півширини h:

$$h_{0.9}/h_{0.5}, \ldots\ldots\ h_{0.01}/h_{0.5}.$$

З таблиць функцій Фойгта знаходимо відношення $\Delta\lambda_{za}/h$ і $\Delta\lambda_D/h$. Звертаємо увагу, що для визначення загасання треба брати точки крил профілю, а турбулентних швидкостей – точки ближче до центра лінії.

Очевидно, що емпірична стала загасання

$$\gamma_\lambda = 2(\Delta\lambda_{za}/h)h.$$

Доплерівська півширина, тобто півширина на рівні 1/e,

$$(\Delta\lambda_D) = (\Delta\lambda_D/h)h.$$

Повна півширина лінії h у теорії функцій Фойгта

$$h = (\Delta\lambda_{za}^2 + 1.66^2\,\Delta\lambda_D^2)^{1/2} + \Delta\lambda_{za}$$

Півширину загасання $\Delta\lambda_{za}$ і доплерівську півширину вважають тоді правильно визначеними, якщо вони задовольняють останню рівність.

При відомій $\Delta\lambda_D$ з рівності

$$\Delta\lambda_D = \lambda/c\sqrt{2RT/\mu + v_{tu}^2}$$

треба визначити v_{tu}^2, де μ – молекулярна маса; R – газова стала; T - температура в області утворення слабих ліній ~`600K.

Зміст роботи

1. Побудувати профілі вибраної лінії для точок cos Θ=1 і cos Θ=0.28.
2. Знайти потрібні параметри профілю.
3. З таблиць знайти $\Delta\lambda_{za}/h$, $\Delta\lambda_D/h$.
4. Розрахувати сталу загасання профілів у cos Θ=1 і cos Θ=0.28.
5. Порівняти отримані дані про сталу загасання для різних точок диска.
6. Перевірити правильність обчислення $\Delta\lambda_{za}$ і $\Delta\lambda_D$ за формулою для повної півширини h.
7. Обчислити турбулентні швидкості для центра та краю сонячного диска.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 9

Методи обчислення теоретичної сталої загасання та її порівняння з емпіричною сталою загасання

Мета роботи: обчислити значення теоретичної сталої загасання різними методами.

Методика виконання

На початку XX століття у фізиці було уявлення, що речовина, зокрема атоми, є не що інше як гармонічні осцилятори або їхня сукупність. Хоч пізніше воно було визнане неправильним, проте описати головні властивості атомів вдалось достатньо точно і просто. В електродинаміці виведена формула для зменшення енергії осцилятора внаслідок випромінювання, зокрема, диполем Герца:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{a^2 e^2 \omega_0^4}{3c^3}, \tag{1}$$

тоді як його повна енергія

$$W = W_{кін.} + W_{пот.} = \frac{m}{2} a^2 \omega_0^2. \tag{2}$$

З (1) і (2) отримаємо

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{2}{3}\frac{e^2\omega_0^2}{mc^3} dt \equiv -\gamma_{кл} dt; \tag{3}$$

$$\text{Або } W = W_0 e^{-\gamma_{кл} dt}, \tag{4}$$

де ω_0, ν_0 – відповідно колова та лінійні частоти, a – амплітуда коливань осцилятора. Розподіл інтенсивності в спектрі випромінювання осцилятора

$$I(r) = \frac{4\pi^3}{3}\frac{a_0 \nu_0^2 e^2}{c^3}\frac{1}{(1-\frac{r}{r_0})^2 + \frac{\gamma^2 кл}{16\pi^2 r_0^2}}; \tag{5}$$

$I(r)$ має максимум при $r = r_0$, а при r, що задовольняє умову

$$2\pi(r_0 - r) = \frac{\gamma_{кл}}{2}, \tag{6}$$

отримаємо

$$I(r) = I_{max}(r)/2. \tag{7}$$

Величину

$$r - r_0 = \frac{\gamma}{4\pi} \equiv (\Delta\gamma)1/2 \tag{8}$$

називають півшириною, а повна півширина, або природна ширина спектральної лінії,

$$\Delta V = 2(\Delta V)1/2 = \frac{\gamma}{2\pi} = \frac{2\cdot 4\pi^2 r_0^2 e^2}{2\pi\cdot 3mc^3} = \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{r_0^2 e^2}{mc^3}. \tag{9}$$

