ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 1, № 3 (1997) с. 356–361

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 1, No 3 (1997) p. 356–361

ІНТЕҐРАЛИ ЗА ТРАЄКТОРІЯМИ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛІУВІЛЛЯ

Л. Ф. Блажиєвський
Львівський державний університет імені Івана Франка, кафедра теоретичної фізики
Україна, 290005, Львів, вул. Драгоманова, 12
(Отримано 17 лютого 1997)

Запропоновано функціональне перетворення для T-впорядкованих експонентних функцій від добутку двох некомутуючих операторів. На цій основі отримані континуальні розв'язки рівняння Ліувілля у вигляді інтеґралів за траєкторіями в гамільтонових та лагранжевих змінних.

Ключові слова: інтеґрали за траєкторіями, континуальні інтеґрали, слаборелятивістська статистична механіка.

PACS number(s): 05.20-y, 03.30.+p

I. ВСТУП

Континуальне (інакше — функціональне) інтеґрування є одним з найбільш плідних методів сучасної теоретичної фізики. Започатковане Фейнманом наприкінці 40–х років як нове формулювання нерелятивістської квантової механіки [1], воно пізніше знайшло широке застосування в квантовій теорії поля та статистичній фізиці. Будучи альтернативою операторному формулюванню теорії, метод континуального інтеґрування має низку переваг. Наприклад, його можна використати і тоді, коли застосування звичайного операторного формалізму ускладнене математично (статистична теорія у постньютонівському наближенні) або взагалі неможливе (як у випадку систем з неадитивною дією). Стосовно задач статистичної механіки основи методу і конкретні приклади розрахунків на його основі досить детально відображені в літературі. Назвемо лише монографії [2, 3]. Однак властиво фейнманівське формулювання методу у вигляді інтеґрування за траєкторіями використовують лише у рівноважній статистичній теорії. Зокрема, статистична матриця густини нерелятивістської системи частинок визначається фейнманівським інтеґралом за траєкторіями конфіґураційного простору [1, 4]. Аналогічні формули можна отримати для функцій розподілу, середніх значень, тощо. Водночас у нерівноважній статистичній механіці подібний опис не набув застосування і майже невідомий. У цій праці розвинемо один можливий варіант такого опису. Частково ці питання ми вже розглядали раніше [5].

II. РІВНЯННЯ ЛІУВІЛЛЯ І ФУНКЦІЯ ҐРІНА

Як відомо, основою статистичних теорій нерівноважних процесів у класичних системах частинок, що взаємодіють, є рівняння Ліувілля — своєрідне рівняння руху статистичного ансамблю. Воно описує часову еволюцію функцій статистичного розподілу. Нагадаємо основні співвідношення, які будемо використовувати далі.

У гамільтонових змінних рівняння Ліувілля має вигляд

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\pi}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\right)-\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\pi}}\right)\right\}F(\boldsymbol{\pi},\mathbf{q},t)=0, \quad (2.1)$$

де $3N$–вимірні вектори $\boldsymbol{\pi}$ і $\mathbf{q}$ позначають сукупності канонічних імпульсів $\boldsymbol{\pi}_1,...,\boldsymbol{\pi}_N$ і координат $\mathbf{q}_1,...,\mathbf{q}_N$; $H\equiv H(\boldsymbol{\pi},\mathbf{q},t)$ — класичний гамільтоніян. Функція $F(\boldsymbol{\pi},\mathbf{q},t)$ нормована на одиницю, а середні значення фізичних величин визначаються за фомулою

$$<A(t)>=\int d\boldsymbol{\pi}d\mathbf{q}F(\boldsymbol{\pi},\mathbf{q},t)A(\boldsymbol{\pi},\mathbf{q},t). \quad (2.2)$$

У лагранжевих змінних ці співвідношення мають складніший вигляд. Перехід до лагранжевих змінних відбувається шляхом заміни $\boldsymbol{\pi}=\partial L/\partial\mathbf{u}$, де $\mathbf{u}$ — швидкість, а $L\equiv L(\mathbf{u},\mathbf{q},t)$ — лагранжіян, що відповідає гамільтоніяну H. Врахувавши властивості перетворень Лежандра

$$\mathbf{u}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}}-L=H, \quad \boldsymbol{\pi}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\pi}}-H=L,$$

