ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 1, № 3 (1997) с. 431–440

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 1, No 3 (1997) p. 431–440

# КРОСОВЕР ВІД НАДПЛИННОСТІ ДО НАДПРОВІДНОСТІ У 2D СИСТЕМАХ З НЕПРЯМОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ МІЖ НОСІЯМИ

В. Локтєв[†], В. Турковський[††], С. Шарапов[†]
[†]*Інститут теоретичної фізики імені М. М. Боголюбова НАН України*
*Україна, 252143, Київ–143, вул. Метрологічна, 14б*
[††]*Національний Київський університет імені Тараса Шевченка*
*Україна, 252127, Київ–127, просп. Академіка Глушкова, 6*
(Отримано 19 липня 1996)

На підставі з мікроскопічного модельного гамільтоніана для системи фермі–частинок, які взаємодіють з фононами, отримані самоузгоджені рівняння для енергетичної щілини та хемічного потенціялу, які допускають аналіз її надпровідних властивостей при довільній концентрації ферміонів. Розв'язок цих рівнянь дає змогу простежити перехід від режиму локальних пар до куперівського спарювання. Показано, що тип надпровідного стану визначається не тільки інтенсивністю непрямої взаємодії між ферміонами, але й положенням рівня Фермі стосовно граничної енергії фононів.

**Ключові слова**: надпровідність, надплинність, низька розмірність, теорія БКШ, локальні пари.

PACS number(s): 74.20

## I. ВСТУП

Адекватний опис фізичних властивостей високотемпературних надпровідників (ВТНП) є однією з найскладніших проблем сучасної фізики твердого тіла. Це пов'язане з тим, що ВТНП мають низку специфічних особливостей, а саме: шарувата кристалічна структура, наслідком якої є, зокрема, квазі-2D характер електронних (і магнетних) властивостей; можлива наявність декількох зон провідності; низьке (і легко змінюване) значення концентрації носіїв (у ВТНП — це дірки); залежність від останнього цілої низки експериментально спостережуваних характеристик цих сполук та ін. Усе це призводить до того, що послідовні теоретичні дослідження відповідних систем доводиться провадити на досить спрощених моделях, які, як звичайно, враховують тільки деякі особливості ВТНП (див., наприклад, огляд [1]).

Квазі-2D характер електропровідності та порівняно низька густина носіїв зумовлюють те, що в ВТНП, загалом може відбуватися перехід від режиму надпровідності з куперівськими (тобто такими, що взаємно перекриваються) парами до режиму локальних (або майже окремих) пар, ідею про які як електронні псевдомолекули висунув Шафрот [2] ще задовго до появи сучасної теорії надпровідності і з'ясування її причин. Добре відомо, що ця ідея була запропонована саме для того, щоб звести незрозуміле тоді явище надпровідності, що є в металах, до явища надплинності, теорія якого була на той час розвинута як на феноменологічному (теорія Ландау), так і на мікроскопічному (теорія Боголюбова) рівнях. А далі, після створення теорії надпровідності Бардіном, Купером і Шріффером (БКШ), теорії обох згаданих "надявищ", незважаючи на велику їхню подібність, тривалий час існували та розвивались майже незалежно одна від одної. Тут треба зазначити, що великий внесок у розвиток теорії надплинних властивостей He II зроблено працями І. А. Вакарчука [3, 4].

Відкриття ВТНП, де вдається, змінюючи концентрацію вільних носіїв, експериментальним шляхом простежувати перехід надпровідних властивостей систем від області концентрацій, в якій справді можуть бути локальні пари (або складені бозони, хвильові функції яких не перекриваються між собою), до її значень, коли такі пари виділити неможливо і може йтися лише про густини фермі–газу, що близькі до металічних, поставило задачу про опис кросовера від надплинності до надпровідності (наприклад, типу БКШ). Сьогодні теоретично такий перехід вдалося розглянути лише в польових моделях з локальною миттєвою чотириферміонною (4F) взаємодією (*à la* БКШ) в наближенні середнього поля [5, 6] та з урахуванням гаусових флюктуацій параметра порядку [7, 8].