У довжинах хвиль (9) запишемо так:

$$\Delta\lambda = \frac{c}{V^2}\Delta r = \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{c\nu^2 e^2}{\nu^2 mc^3} = \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{e^2}{mc^2} = 1.18\cdot 10^{-4}\,\mathring{A}.$$

Природна півширина $1.18\cdot 10^{-4}\,\mathring{A}/2 = 5.9\cdot 10^{-5}\,\mathring{A}$.

Тобто

$$\gamma_{кл} = 5.9\cdot 10^{-5}\,\mathring{A}. \tag{10}$$

В обернених секундах

$$\gamma_{кл} = \frac{0{,}222}{\lambda^2}\left[c^{-1}\right], \tag{11}$$

якщо λ має розмірність сантиметрів. Зокрема, для $\lambda = 6000\,\mathring{A} = 6\cdot 10^{-5}$ см:

$$\gamma_{кл} = \frac{0{,}222}{(5\cdot 10^{-5})^2} = 8.88\cdot 10^7 c^{-1}; \tag{12}$$

$$\gamma_{кл}[\text{рад}\cdot c^{-1}] = \gamma_{кл}[c^{-1}]\cdot 2\pi = 5.57\cdot 10^8 \text{ рад}\cdot c^{-1}. \tag{13}$$

У квантовій механіці для сталої загасання внаслідок випромінювання отримують такий вираз:

$$\Gamma_k = 3\gamma_b \sum_i f_{ik} \frac{g_i}{g_k}. \qquad (14)$$

Унаслідок зіткнень атомів, що беруть участь в утворенні фраунгоферових ліній, з сусідніми частинками відбувається розширення енергетичних рівнів, що приводить до розширення самих ліній.

Якщо враховувати, що є лише взаємодія Ван-дер-Ваальса, то теорія приводить до такого виразу сталої загасання внаслідок зіткнень:

$$\gamma_{зм} = \frac{2}{T_0} = C_n^{\frac{2}{n-1}} v^{\frac{n-3}{n-1}} N (2\pi)^{\frac{n+1}{n-1}} a_n^{\frac{2}{n-1}} \eta_0^{-\frac{2}{n-1}}. \qquad (15)$$

Розглянемо часткові випадки цієї формули: T_0 - час між двома зіткненнями, отже, розмірність γ – c^{-1} або рад$\cdot c^{-1}$. При $n = 2$ з (15) випливає

$$\gamma_2 = c_2^2 v^{-1} N (2\pi)^{-1} a_2^2 \eta_0^{-2}. \qquad (16)$$

Це є лінійний ефект Штарка. При $n = 3$ отримуємо загасання внаслідок власного тиску

$$\gamma_3 = C_3 N (2\pi)^2 a_3 \eta_0^{-1}. \qquad (17)$$

З теорії відомо, що $a_3 = 2$, $\eta_0 = 2/\pi$:

$$\gamma_3 = 4\pi^3 C \cdot N_e, \qquad (18)$$

де N_e - кількість вільних електронів.

Для водню, зокрема H_α, C=2.22 10^{-9} $см^3/с$, для інших ліній воно незначне.

При n=4 з (15) для квадратичного ефекту Штарка маємо

$$\gamma_4 = C_4^{2/3} \cdot v^{1/3} N\left((2\pi)^{5/3} C_4^{2/3} \eta_0^{-2/3}\right) = 38.8 \cdot C_4^{2/3} V^{1/3} Ne. \qquad (19)$$

У цьому разі $a_4 = \pi/2$; $\eta_0 = 0.64$.