знайдемо

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\left(\mathbf{u}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\right)+\left(\dot{\mathbf{u}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}\right)\right\}F\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}},\mathbf{q},t\right)=0,$$

$$<A(t)>=\int d\boldsymbol{\pi}d\mathbf{q}\ \det\left|\frac{\partial^2 L}{\partial\mathbf{u}\partial\mathbf{u}}\right| \quad (2.3)$$

$$\times F\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}},\mathbf{q},t\right)A\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}},\mathbf{q},t\right).$$

Тут множник $\dot{\mathbf{u}}$ є розв'язком алгебраїчної системи рівнянь

$$\left(\dot{\mathbf{u}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}\right)\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}}=\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}-\left[\frac{\partial}{\partial t}+\left(\mathbf{u}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\right)\right]\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}}, \quad (2.4)$$

які (при $\dot{\mathbf{u}} = d\mathbf{u}/dt$) збігаються з рівняннями руху Лагранжа–Ейлера. Однак для застосувань така форма рівняння Ліувілля дещо незручна, оскільки міра інтеґрування у просторі змінних $\mathbf{u}, \mathbf{q}$ в загальному випадку не є добутком одночастинкових мір. Наприклад, у постньютонівському наближенні визначник з формули (2.3) складним чином залежить як від швидкостей, так і від координат частинок. Тому зручніше об'єднати цей визначник з функцією F, увівши нову функцію розподілу

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{q}, t) = F\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}}, \mathbf{q}, t\right) \det\left|\frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{u}}\right|.$$

Тоді співвідношення (2.3) набувають вигляду

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \left(\mathbf{u}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}\dot{\mathbf{u}}\right)\right\} f(\mathbf{u}, \mathbf{q}, t) = 0,$$

$$< A(t) >= \int d\mathbf{u} d\mathbf{q}\; f(\mathbf{u}, \mathbf{q}, t) A\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}}, \mathbf{q}, t\right). \tag{2.5}$$

Для розв'язування конкретних задач, зокрема у слаборелятивістській статистичній механіці [6], використовують й інші форми рівняння Ліувілля. У загальному випадку незалежно від вибору змінних і задання міри інтеґрування його завжди можна записати у вигляді

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \widehat{\mathcal{L}}_{\mathbf{x}}(t)\right) \Psi(\mathbf{x}, t) = 0,$$

$$\widehat{\mathcal{L}}_{\mathbf{x}}(t) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \Phi(\mathbf{x}, t), \tag{2.6}$$

де $\mathbf{x}$ є гамільтоновими ($\mathbf{x} = \{\boldsymbol{\pi}, \mathbf{q}\}$) або лагранжевими ($\mathbf{x} = \{\mathbf{u}, \mathbf{q}\}$) змінними; $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathbf{x}}(t)$ — оператор Ліувілля; $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t)$, $\Phi(\mathbf{x}, t)$ — деякі функції. Оскільки рівняння (2.6) лінійне, то його розв'язок визначається за формулою

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \int d\mathbf{x}_0\; G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)\Psi(\mathbf{x}_0, t_0). \tag{2.7}$$

Тут $\Psi(\mathbf{x}_0, t_0)$ є функцією статистичного розподілу в початковий момент часу t_0, а $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ — функцією Ґріна. Причому

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) \tag{2.8}$$
$$= T \exp\left\{-\int_{t_0}^{t} d\tau\; \widehat{\mathcal{L}}_x(\tau)\right\} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

де T — символ хронологічного впорядкування операторів.

Подібність цих формул і аналогічних співвідношень квантової механіки очевидна. Вона свідчить про те, що закони еволюції квантово-механічної хвильової функції і функції статистичного розподілу є однаковими. Це означає, що, як і у квантовій механіці, операторні співвідношення (2.6)–(2.8) можна описати мовою континуального інтеґрування за траєкторіями.

III. КОНТИНУАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ҐРІНА

Згідно з фейнманівським формулюванням нерелятивістської квантової механіки функція Ґріна

$$\mathcal{G}(\mathbf{q}, t; \mathbf{q}_0, t_0) \tag{3.1}$$
$$= T \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} d\tau \widehat{H}_{\mathbf{q}}(\tau)\right\} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)$$

для рівняння Шредінґера визначається інтеґралом за траєкторіями у конфігураційному просторі [1]:

$$\mathcal{G}(\mathbf{q}, t; \mathbf{q}_0, t_0) = \int_{(\mathbf{q}_0)}^{(\mathbf{q})} \delta\mathbf{q}(\tau)\; \mu$$
$$\times \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} d\tau L\left(\frac{d\mathbf{q}}{d\tau}, \mathbf{q}, \tau\right)\right], \tag{3.2}$$

де $\mathbf{q}(\tau)$ і $d\mathbf{q}(\tau)/d\tau$ — координата і швидкість частинки в момент часу τ; $L\left(\frac{d\mathbf{q}}{d\tau}, \mathbf{q}, \tau\right)$ і $\widehat{H}_{\mathbf{q}}(\tau)$ — класична функція Лагранжа і оператор Гамільтона; μ — деякий функціонал, конкретна форма якого залежить від вигляду лагранжіяна [7]; $\delta\mathbf{q}(\tau) = d\mathbf{q}_1 ... d\mathbf{q}_{n-1}/(2\pi i\hbar\varepsilon)^{n/2}$. Континуальний інтеґрал (3.2) прийнято розуміти як межу добутків $(n-1)$ звичайних інтеґралів при $n \to \infty$ $(n\varepsilon = t - t_0)$, що отримуються заміною інтеґрала за часом у показнику експоненти інтеґральною сумою.

Формула (3.2) відображає мультиплікативний характер функції Ґріна. Саме з цих міркувань її вперше й отримали. У більш загальному випадку перехід від операторної форми теорії до континуальної відбувається аксіоматично [8] постулюванням деяких простіших ("майже очевидних") співвідношень між операторними і континуальними формами. У цьому випадку часто як вихідне співвідношення використовують функціональне перетворення гауссівського типу

$$T \exp\left\{-i\int_{t_0}^{t} d\tau \left(\frac{1}{2}\widehat{A}_\tau^2 + \widehat{B}_\tau\right)\right\} = C\int \mathcal{D}\nu(\tau)\; T\exp\left\{i\int_{t_0}^{t} d\tau\left(\frac{1}{2}\nu^2(\tau) + \nu(\tau)\widehat{A}_\tau - \widehat{B}_\tau\right)\right\}, \tag{3.3}$$

$$\mathcal{D}\nu(\tau) = \prod_{t_0 \le \tau \le t} d\nu(\tau), \quad -\infty \le \nu(\tau) \le +\infty,$$

де C — нормуюча стала, $\widehat{A}_\tau, \widehat{B}_\tau$ — лінійні (у загальному випадку некомутуючі) оператори. Домножуючи обидва боки цієї рівності на довільну функцію і розкриваючи дію операторів, отримуємо більш складні континуальні інтеґрали. Зокрема, домноживши на $\delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)$ і відповідно вибравши оператори $\widehat{A}_\tau, \widehat{B}_\tau$ з (3.3), отримуємо континуальний інтеґрал для функції Ґріна (3.1).

Використаємо подібний підхід для побудови континуального зображення функції (2.8). З огляду на структуру оператора Ліувілля (2.6) замість (3.3) зручніше виходити з іншої формули. Роглянемо рівність

$$|C|^2 \int \mathcal{D}a(\tau)\mathcal{D}b(\tau)\; T \exp \int_{t_0}^{t} d\tau \{ia(\tau)b(\tau) - ia(\tau)\widehat{A}_\tau - b(\tau)\widehat{B}_\tau\}$$
$$= T \exp\left\{-\int_{t_0}^{t} d\tau \frac{1}{2}(\widehat{A}_\tau \widehat{B}_\tau + \widehat{B}_\tau \widehat{A}_\tau)\right\}, \quad |C|^2 = \prod_\tau (\Delta\tau/2\pi). \tag{3.4}$$