Що ж стосується багатозонності спектра, то, як показано в [9] (див. також [10, 11]), вона природним чином виникає в ВТНП з декількома шарами в елементарній комірці, допування яких може створити ситуацію, коли одночасно можуть співіснувати і локальні, і куперівські пари.

Водночас потрібно визнати, що локальна миттєва міжферміонна взаємодія є модельною і, взагалі кажучи, нереалістичною; тому її треба розглядати тільки як наслідок більш фундаментальної взаємодії, природа якої для ВТНП сьогодні ще не визначена (див., наприклад, [1]). Можливо, що цією взаємодією, подібно до низькотемпературних надпровідників, виявиться електрон–фононна або, завдяки незвичним магнетним властивостям ВТНП, електрон–спінова, коли пари утворюються як наслідок обміну ферміонів магнонами, — у будь-якому випадку вірогідно, що моделлю, адекватною ВТНП, була б модель, у якій притягання між носіями забезпечувалось обміном елементарними збудженнями якогось бозонного поля. В рамках такої моделі можна не тільки отримати притягання, але й оцінити роль такого принципово важливого фактора, як його запізнення. Відповідне узагальнення привносить у теорію додатковий розмірний параметр $\omega_0$ — характерну частоту елементарних збуджень бозе–типу. В низькотемпературних надпровідниках $\omega_0$ — це частота Дебая, а завдяки високій густині носіїв практично завжди виконується нерівність $\omega_0 \ll \epsilon_F$, де $\epsilon_F$ — енергія Фермі. У ВТНП з їхньою порівняно малою (і такою, яку можна регулювати) густиною носіїв (і, що одне і те ж, малою $\epsilon_F$), можливо, ближче до ситуації, коли $\omega_0 < \epsilon_F$, коли взаємодія відбувається за допомогою, наприклад, оптичних фононів, можна або допустити, що $\omega \simeq \epsilon_F$, якщо взаємодія відбувається через магнони, або навіть $\omega_0 > \epsilon_F$, якщо — через квадрупольні $dd$-екситони (механізм Гайдідея–Локтєва–Вебера [12, 13]).

Нашою метою є вивчення (на прикладі електрон–фононного зв'язку найпростішого виду) впливу непрямої взаємодії між носіями на спектр надпровідної фази 2D металу. Зокрема, нас буде цікавити залежність параметра порядку (щілини) та хемічного потенціялу системи від значення концентрації ферміонів $n_f$, а також кросовер від куперівських пар до локальних.

Подібне коло питань уже досліджене в праці [14]. Однак розв'язок рівняння Еліашберга [15] тут отриманий за допомогою, взагалі кажучи, невиправданого припущення про те, що значення надпровідної щілини $\Delta$ не залежить від енергії. Якщо в моделі з незапізнюючою 4F-взаємодією з цим можна погодитися, то врахування ефектів запізнення робить таке наближення незаконним, а прямі розрахунки щілини аналітичними методами — майже неможливими. В таких випадках рівняння Еліашберга розв'язують числовими методами (див., наприклад, огляд [16]). Однак ми спробували відшукати аналітичний розв'язок рівняння Еліашберга методами, що розроблені і використовуються в сучасній теорії поля [17, 18]. Згідно з ними інтеґральне рівняння Еліашберга (у теорії поля йому, як відомо, відповідає рівняння Швінгера–Дайсона) можна звести до диференціального, розв'язок якого існує (в усякому разі для важливих випадків) в аналітичній формі.

План подальшого викладу такий: спочатку описана модель і наведені основні рівняння. Низка стандартних припущень дає змогу звести їх до системи самоузгоджених інтеґральних рівнянь для енергетичної щілини та хемічного потенціялу. Потім за допомогою згаданого вище методу проаналізовано окремі випадки, для яких можна отримати кінцеві вирази і зіставити їх з відомими з літератури. У Додатках стисло наведені необхідні обчислення, які поки що не можна вважати загальновідомими.