Сталу C_4 обчислюють або експериментально, або теоретично. Є різні способи її оцінки. Зокрема, сталу загасання внаслідок квадратичного Штарк-ефекту можна оцінити за формулою:

$$\gamma_4 \equiv 10^{-8} \cdot n_{eff}^5 (n_e + n_p). \qquad (20)$$

У (20) n_{eff} є ефективним квантовим числом, а n_e і n_p – кількість електронів та протонів в одиниці об'єму:

$$n_{eff} = \left(\frac{Rz^2 eff}{JP - EP}\right)^{1/2}. \qquad (21)$$

У формулу (20) входить ефективне квантове число верхнього рівня, n_e і n_p обчислені за моделлю атмосфери. Якщо відомий потенціал збудження ЕР нижнього рівня, то для верхнього

$$EP^{/Ib\%_0/} = \acute{I}m^{/Ib\%_0/} + \frac{1.23985 \cdot 10^{-4}}{\lambda / см /} Ib\%_0. \qquad (22)$$

IP у (21) - потенціал іонізації. Є, однак, інші формули для оцінки впливу на фраунгоферові лінії квадратичного Штарк-ефекту. Зокрема, 1971 р. Каулі запропонував формулу:

$$\gamma_4(-^{**}) = 1.54 \cdot 10^{-18} (n^*)^4 \lambda (n_e + n_p), \qquad (23)$$

де γ_4 та λ є в сантиметрах. Перехід до радіан c^{-1} на секунду$^{-1}$ виконують за формулою:

$$\gamma_4\,(рад \cdot c^{-1}) = \frac{2\pi\,C}{\lambda^2}\,\gamma_4\,(см). \qquad (24)$$

Однак найбільше розширені лінії загасання внаслідок зіткнень випромінювальних атомів з нейтральними, тобто при n=6 у формулі (16). При $a_n = \frac{3\pi}{8}$, $\eta_0 = 0.64$ отримуємо:

$$\gamma_6 = 17.0 \cdot C_6^{2/5} v^{3/5} m_H. \qquad (25)$$

Тут виходить середня відносна швидкість збурювальної (водень) та випромінювальної (задана лінія) частинки:

$$v = \sqrt{\frac{8kT}{\pi}\left(\frac{1}{m_H} + \frac{1}{m_{el}}\right)}. \qquad (26)$$

Оскільки m_{el} мале, то можна записати

$$\gamma_6(H) = 17.0 \cdot C_6^{2/5} \left(\frac{8k}{\pi m_H}\right)^{0.3} T^{0.3}(r) \frac{Pg(r)}{kT(r)}. \qquad (27)$$

Сталу $C_б$ обчислюють квантово-механічно:

$$C_б = 1.61 \cdot 10^{-33}(n^{*4}_{верх} - n^{*4}_{нижн}), \qquad (28)$$

де n* задано згідно з (21).

Лінія розширюється не лише воднем, а й гелієм , тобто

$$\gamma_б = \gamma_б(H)[n_H + 0.42n(He)]; \quad n(He)/n_H = 0.1. \qquad (29)$$

Розрахунок $\gamma_б$ свідчить, що отримані теоретичні значення набагато менші, ніж потрібно. Тому іноді допускають, що головною причиною розширення є взаємодія між збурювальною частиною і валентним електроном. Тоді використовують потенціал Смірнова й отримують деякий явний вираз для сталої загасання. За цим методом складені таблиці, у яких наведені параметри α і β:

$$\gamma_{теор} = \alpha T^{\beta} N_H. \qquad (30)$$

Значення α і β задано в них залежно від n^* верхнього та нижнього рівнів для переходів *s-p, p-d, d-f.*

У квантово-механічній теорії Брекнера $\gamma_{теор}$ обчислюють за формулою (27), проте зі сталою $C_Б$:

$$C_Б = (5.71 \cdot 10^{-14} \cdot n^{*3}_{Бейбр.})^{5/2}. \qquad (31)$$

Загальна формула для відношення $\gamma_Б / \gamma_б$ має вигляд

$$E_{зб} = \frac{\gamma_з}{\gamma_б} = \frac{4.65(IP - EP_H)^{0.8}}{(IP - EP_б)^{0.7}[(EP_б - EP_H)(2IP - EP_e - EP_H)]^{0.4}}. \qquad (32)$$

Пізніше теорію Брекнера вдосконалено і запропоновано $\gamma_{теор}$ формулу

$$\gamma_{теор} = A(l)T^{B(l)}(n^*)^{C(l)} n_H. \qquad (33)$$

Значення A, B, C такі:

	A 10^{10}	B	C	n* / межі
0	2.43	0.365	2.48	1.5 - 3.5
1	1.84	0.362	2.68	1.5 - 3.5
2	0.843	0.356	3.25	2.5 - 3.75
3	0.236	0.340	4.07	3.5 - 4.0

Тут l - орбітальне квантове число.