У її правильності можна переконатись безпосереднім обчисленням. Розвинемо для цього T-експонету з лівої частини формули (3.4) у ряд, наприклад, за степенями оператора $\widehat{B}_\tau$. Інтеґрал за змінною $b(\tau)$ виражається через функціональні похідні від безмежновимірної δ-функції $\prod_\tau \delta(a(\tau))$. Після інтеґрування за частинами знайдемо, що n-й член розвинення описують формули:

$$\int_{t_0}^{t} d\tau_1 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} d\tau_n (-i)^n \frac{\delta}{\delta a(\tau_1)} \widehat{U}(t,\tau_1)\widehat{B}_{\tau_1} \frac{\delta}{\delta a(\tau_2)} \widehat{U}(\tau_1,\tau_2)\widehat{B}_{\tau_2} \cdots \frac{\delta}{\delta a(\tau_n)} \widehat{U}(\tau_{n-1},\tau_n)\widehat{B}_{\tau_n}\widehat{U}(\tau_n,t_0)|_{a(\tau)=0}, \tag{3.5}$$

$$\widehat{U}(\tau_j,\tau_{j+1}) = T \exp\left(-\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} d\tau' \; a(\tau')\widehat{A}_{\tau'}\right).$$

Обчисливши похідні, побачимо, що (3.5) збігається з n-м членом аналогічного розвинення у ряд правої частини формули (3.4). Співвідношення (3.4) зручно дещо модифікувати. Із загальних властивостей T-впорядкованих операторів видно, що у показники експонент обох боків рівності можна ввести як доданок довільний оператор. Вибравши його у вигляді $\widehat{\mathrm{C}}_\tau + \frac{1}{2}(\widehat{A}_\tau \widehat{B}_\tau - \widehat{B}_\tau \widehat{A}_\tau)$, визначимо:

$$T \exp\left(-\int_{t_0}^{t} d\tau \{\widehat{A}_\tau \widehat{B}_\tau + \widehat{C}_\tau\}\right) = |C|^2 \int \mathcal{D}a(\tau)\mathcal{D}b(\tau) \exp\left(i\int_{t_0}^{t} d\tau a(\tau)b(\tau)\right)$$
$$\times\, T \exp\left(-i\int_{t_0}^{t} d\tau \left\{ia(\tau)\widehat{A}_\tau + b(\tau)\widehat{B}_\tau + \frac{1}{2}[\widehat{A}_\tau, \widehat{B}_\tau]_- + \widehat{C}_\tau\right\}\right), \tag{3.6}$$

де $[\widehat{A}_\tau, \widehat{B}_\tau]_-$ — комутатор.

Розглядаючи тепер (2.6), (2.8), бачимо, що для отримання континуального зображення функції Ґріна потрібно домножити (3.6) на $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, вибравши оператори $\widehat{A}_\tau,\ \widehat{B}_\tau,\ \widehat{C}_\tau$ у вигляді $\widehat{A}_\tau = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},\tau),\ \widehat{B}_\tau = \partial/\partial\mathbf{x},\ \widehat{C}_\tau = \Phi(\mathbf{x},\tau)$. Тоді $[\widehat{A}_\tau, \widehat{B}_\tau]_- = -div_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x},\tau)$. Після "виплутування" похідної з-під знака T добутку будемо мати

$$G(\mathbf{x},t;\mathbf{x}_0,t_0) = |C|^2 \int \mathcal{D}\mathbf{a}(\tau)\mathcal{D}\mathbf{b}(\tau) \exp\left(i\int_{t_0}^{t} d\tau (\mathbf{a}(\tau), \mathbf{b}(\tau) - \boldsymbol{\varphi}_\tau)\right)$$
$$\times \exp\left(-\int_{t_0}^{t} d\tau [\Phi_\tau - div_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\varphi}_\tau]\right) \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - \int_{t_0}^{t} d\tau\; \mathbf{b}(\tau)\right),$$