## II. МОДЕЛЬ ТА ОСНОВНІ РІВНЯННЯ

Як відомо, найпростіший модельний гамільтоніан, що описує електрон–фононну систему, можна зобразити у вигляді (див. [19, 20])

$$H = -\psi_\sigma^\dagger(\mathbf{r})\left(\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right)\psi_\sigma(\mathbf{r}) + H_{ph}(\varphi(\mathbf{r})) + g\psi_\sigma^\dagger(\mathbf{r})\psi_\sigma(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}), \quad (2.1)$$

де $H_{ph}$ — фононний гамільтоніан, який описує фонони з законом дисперсії $\omega(\mathbf{k})$, де $\mathbf{k}$ — хвильовий вектор; $\mathbf{r}$ — 2D вектор; $\psi_\sigma(\mathbf{r}), \varphi(\mathbf{r})$ — фермі– і бозе–поля в зображенні Шредингера; $m$ — маса фермі–частинки; $\sigma$ — її спінова змінна; $g$ — константа електрон–фононної взаємодії; $\mu$ — хемічний потенціял, за допомогою якого фіксується середня густина носіїв $n_f$ у системі; використовуються одиниці, де $\hbar = 1$.

Для дослідження впливу ефектів запізнення на електронний спектр залежно від $n_f$ необхідно проаналізувати систему двох рівнянь, перше з яких, як зазначалося, є рівнянням Еліашберга для власної енергетичної частини $\Sigma(p)$ ($p \equiv \omega, \mathbf{k}$), а друге — відомою умовою, що накладається на електронну функцію Ґріна $G(p)$, щоб пов'язати $\mu$ з $n_f$. (Нагадаємо, що в 2D системах з квадратичним законом дисперсії величина $n_f$ простим чином виражається через $\epsilon_F$ : $n_f = \epsilon_F m/\pi$.)

Рівняння Еліашберга найзручніше записати у формалізмі Намбу; в цьому випадку власну енергетичну частину шукають у вигляді (див. [20, 21])

$$\Sigma(p) = [1 - Z(p)]\omega I + \chi(p)\tau_z + \phi(p)\tau_+ + \phi^*(p)\tau_-. \quad (2.2)$$

Тут $Z(p), \chi(p), \phi(p)$ — довільні функції, причому за появу аномальних середніх, з якими пов'язана надпровідність, відповідає $\phi(p)$; $I, \tau_z, \tau_\pm$ — одинична і матриці Паулі. Як відомо, електронну функцію Ґріна записують у такому вигляді [21]:

$$G(p) = \frac{Z(p)\omega + \bar{\xi}(\mathbf{p})\tau_z + \phi(p)\tau_+ + \phi^*(p)\tau_-}{[Z(p)\omega]^2 - [E(p)]^2 + i\delta} e^{i\delta\omega\tau_z}, \quad \delta \to +0, \quad (2.3)$$

де $\bar{\xi}(\mathbf{k}) = \xi(\mathbf{k}) + \chi(\mathbf{k}), \xi(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}^2}{2m} - \mu, E(\mathbf{p}) = \sqrt{\bar{\xi}(\mathbf{k})^2 + \Delta^2(p)}$ і $\Delta(p) = |\phi(p)|$; саме ж рівняння Еліашберга із врахуванням означень (2.2) і (2.3) можна зобразити таким чином:

$$\Sigma(p) = ig \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \tau_z G(p') \tau_z \Gamma(p', p; p - p') D(p - p'), \tag{2.4}$$

де $\Gamma(p, p'; p - p')$ — вершинна функція; $D(p - p')$ — "одягнений" фононний пропагатор.