Зміст роботи

1. Для заданої фраунгоферової лінії обчислити емпіричну та теоретичну сталу загасання $\gamma_{емп}$ за відомою півшириною лінії *h*, еквівалентною шириною *W* і центральною глибиною *d*.
2. Для обчислення $\gamma_{теор}$ треба відшукати в таблицях IP, $EP_н$, обчислити $EP_в$ згідно з (22), виписати перехід *s-p, p-d* і т.д. Всі обчислення проводити за заданою моделлю (див. зам.) для рівня $\tau_5 = 10^0 = 1$, бо це приблизно відповідає місцю утворення крил фраунгоферових ліній та їхніх неперервних спектрів.
3. Обчислити $\gamma_{кл}$ згідно з (13), оцінити $\gamma_к$ згідно з (14).
4. Обчислити γ_4 згідно з (20), n_p за моделлю, як і n_e.
5. Обчислити n_{eff} згідно з (21).
6. Обчислити γ_4^k згідно з (23) і (24).
7. Обчислити $\gamma_{кл\,б}$ згідно з (27) і (28) і підправити згідно з (29).
8. Обчислити $\gamma_{теор}$ за (30) зі знайденими з таблиць α і β.
9. Обчислити $\gamma^Б_{теор}$ за (27) і (31); оцінити $\gamma_Б/\gamma_б$ за (32).
10 Обчислити $\gamma^{Irwin}_{теор}$ за (33).

У результаті для заданої лінії отримаємо:

1). $\gamma_{емп}$; 2). $\gamma_{кл}$; 3). $\gamma_{нб}$; 4). $\gamma_з$; 5). γ_4^k; 6). $\gamma_б$; 7). $\gamma^Д_{теор}$; 8). $\gamma^Б_{теор}$; 9). $\gamma^{Irwin}_{теор}$.

Складаємо всі співвідношення $\gamma_{теор}/\gamma_{ем}$

Модель HSRA

τ_5	h	T	Pg	Pe	$\frac{n_p}{n_p + n_H}$
10^{-3}	840	5300	$6.69\ 10^{1}$	$6.77\ 10^{-2}$	$9.13\ 10^{-4}$
10^{-4}	577	4170	$8.68\ 10^{2}$	$6.12\ 10^{-2}$	$2.26\ 10^{-3}$
10^{-5}	420	4380	$3.46\ 10^{3}$	$2.37\ 10^{-1}$	$4.07\ 10^{-3}$
10^{-2}	283	4660	$1.27\ 10^{4}$	$8.95\ 10^{-1}$	$1.09\ 10^{-2}$
10^{-1}	138	5160	$4.56\ 10^{4}$	$3.95\ 10^{0}$	$8.49\ 10^{-2}$
10^{0}	0	6390	$1.31\ 10^{5}$	$5.64\ 10^{1}$	$3.65\ 10^{-1}$

Лабораторна робота № 10

Вплив ефектів Доплера та загасання на форму коефіцієнта поглинання у фраунгоферовій лінії

Відомо, що коефіцієнт поглинання в фраунгоферовій лінії – це згортка профілю загасання:

$$æ_\gamma(\Delta\lambda) = \frac{e^2\lambda_0^2}{2mc^2}\gamma_\lambda N_n f_{nm} \frac{1}{(\Delta\lambda)^2 + (\frac{\gamma_\lambda}{2})^2}, \quad (1)$$

