ЖУРНАЛ ФIЗИЧНИХ ДОСЛIДЖЕНЬ
т. 1, № 3 (1997) с. 314–316

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 1, No 3 (1997) p. 314–316

СУПЕРЗАРЯДИ У ВИПАДКУ РУХУ ЕЛЕКТРОНА В НЕСТАЦIОНАРНОМУ МАГНЕТНОМУ ПОЛI

В. М. Ткачук
Львiвський державний унiверситет iменi Iвана Франка, кафедра теоретичної фiзики
Україна, UA–290005, Львiв, вул. Драгоманова, 12
E-mail: tkachuk@KTF.Franko.Lviv.UA

(Отримано 14 сiчня 1997)

Вивчається суперсиметрiя нестацiонарного рiвняння Паулi. Побудованi суперзаряди, якi є iнтеґралами руху в цьому випадку.

Ключовi слова: суперсиметрiя, рiвняння Паулi, нестацiонарне магнетне поле.

PACS number(s): 03.65.-w, 11.30.Pb

Пiсля появи робiт [1–3], де були введенi суперсиметричнi моделi квантової теорiї поля, iдея суперсиметрiї почала поширюватись в iнших галузях фiзики i математики [4, 5]. Одновимiрна суперсиметрична квантова механiка була запропонована в [6, 7]. Однiєю з квантовомеханiчних задач, де суперсиметрiя є фiзичною симетрiєю, є задача про рух електрона в стацiонарному магнетному полi [4, 8].

Недавно в [9] була встановлена суперсиметрiя одновимiрного часозалежного рiвняння Шредiнгера. Цю iдею в данiй роботi ми розвиваємо для випадку руху електрона у змiнному в часi магнетному полi, паралельному до осi z, який описується нестацiонарним рiвнянням Паулi

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H_p\psi, \tag{1}$$

де

$$H_p = \frac{1}{2}(\pi_x^2 + \pi_y^2 + p_z^2 - eB\sigma_z), \tag{2}$$

$$\pi_\alpha = p_\alpha - eA_\alpha, \qquad p_\alpha = -i\frac{\partial}{\partial x_\alpha},$$

$$A_x = A_x(x,y,t), A_y = A_y(x,y,t), A_z = 0$$

є компонентами векторного потенцiалу,

$$B = B_z(x,y,t) = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

є магнiтне поле, паралельне осi z. Тут вибрана система одиниць, в якiй стала Планка, швидкiсть свiтла i маса електрона рiвнi одиницi.

Оскiльки p_z є iнтеґралом руху, то розв'язок (1) шукаємо у виглядi

$$\psi(x,y,z,t) = e^{-ik^2t/2+ikz}\psi(x,y,t),$$

де k — значення iмпульсу при русi вздовж осi z. Тодi для $\psi(x,y,t)$ одержуємо рiвняння Паулi, яке описує рух електрона в двовимiрному просторi з гамiльтонiяном

$$H = \frac{1}{2}(\pi_x^2 + \pi_y^2 - eB\sigma_z). \tag{3}$$

Надалi ми будемо мати справу з двовимiрним гамiльтонiяном Паулi (3).

Нагадаємо спочатку основнi моменти суперсиметрiї двовимiрного рiвняння Паулi у випадку стацiонарного магнетного поля [4, 8]. Шукаючи розв'язок у виглядi $\psi(x,y,t) = e^{-iEt}\psi(x,y)$, одержуємо стацiонарне рiвняння Паулi

$$H\psi(x,y) = E\psi(x,y). \tag{4}$$

Двовимiрний гамiльтонiян Паулi можна записати у виглядi [4, 8]

$$H = \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \pi_-\pi_+ & 0 \\ 0 & \pi_+\pi_- \end{pmatrix}, \tag{5}$$