Перш ніж розпочати подальші розрахунки, зазначимо, що в рівнянні (2.4) $\mu$ — ще не визначений параметр, який потребує окремого означення; воно дається стандартним рівнянням

$$-i \int \mathrm{tr}[\tau_z G(\mathbf{k}, t = 0)] \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} = n_f, \tag{2.5}$$

де ґрінівська функція $G(\mathbf{k}, t = 0)$ повинна враховувати правило обходу полюсів (див. [21]). Майже очевидно, що в такій загальній формі проаналізувати систему (2.4) і (2.5) неможливо, тому доводиться робити деякі припущення, які дещо спрощують задачу.

Одним з таких припущень, які звичайно приймають під час вивчення рівняння Еліашберга, є нехтування ефектами, що безпосередньо не пов'язані з появою аномальних середніх, тобто вибирають $Z(p) = 1$, а $\chi(p) = 0$.

Цікаво зауважити, що під час вивчення релятивістського рівняння Швінґера–Дайсона, в якому бозе–збудженнями є не фонони, а фотони, спеціальний вибір калібрування дає змогу в драбинному наближенні прийняти $Z(p) = 1$, навіть не використовуючи цього додаткового припущення [22]. В теорії надпровідності це не так, і для $Z(p)$ треба використовувати окреме рівняння, а рівність $Z(p) \simeq 1$, насправді справедлива лише у випадку досить слабкого зв'язку [16].

Друге припущення випливає з добре відомої теореми Міґдала [23], яка стверджує, що при $\omega_0 \ll \epsilon_F$ електрон–фононну вершинну частину можна замінити її "голим" значенням $g$. Треба одразу ж зазначити, що в задачі, яку розглядаємо, ми не можемо прямо використати результат Міґдала, оскільки для ВТНП, як уже згадувалося, стандартна нерівність $\omega_0 \ll \epsilon_F$ в принципі, може і не виконуватись. Однак нещодавно цю теорему узагальнено для протилежного випадку $\omega_0 \gg \epsilon_F$ [24], тому і для дуже низьких густин носіїв (що визначаються цією самою нерівністю $\epsilon_F \ll \omega_0$) вершинну функцію $\Gamma$ в рівнянні (2.4) також можна замінити її "голим" значенням $g$.

Ми, маючи на меті отримати головним чином аналітичні результати, припустимо, що "голу" вершину можна використовувати при всіх співвідношеннях між $\omega_0$ і $\epsilon_F$, хоча є вказівки [25, 26], що при $\omega_0 \sim \epsilon_F$ урахування повної вершинної функції є, строго кажучи, важливим і для відповідних густин ферміонів може привести до деякого (незначного) підвищення критичної температури $T_c$. У цьому випадку зазначимо, що в цьому підході повну вершинну функції потрібно було б враховувати, припускаючи можливість того, що $\mu \neq \epsilon_F$; тобто величина $\mu$ повинна самоузгоджено визначатися з рівняння (2.5).

І нарешті третє припущення пов'язане з вибором "одягненого" бозонного (фононного) пропагатора. Як це часто роблять (див., наприклад, [21]), ми також замінимо його "голим" пропагатором, що має такий вигляд [19]:

$$D(p) = \frac{\omega^2(\mathbf{k})}{\omega^2 - \omega^2(\mathbf{k}) + i\delta}. \tag{2.6}$$

Отже, з урахуванням зроблених припущень рівняння (2.4) значно спрощується:

$$\phi(p) = -ig^2 \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{\phi(p')}{\omega'^2 - \xi(\mathbf{k}')^2 - |\phi(k')|^2 + i\delta} \frac{\omega^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}')}{(\omega - \omega')^2 - \omega^2(\mathbf{k} - \mathbf{k}') + i\delta}. \tag{2.7}$$