де $\gamma_\lambda = \gamma\lambda_0^2/2\pi C$ – стала загасання, см; з контуром Доплера (2)

$$æ_D(\Delta\lambda) = \frac{1}{\Delta\lambda_D}\exp\left[-\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_D}\right]^2. \quad (3)$$

Узявши згортку від (1) і (3), отримаємо підсумковий коефіцієнт поглинання у фраунгоферовій лінії:

$$æ_{\gamma D}(\Delta\lambda) = \frac{\sqrt{\pi e^2}}{mc^2}\cdot\frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda_D} N_n f_{nm} H\left(a, \frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_D}\right), \quad (4)$$

де параметр a визначений співвідношенням

$$2a = \gamma_\lambda / \Delta\lambda_D. \quad (5)$$

а $$H(a,V) = \frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-t^2)dt}{a^2 + (V-t)^2}, \quad (6)$$

З формули (6) випливає, що задача визначення $æ^l$ як функції від довжини хвилі $\Delta\lambda$ зводиться до обчислення інтеграла (6). У загальному вигляді цей інтеграл не беруть. Обчислення $H(a,V)$ є задачею, що дає змогу спеціалістам з прикладної математики випробовувати свої сили. Хоча зазначимо, що у більшості фізичних випадків функцію $H(a,V)$ треба розглядати лише як деяку апроксимацію справжнього профілю поглинання. По-перше, багато профілів, розширених тиском, не лоренцові, по-друге, суттєвий внесок у доплерівське розширення багатьох ліній роблять турбулентні швидкості, що можуть мати негаусовий характер.

При $a<<1$, що виконується для більшості ліній поглинання, які утворюються в зоряних атмосферах, коефіцієнт поглинання з формули (4) можна в різних частинах фраунгоферової лінії записати за допомогою двох різних виразів: першого, що визначений тільки ефектом Доплера з відповідною формулою (3), і другого, що визначений тільки загасанням (1). Вираз (3) відіграє головну роль у центральних частинах ліній, у їхніх ядрах, а вираз (1), зумовлений загасанням, – для більш віддалених від центра частот, де доплерівське розширення не відіграє ніякої ролі, що випливає з експоненціального характеру закону (3). У з'єднувальній проміжній частині, коефіцієнт поглинання не можна записати ні формулою (1), ні (3). Однак у більшості випадків, що трапляються на практиці, a завжди мале і у цьому випадку функцію Фойгта схематично можна навести у вигляді

$$H(a,v) \equiv e^{-v^2} + \frac{a}{\pi^{1/2} - v^2}, \qquad (7)$$

де перший доданок примітний лише в ядрі лінії (при $v \le v^*$), а другий – у крилі лінії (при $v \ge v^*$). У цьому випадку v^* вибирають так, що при $v = v^*$ обидва доданки збігаються. В ядрі переважає доплерівський ефект, а в крилах головну роль відіграє загасання.

У цій роботі для фраунгоферової лінії з відомою еквівалентною шириною W, півшириною h, центральною глибиною d обчислюємо параметр p:

$$p = W / h \cdot d. \qquad (8)$$

З теорії профілів Фойгта відомо, що параметр p змінюється від $p = 1.06$ до $p = 1.57$ у разі переходу від суто доплерівського профілю (3) до суто лоренцового (1). За таблицею параметрів профілю Фойгта:

p	1.064	1.108	1.154	1.201	1.251	1.302	1.350	1.408
a	0	0.088	0.188	0.302	0.435	0.549	0.807	1.086

визначаємо для заданої лінії параметр загасання a, що входить у (7). Далі, послідовно вираховуючи перший та другий доданки в (7), визначаємо таке $v = v^*$, за якого вони зрівнюються.

Пізніше будуємо профіль коефіцієнта поглинання æ $(\Delta\lambda)$ і порівнюємо його з профілем фраунгоферової лінії $J(\Delta\lambda)$, визначеним зі спостережень.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 11

Визначення доплерівських швидкостей у сонячній фотосфері методом Гольдберга-Унна

Доплерівські швидкості в сонячній атмосфері визначають різними методами. Можна прямо вимірювати доплерівські зсуви окремих гранул, однак цьому перешкоджають атмосферні дрижання. Можна вимірювати півширини ліній.