де індекс τ означає, що арґументом функцій $\Phi_\tau, \boldsymbol{\varphi}_\tau$ є величина

$$\mathbf{x} - \int_{\tau}^{t} d\tau' \; \mathbf{b}(\tau').$$

Інтеґрал за $\mathbf{a}(\tau)$ визначає безмежновимірну δ-функцію. Змінивши ще позначення, запишемо

$$G(\mathbf{x},t;\mathbf{x}_0,t_0)=\int\mathcal{D}\mathbf{v}(\tau)\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0-\int_{t_0}^{t}d\tau\ \mathbf{v}(\tau)\right)\prod_{\tau}\delta(\mathbf{v}-\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}(\tau),\tau))$$
$$\times\exp\int_{t_0}^{t}d\tau\left\{\frac{1}{2}div_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}(\tau),\tau)-\Phi(\mathbf{x}(\tau),\tau)\right\},\tag{3.7}$$
$$\mathbf{x}(\tau)=\mathbf{x}-\int_{\tau}^{t}d\tau'\ \mathbf{v}(\tau').$$

Як видно з останньої формули, змінна інтеґрування $\mathbf{v}(\tau)$ має зміст швидкості, якщо $\mathbf{x}$ — координата. Безмежновимірна δ-функція із (3.7) визначає рівняння руху системи. В інтеґральній формі воно має вигляд

$$\mathbf{v}(\tau)=\boldsymbol{\varphi}\left(\mathbf{x}-\int_{\tau}^{t}d\tau'\ \mathbf{v}(\tau'),\tau\right).\tag{3.8}$$

Співвідношення (3.8) еквівалентне диференційному рівнянню руху

$$\frac{d\mathbf{x}(\tau)}{d\tau}=\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}(\tau),\tau)\tag{3.9}$$

за початкової умови $\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}$.

Континуальний інтеґрал (3.7) можна записати у формі фейнманівського інтеґрала за траєкторіями. Для цього, як звичайно, апроксимуємо його добутком інтеґралів:

$$G=\int d\mathbf{v}_1\cdots d\mathbf{v}_n\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0-\varepsilon\sum_{j=1}^{n}\mathbf{v}_j\right)\prod_{l=1}^{n}\delta(\mathbf{v}_l-\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_l[\mathbf{v}]))$$
$$\times\exp\varepsilon\sum_{s=1}^{n}\left\{\frac{1}{2}div\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_l[\mathbf{v}])-\Phi(\mathbf{x}_l[\mathbf{v}])\right\},$$
$$\mathbf{x}_l[\mathbf{v}]=\mathbf{x}-\varepsilon\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}_l+\mathbf{v}_{l+1}+\cdots+\mathbf{v}_n\right).$$

Після заміни змінних $\mathbf{v}_l=(\mathbf{x}_l-\mathbf{x}_{l-1})/\varepsilon$ отримуємо

$$G(\mathbf{x},t;\mathbf{x}_0,t_0)=\int_{(\mathbf{x}_0)}^{(\mathbf{x})}\delta\mathbf{x}(\tau)\prod_{\tau}\delta\left(\frac{d\mathbf{x}(\tau)}{d\tau}-\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}(\tau),\tau)\right)$$
$$\times\exp\int_{t_0}^{t}d\tau\left\{\frac{1}{2}div_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}(\tau),\tau)-\Phi(\mathbf{x}(\tau),\tau)\right\},\tag{3.10}$$
$$\delta\mathbf{x}(\tau)=d\mathbf{x}_1\cdots d\mathbf{x}_{n-1}/\varepsilon^n;\quad\frac{d\mathbf{x}(\tau)}{d\tau}=\frac{\mathbf{x}_l-\mathbf{x}_{l-1}}{\varepsilon},\quad\mathbf{x}_n\equiv\mathbf{x}.$$