або у наступнiй суперсиметричнiй формi

$$H = \{Q_+, Q_-\}. \tag{6}$$

Суперзаряди Q_+, Q_- мають вигляд

$$Q_+ = \frac{\pi_-\sigma_+}{\sqrt{2}}, \tag{7}$$

$$Q_- = \frac{\pi_+\sigma_-}{\sqrt{2}},$$

де

$$\pi_\pm = \pi_x \pm i\pi_y,$$

$$\sigma_\pm = \frac{\sigma_x \pm i\sigma_y}{2}.$$

Зручно ввести комплексні змінні $z = x + iy$. Тоді

$$\pi_+ = -2i\frac{\partial}{\partial z^*} - eA(z, z^*), \tag{8}$$

$$\pi_- = -2i\frac{\partial}{\partial z} - eA^*(z, z^*),$$

$$A(z, z^*) = A_x + iA_y.$$

Прямий розрахунок показує, що

$$(Q_\pm)^2 = 0, \tag{9}$$

$$[Q_\pm, H] = 0.$$

Співвідношення (6) і (9) утворюють алгебру суперсиметрії, яка пояснює двократне виродження енергетичних рівнів електрона, крім нульового, навіть у випадку неоднорідного “двовимірного” магнетного поля $B(x, y)$.

Зауважимо, що суперзаряди $Q_\pm$ комутують із гамільтоніяном і у випадку стаціонарного магнетного поля вони є інтеґралами руху. У випадку нестаціонарного магнетного поля всі співвідношення (5)–(9) залишаються справедливими, проте $Q_\pm$ уже не є інтеґралами руху. Мета цієї роботи знайти суперзаряди $\tilde{Q}_\pm$, які були б інтеґралами руху. Для цього $\tilde{Q}_\pm$ повинні задовольняти рівняння

$$i\frac{\partial \tilde{Q}_\pm}{\partial t} + [\tilde{Q}_\pm, H] = 0. \tag{10}$$

Ми розглянемо випадок однорідного нестаціонарного магнетного поля $B = B(t)$ з векторним потенціялом

$$A_x = -B(t)y/2, \tag{11}$$

$$A_y = B(t)x/2.$$

Тоді

$$\pi_- = -2i\frac{\partial}{\partial z} + i\frac{eB(t)}{2}z^*, \tag{12}$$

$$\pi_+ = -2i\frac{\partial}{\partial z^*} - i\frac{eB(t)}{2}z.$$

Суперзаряди $\tilde{Q}_\pm$, які задовольняють рівняння (10), шукаємо у вигляді, подібному до (7)

$$\tilde{Q}_+ = \frac{\tilde{\pi}_-\sigma_+}{\sqrt{2}}, \tag{13}$$

$$\tilde{Q}_- = \frac{\tilde{\pi}_+\sigma_-}{\sqrt{2}},$$

де

$$\tilde{\pi}_- = -f_1(t)2i\frac{\partial}{\partial z} + f_2(t)i\frac{eB}{2}z^*, \tag{14}$$

$$\tilde{\pi}_+ = -f_1^*(t)2i\frac{\partial}{\partial z^*} - f_2^*(t)i\frac{eB}{2}z.$$

Наведемо комутаційні співвідношення, корисні для подальших обчислень

$$[\pi_-, \pi_+] = -2eB, \tag{15}$$

$$[\tilde{\pi}_-, \tilde{\pi}_+] = -eB(f_1 f_2^* + f_1^* f_2),$$

$$[\tilde{\pi}_-, \pi_+] = -eB(f_1 + f_2),$$

$$[\pi_-, \tilde{\pi}_+] = -eB(f_1^* + f_2^*),$$

$$[\pi_-, \tilde{\pi}_-] = [\pi_+, \tilde{\pi}_+] = 0.$$

Підставляючи $\tilde{Q}_+$ із (13) в (10), одержуємо рівняння для $\tilde{\pi}_-$

$$i\frac{\partial \tilde{\pi}_-}{\partial t} + \tilde{\pi}_- H_- - H_+\tilde{\pi}_- = 0, \tag{16}$$

звідки, використовуючи явний вигляд $\tilde{\pi}_-$ (14), а також (15), і прирівнюючи в (16) до нуля вирази біля $\frac{\partial}{\partial z}$ і z^*, маємо наступну систему рівнянь для f_1 і f_2

$$i\frac{\partial f_1}{\partial t} = eB(t)(f_2 - f_1), \tag{17}$$

$$i\frac{\partial (f_2 B(t))}{\partial t} = eB^2(t)(f_1 - f_2).$$

Розв’язок шукаємо у вигляді

$$f_1 = fe^{i\Omega}, \tag{18}$$

$$f_2 = \frac{1}{eB}\phi e^{i\Omega},$$

де $\Omega = \int eB(t)dt$.