У цій роботі пропонуємо використати для обчислення доплерівських ширин фраунгоферових ліній порівняння між собою двох ліній, що належать одному мультиплету. У цьому випадку доплерівську півширину $\Delta\lambda_D$ можна обчислити незалежно від моделі атмосфери. Модель потрібна лише для обчислення оптичної глибини, до якої виведена доплерівська ширина повинна бути віднесена.

Розглянемо дві лінії, що належать тому самому мультиплету A і B. Коефіцієнт поглинання в доплерівських ядрах для цих ліній можна записати так:

$$æ_A \exp\left[-\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_D}\right]^2;$$

$$æ_B \exp\left[-\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_D}\right]^2,$$

де відношення $æ_A / æ_B$ що дорівнює відношенню gf_A / gf_B, повинно бути відомим. Тоді пару $\Delta\lambda_A$ і $\Delta\lambda_B$ отримують так, що коефіцієнт поглинання лінії A при $\Delta\lambda_A$ дорівнює $æ_B$ для $\Delta\lambda_B$:

$$æ_A \exp\left[-(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_D})\right]^2 = æ_B \exp\left[-(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_D})\right]^2. \quad (1)$$

Назовні інтенсивність у лінії A при $\Delta\lambda_A$ прирівнюють до інтенсивності в лінії B при $\Delta\lambda_B$, оскільки рівняння перенесення та граничні умови однакові для обидвох ліній:

$$J(\Delta\lambda_A,\mu) = J(\Delta\lambda_B,\mu), \quad (2)$$

де $\mu = \cos\theta$ – положення на диску Сонця.

Різницею в $æ_{ul}$ для обох ліній нехтуємо, бо лінії одного мультиплету, як звичайно близькі між собою за довжинами хвиль. З (1) отримуємо

$$\Delta\lambda_D = \left\{\frac{\Delta\lambda_A^2 - \Delta\lambda_B^2}{\ln[(gf)_A/(gf)_B]}\right\}^{1/2}. \quad (3)$$

Оскільки

$$\Delta\lambda_D = \frac{\lambda}{C}\sqrt{\frac{2RT}{\mu} + v_{tu}^2} \equiv \frac{\lambda}{C}\sqrt{v_{tepl}^2 + v_{turb}^2}, \quad (4)$$

то

$$v_{turb}^2 = \frac{C^2}{\lambda^2}\Delta\lambda_D - v_{tepl}^2. \quad (5)$$

Визначені турбулентні та теплові швидкості збігаються з інтервалом оптичних глибин, де утворюється ця точка профілю.

Задано оптичні глибини, визначені для центра лінії і на відстані $\Delta\lambda$, що дорівнює півширині лінії. Є чітко виражена залежність середніх оптичних глибин утворення центрів ліній від їхніх інтенсивностей. Чим більша глибина лінії, тим менша відповідна r_5. На краю диска $(\mu = 0.28)$ глибини утворення для кожної лінії менші, ніж у центрі.

У табл. 1 наведені головні характеристики мультиплету № 62 заліза *FeI*, у табл. 2 – головні характеристики мультиплету № 74 заліза *FeII*. Значення v_{turb} і v_{tepl} треба обчислювати згідно з моделлю, що в табл. 3 (модель HSRA).

Таблиця 1

λ, Å	E.P.	lg gf	d	$\Delta\lambda_D$	τ
6151.623	2.18	-3.50			
6171.341	2.22	-2.88			
6213.438	2.22	-2.68			
6219.287	2.20	-2.43			
6297.880	2.20	-2.74			
6335.300	2.20	-1.46			

Таблица 2

λ	E.P.	lg gf	d	$\Delta\lambda_D$
6149.249	3.89	-3.05		
6238.300	3.89	-3.00		
6247.562	3.89	-2.64		
6456.562	3.90	-2.52		

Таблица 3

τ	1	0.1	0.125	0.158	0.2	0.25	0.316	0.4	0.5	0.63	0.794
T	6390	5160	5240	5330	5430	5540	5680	5765	5890	6035	6200