Що ж стосується закону дисперсії фононів $\omega(\mathbf{k})$, то його ми також візьмемо у найбільш простому вигляді, вважаючи $\omega(\mathbf{k}) = \omega_0$ (модель Айнштайна) [32] Тоді величина $\phi$ вже не залежить від квазіімпульсу $\mathbf{k}$ і є функцією лише частоти $\omega$, тобто $\phi(p) = \phi(\omega)$. У результаті рівняння (2.7) набуває вигляду

$$\phi(\omega) = -ig^2 \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{\phi(\omega')}{\omega'^2 - \xi(\mathbf{k}')^2 - |\phi(\omega')|^2 + i\delta} \frac{\omega_0^2}{(\omega - \omega')^2 - \omega_0^2 + i\delta}, \tag{2.8}$$

і наша задача звелась до аналізу системи рівнянь (2.5) і (2.8). Рівняння (2.8) досліджували і розв'язували неодноразово, але в усіх відомих випадках (див. [15, 19–21]) величина $\mu$ збігалася з $\varepsilon_F$ і для спектра нормального стану приймали розклад

$$\xi(\mathbf{k}) \simeq k_F(k - k_F)/m, \tag{2.9}$$

де $\mathbf{k}_F$ — імпульс Фермі.

Якщо продовжити аналогії з релятивістськими моделями, то треба згадати, що в них "фонони", тобто фотони, є акустичними ($\omega(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}|$, $c$ — швидкість). Але завдяки релятивістській інваріантності і тому, що в функцію Ґріна частинок входить та ж сама швидкість $c$, рівняння (2.8) буде містити не дві незалежні змінні $\omega$ і $\mathbf{k}$, а лише їхню інваріантну комбінацію $p^2 = \omega^2 - \mathbf{k}^2$, що і робить можливим аналітичний розв'язок. Для випадку твердого тіла таке наближення (рівність швидкостей фононів та ферміонів) неприпустиме і рівняння типу (2.8) при $\omega(\mathbf{k}) \neq const$ завжди має дві незалежні змінні, а одержання його аналітичного розв'язку стає вкрай проблематичним [33].

## III. АНАЛІЗ РОЗВ'ЯЗКІВ

Як уже зазначалось, ми будемо аналізувати розв'язки зв'язаної системи рівнянь для енергетичної щілини та хемічного потенціялу з урахуванням частотної залежності щілини, $\Delta = \Delta(\omega)$. Наближення $\Delta = const$ могло б, взагалі кажучи, призвести до втрати низки важливих ефектів, зокрема існування мінімального порогового значення константи зв'язку, при якій можливе спарювання. Подібна ситуація виникає, наприклад, у безмасовій $QED_4$, де роль енергетичної щілини відіграє енергія двочастинкових зв'язаних станів ("динамічна маса") [17, 18].

Отже, проаналізуємо систему (2.5), (2.8). Для цього спочатку перетворимо інтеґральне рівняння (2.8) у диференціальне (Додаток А):

$$\phi''(p_3) + \frac{3p_3^2 - \omega_0^2}{p_3(p_3^2 + \omega_0^2)}\phi'(p_3) + \frac{g^2 m}{4\pi^2}\frac{p_3}{(p_3^2 + \omega_0^2)^2}\left[\arctan\frac{W - \mu}{\sqrt{p_3^2 + \phi^2(p_3)}} + \arctan\frac{\mu}{\sqrt{p_3^2 + \phi^2(p_3)}}\right]\phi = 0 \tag{3.1}$$

з такими граничними умовами:

$$\frac{\phi'(p_3)}{p_3}\,|_{p_3=0} = 0, \qquad \left[\phi + \frac{p_3^2 + \omega_0^2}{2p_3}\phi'\right]|_{p_3=\infty} = 0\ , \tag{3.2}$$

де нова змінна $p_3$ (див. Додаток А) з'явилась після повороту Віка. Як уже зазначалось вище, ми вважаємо енергетичну щілину неоднорідною, тобто в нових змінних $\phi(p_3) \neq const$. Залежність же $\phi$ від $p_3$ визначають з рівняння (3.1).