Тоді f і ϕ задовольняють систему

$$i\frac{\partial f}{\partial t} = \phi, \tag{19}$$

$$i\frac{\partial \phi}{\partial t} = (eB)^2 f,$$

яка зводиться до диференціяльного рівняння другого порядку для f

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -(eB)^2 f. \qquad (20)$$

Отже, у випадку однорідного нестаціонарного поля проблема знаходження суперзарядів $\tilde{Q}_\pm$ звелась до розв'язання диференціяльного рівняння (20). Розв'язавши (20), ми знайдемо f_1, f_2, а тим самим і суперзаряди (13) $\tilde{Q}_\pm$. Ці суперзаряди є інтеґралами руху гамільтоніяна H і утворюють супералгебру

$$\{\tilde{Q}_+, \tilde{Q}_-\} = \tilde{H}, \qquad (\tilde{Q}_\pm)^2 = 0, \qquad (21)$$

де

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \tilde{\pi}_-\tilde{\pi}_+ & 0 \\ 0 & \tilde{\pi}_+\tilde{\pi}_- \end{pmatrix}$$

є також інтеґралом руху гамільтоніяна H.

Цікаво розглянути постійне поле. В цьому випадку знаходимо

$$f_1 = (c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}) e^{i\omega t}, \qquad (22)$$

$$f_2 = (-c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}) e^{i\omega t},$$

де $\omega = eB$, c_1, c_2 — довільні константи.

Вибір $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ дає відомі суперзаряди (7). Другий незалежний розв'язок $c_2 = 0$, $c_1 = 1$ дає нові суперзаряди, які пов'язані із (7) наступним чином

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_+ &= e^{i2\omega t} Q_+(-B), \\ \tilde{Q}_- &= e^{-i2\omega t} Q_-(-B), \end{aligned} \qquad (23)$$

де $Q_\pm(-B)$ є суперзаряди (7) з протилежним за напрямком магнетним полем. Подібно $\tilde{H}$ співпадає із гамільтоніяном (3), у якому напрямок магнетного поля змінений на протилежний $\tilde{H} = H(-B)$. Нагадаємо, що $\tilde{Q}_\pm$ і $\tilde{H}$ є інтеґралами руху гамільтоніяна H. Цікаво зазначити, що гамільтоніян з магнетним полем $-B$ є інтегралом руху того самого гамільтоніяна з магнетним полем B.

Автор висловлює щиру подяку учасникам Новорічних дискусій за корисні обговорення.

---

[1] Ю. А. Гольфанд, Е. П. Ліхтман, Письма ЖЕТФ **13**, 452 (1971).
[2] Д. В. Волков, В. П. Акулов, Письма ЖЕТФ **16**, 621 (1972).
[3] J. Wess, B. Zumino, Nucl. Phys. B **70**, 39 (1974).
[4] Л. Е. Генденштейн, Н. В. Криве, Успехи физических наук **146**(4), 553 (1985).
[5] G. Junker, *Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics*, (Springer, Berlin, 1996).
[6] E. Witten, Nucl. Phys. B **185**, 513 (1981).
[7] H. Nicolai, J. Phys. B **70**, 39 (1974).
[8] Л. Е. Генденштейн, Ядерная физика **41** (5), 261 (1985).
[9] Vladislav G. Bagrov, Boris F. Samsonov, Phys. Lett. A **210**, 60 (1996)

SUPERCHARGES IN THE CASE OF ELECTRON MOTION IN NONSTATIONARY MAGNETIC FIELD

V. M. Tkachuk
Ivan Franko Lviv State University, Chair of Theoretical Physics
12 Drahomanov Str., Lviv UA–290005, Ukraine
E-mail: tkachuk@KTF.Franko.Lviv.UA

The supersymmetry of nonstationary Pauli equation is studied. The supercharges which are integrals of motion in this case are established.