IV. КОНТИНУАЛЬНИЙ ІНТЕҐРАЛ У ФАЗОВОМУ І КОНФІГУРАЦІЙНОМУ ПРОСТОРАХ

Розглянемо тепер детальніше гамільтонівський і лагранжевий описи. Щоб отримати континуальне зображення функції Ґріна у гамільтонових змінних, потрібно, як видно із співвідношень (2.1), (2.6), прийняти у формулах (2.8), (3.6) $\left(\boldsymbol{\varphi}\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\right)=\left(\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{\pi}}\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}\right)-\left(\frac{\partial H}{\partial\mathbf{q}}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\pi}}\right)$, $\Phi(\mathbf{x},t)=0$. Тоді $div_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\varphi}=0$. Позначивши швидкості зміни координат та імпульсів через $\mathbf{u}(\tau)$, $\mathbf{f}(\tau)$, визначимо:

$$
\begin{aligned}
&G(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{q}, t; \boldsymbol{\pi}_0, \mathbf{q}_0, t_0) = \int \mathcal{D}\mathbf{u}(\tau) \int \mathcal{D}\mathbf{f}(\tau) \prod_\tau \left\{ \delta \left(\mathbf{u}(\tau) - \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\pi}} \right) \delta \left(\mathbf{f}(\tau) - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right) \right\} \\
&\times \delta \left(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0 - \int_{t_0}^t d\tau \ \mathbf{u}(\tau) \right) \delta \left(\boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\pi}_0 - \int_{t_0}^t d\tau \ \mathbf{f}(\tau) \right), \qquad (4.1) \\
&H \equiv H \left(\boldsymbol{\pi} - \int_\tau^t d\tau' \ \mathbf{f}(\tau'), \mathbf{q} - \int_\tau^t d\tau' \ \mathbf{u}(\tau') \right).
\end{aligned}
$$

У випадку лагранжевих змінних $\left(\boldsymbol{\varphi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) = \left(\mathbf{u} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\right) - \left(\dot{\mathbf{u}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}\right)$, $\Phi(\mathbf{x}, \tau) = div_\mathbf{u} \dot{\mathbf{u}}$. Оскільки $\mathbf{u}$ і $\mathbf{q}$ незалежні змінні, то $div_\mathbf{x} \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, \tau) = div_\mathbf{u} \dot{\mathbf{u}}$. Нехай $\mathbf{u}(\tau)$ знову є швидкістю зміни координати. Швидкість зміни швидкості позначимо через $\mathbf{a}(\tau)$. Тоді роль $\boldsymbol{\varphi}(x(\tau), \tau)$ у континуальному інтеґралі (3.7) відіграватимуть величини

$$
\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u} - \int_\tau^t d\tau' \ \mathbf{a}(\tau'), \quad \dot{\mathbf{u}} \left(\mathbf{u} - \int_\tau^t d\tau' \ \mathbf{a}(\tau'), \mathbf{q} - \int_\tau^t d\tau' \ \mathbf{u}(\tau') \right) \equiv \dot{\mathbf{u}}_\tau,
$$

а сам інтеґрал набуде вигляду

$$
\begin{aligned}
&G = \int \mathcal{D}\mathbf{u}(\tau) \int \mathcal{D}\mathbf{a}(\tau) \prod_\tau \left\{ \delta \left(\mathbf{u}(\tau) - \left[\mathbf{u} - \int_\tau^t d\tau' \ \mathbf{a}(\tau') \right] \right) \delta \left(\mathbf{a}(\tau) - \dot{\mathbf{u}}_\tau \right) \right\} \\
&\times \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t d\tau \ div_\mathbf{u} \dot{\mathbf{u}}_\tau \right) \delta \left(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0 - \int_{t_0}^t d\tau \ \mathbf{a}(\tau) \right) \delta \left(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0 - \int_{t_0}^t d\tau \ \mathbf{u}(\tau) \right). \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

Формула (4.2) незручна, оскільки у ній фіґурують фактично невідомі функції $\dot{\mathbf{u}}$. Як видно з (2.4), знаходження явного вигляду цих функцій пов'язане з оберненням матриці $\partial^2 L / \partial \mathbf{u} \partial \mathbf{u}$ розміром $3N \times 3N$. Однак інтеґралові (4.2) легко надати форми, яка взагалі не містить $\dot{\mathbf{u}}$. Співмножник з дивергенцією можна перетворити на основі рівності

$$
-div_\mathbf{u} \dot{\mathbf{u}}_\tau = \frac{d}{d\tau} \ln \det \left| \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{u}} \right|,
$$