Навіть тепер розв'язати систему рівнянь (2.5), (3.1) в загальному вигляді неможливо, тому обмежимось важливими граничними випадками.

1. Перш за все розглянемо випадок БКШ, для якого справедливі наближення $W \to \infty, \epsilon_F \gg \omega_0 \gg \phi(p_0)$. Тоді для енергетичної щілини з (3.1) можна отримати розв'язок (Додаток В)

$$\begin{aligned}
\phi(p_3) &= \phi(0) - \frac{g^2 m}{2\pi}\left(\frac{1}{\omega_0}\arctan\frac{p_3}{\omega_0} - \frac{p_3}{p_3^2 + \omega_0^2}\right), \qquad p_3 \leq \phi(0),\\
\phi(p_3) &= \frac{\omega_0^3}{p_3^2 + \omega_0^2}F\left(1 + \beta, -\beta; 2; \frac{\omega_0^2}{p_3^2 + \omega_0^2}\right), \quad p_3 > \phi(0),
\end{aligned} \tag{3.3}$$

де $F$ — стандартна гіпергеометрична функція; $\beta = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{g^2 m}{8\pi}}$, а $2\phi(0) \equiv \Delta_{BCS} = 2\omega_0 e^{-\frac{2\pi}{g^2 m}}$ — енергетична щілина в спектрі ферміонів. Зауважимо, що $\phi$ є функцією дійсної змінної $\omega^2 = -p_3^2$.

Як випливає з (3.3), $\phi(p_3)$ при $p_3 < \omega_0$ майже стала і дорівнює $\frac{1}{2}\Delta_{BCS}$. Іншими словами, з точністю до сталого множника ми отримали результат БКШ (Використаний метод дає змогу взагалі відшукати розв'язок лише з точністю до довільної константи). Отже, в області енергій, що нас цікавлять, $\omega < \omega_0$ енергетичну щілину можна вважати сталою, прийнявши

$$\phi(p_3) = \Delta = const.$$

Тоді з (2.8) при $\omega = 0$ можна отримати результат БКШ:

$$\Delta = \Delta_{BCS}, \tag{3.4}$$

а рівняння (2.5) для хемічного потенціялу зведеться до

$$\sqrt{\mu^2 + \Delta^2} + \Delta^2 = 2\epsilon_F. \tag{3.5}$$

У нашому випадку $W \to \infty, \mu \gg \Delta$, і тому $\mu \simeq \epsilon_F$, як це завжди вважають у теорії БКШ.

Отже, ми отримали результат цієї теорії БКШ і для $\Delta$, і для $\mu$ (З (3.3) також випливає, що коли $g^2m/2\pi \ll 1$ — зв'язок слабкий, то $\Delta \ll \omega_0$).

2. Якщо в пункті 1 замінити умову $\phi \ll \omega_0$ на протилежну — $\phi \gg \omega_0$, то з (3.1) за допомогою того ж самого методу можна отримати розв'язок

$$\phi(p_3) = \phi(0) - \frac{g^2m}{2\pi}\left(\frac{1}{\omega_0}\arctan\frac{p_3}{\omega_0} - \frac{p_3}{p_3^2+\omega_0^2}\right), \quad p_3 \le \omega_0,$$

$$\phi(p_3) = \frac{g^2m}{\pi}\left(\frac{1}{p_3^2} - \frac{1}{3p_3}\right), \quad p_3 > \omega_0, \tag{3.6}$$

де тепер $\phi(0) = \omega_0 g^2 m/\pi$.

Цей випадок відповідає надсильному зв'язку $g^2m/\pi \gg 1$ (тому що $\phi \gg \omega_0$) [27] (див. також [20]).

Значення $\phi(0)$ з точністю також до постійного множника співпадає з результатом праці [14], тобто з розв'язком (2.8) при $\phi = const$. В даному випадку $\mu$, як і раніше, дорівнює $\epsilon_F$.