яка є наслідком рівнянь руху (і яку фактично уже мали на увазі під час переходу від рівняння (2.3) до рівняння (2.5)). В аргументі δ–функції $\dot{\mathbf{u}}$ вилучається простим узагальненням відомого співвідношення $c\delta(c\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$ ($c =$const) на випадок багатьох змінних. У нашому випадку матимемо

$$
\begin{aligned}
&\delta(\mathbf{a}(\tau) - \dot{\mathbf{u}}_\tau) = L''(\tau) \delta \left(\left(\mathbf{a}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \right) \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} - \left(\dot{\mathbf{u}}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \right) \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \right), \qquad (4.3) \\
&L''(\tau) = \det \left| \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{u}(\tau) \partial \mathbf{u}(\tau)} \right|.
\end{aligned}
$$

Використовуючи (2.4) і враховуючи в L функціональну залежність швидкостей $\mathbf{u}(\tau)$ від $\mathbf{a}(\tau)$, безпосередньою перевіркою неважко переконатись, що аргумент δ–функції у правому боці (4.3) дорівнює

$$
\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}(\tau)} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}(\tau)}.
$$

Якщо ще візьмемо до уваги, що перша δ–функція в (4.2) знімає інтеґрування за $\mathbf{u}(\tau)$, то знайдемо

$$
G(\mathbf{u}, \mathbf{q}, t; \mathbf{u}_0, \mathbf{q}_0, t_0) = [L''(t)/L''(t_0)]^{1/2} \int \mathcal{D}\mathbf{a}(\tau) \prod_\tau \left\{ L''(\tau) \delta \left(\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right) \right\} \qquad (4.4)
$$

$$\times\delta\left(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0-\int_{t_0}^{t}d\tau\ \mathbf{a}(\tau)\right)\delta\left(\mathbf{q}-\mathbf{q}_0-\int_{t_0}^{t}d\tau\ \left[\mathbf{u}-\int_{\tau}^{t}d\tau^{'}\ \mathbf{a}(\tau^{'})\right]\right),$$

де $L = L(\mathbf{u}(\tau), \mathbf{q}(\tau), \tau)$ — функція Лагранжа, у якій швидкості $\mathbf{u}(\tau)$ і координати $\mathbf{q}(\tau)$ функціонально залежать від $\mathbf{a}(\tau)$:

$$\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u} - \int_{\tau}^{t} d\tau^{'}\ \mathbf{a}(\tau^{'}), \tag{4.5}$$

$$\mathbf{q}(\tau) = \mathbf{q} - \int_{\tau}^{t} d\tau^{'}\ \left[\mathbf{u} - \int_{\tau^{'}}^{t} d\tau^{''}\ \mathbf{a}(\tau^{''})\right].$$

Отримані формули визначають функцію Ґріна для рівняння Ліувілля через континуальний інтеґрал за траєкторіями частинок у конфігураційному просторі. Як видно з (4.5), змінна інтеґрування $\mathbf{a}(\tau)$ має зміст прискорення.

---

[1] Р. Фейнман, А. Хибс, *Квантовая механика и интегралы по траекториям* (Мир, Москва, 1968).

[2] А. Н. Васильев, *Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике* (ЛГУ, Ленинград, 1976).

[3] В. Н. Попов, *Континуальные интагралы в квантовой теории поля и статистической физике* (Атомиздат, Москва, 1976).

[4] Р. Фейнман, *Статистическая механика* (Наука, Москва, 1984).

[5] Л. Ф. Блажиевский, Укр. физ. журн. **31**, 953 (1986).

[6] И. П. Павлоцкий, *Начала слаборелятивистской статистической механики* (Высшая школа, Москва, 1983).

[7] Е. С. Фрадкин, *Проблемы теоретической физики* (Наука, Москва, 1972).

[8] А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *Введение в квантовою теорию калибровочных полей* (Наука, Москва, 1978).

PATH INTEGRALS FOR THE LIOUVILLE EQUATION

L. F. Blazhievsky

Lviv State University, Chair for Theoretical Physics

12 Drahomanov Str., Lviv, UA–290005, Ukraine

The functional transformation for T-ordered exponential functions of two noncommuting operators product was suggested. On this basis continual solutions of the Liouville equation in the form of path integrals in Hamilton and Lagrange variables were found.