3. Наступні два випадки відповідають системам з малою густиною носіїв, коли $\epsilon_F, \phi \ll \omega_0$; також припустимо, що $|\mu| \ll \omega_0$. У цьому випадку роль рівняння (3.1) не є тривіальною, $\mu \neq \epsilon_F$ (а значення $\phi$ може бути близько $\epsilon_F$).

При великих $\omega_0$ функція $\phi(\omega)$ в рівнянні (2.8) слабко відчуває залежність від частоти, тому що в правій його частині у цьому випадку в знаменнику $D(\omega' - \omega)$ змінна $\omega$ "придушується" великим значенням $\omega_0$.

Приймаючи в (2.5) та (2.8) $\phi(p_0) = \Delta = const$, отримуємо результат

$$\Delta = 2\sqrt{\omega_0\epsilon_F}e^{-\frac{2\pi}{g^2m}}, \qquad \mu = -\omega_0 e^{-\frac{4\pi}{g^2m}} + \epsilon_F. \tag{3.7}$$

Видно, що умова $|\mu| \ll \omega_0$ виконується, коли зв'язок слабкий.

Розв'язок (3.6) можна переписати в дещо іншому і більш наочному вигляді, а саме:

$$\Delta = \sqrt{2|\varepsilon_b^{(weak)}|\epsilon_F}, \qquad \mu = -\frac{|\varepsilon_b^{(weak)}|}{2} + \epsilon_F, \tag{3.8}$$

де введено означення

$$\varepsilon_b^{(weak)} = -2\omega_0 e^{-\frac{4\pi}{g^2m}}. \tag{3.9}$$

Вираз для $\varepsilon_b^{(weak)}$ збігається з виразом для енергії двоферміонних зв'язаних станів $\varepsilon_b$ у випадку миттєвої взаємодії під час заміни ширини зони $W$ фононною частотою $\omega_0$ (див. нижче) [28, 5, 6]. Тому природно припустити, що величина $\varepsilon_b^{(weak)}$ має той самий зміст, що і $\varepsilon_b$, тобто справді є енергією двочастинкового зв'язаного стану, який у нашому випадку виникає завдяки обміну проміжними бозонами. Саме тому перед експонентою у виразі (3.8) стоїть величина $\omega_0$, що й характеризує енергію бозонів.

Водночас, розв'язок (3.7) має важливу відмінність від отриманого для випадку незапізнюючої локальної 4F-взаємодії з константою $g_{4F}$ [28] (див. також наступні пункти):

$$\Delta = \sqrt{2|\varepsilon_b|\epsilon_F}, \quad \mu = -\frac{|\varepsilon_b|}{2} + \epsilon_F, \tag{3.10}$$

де $\varepsilon_b = -2W\exp(-4\pi/mg_{4F})$. Цей розв'язок виявляється формально справедливим для всіх значень $\epsilon_F$, тоді як область застосування (3.7) обмежена наведеною вище умовою $\epsilon_F \ll \omega_0$.

Якщо виконується протилежна нерівність $\epsilon_F \gg \omega_0$, то потрібно, як зазначалося, використовувати вираз (3.4), який відповідає теорії БКШ. Це неважко зрозуміти: при $\epsilon_F \ll \omega_0$ носії утворюють "адіабатично" повільну підсистему і запізнювання проміжної взаємодії можна не брати до уваги, про що і свідчить можливість запису (3.6) у формі, яка є аналогічною для розв'язку у випадку локальної миттєвої взаємодії. Зі збільшенням $\epsilon_F$, особливо в області $\epsilon_F \gg \omega_0$, роль запізнення стає вирішальною і формула для $\Delta_{BCS}$ є тому підтвердженням.

З (3.7) видно також, що при $\epsilon_F < |\varepsilon_b^{(weak)}|/2$ хімічний потенціял $\mu$ носіїв є від'ємним, а тому реалізується ситуація локальних пар [5–7]. (Зазаначимо, що якщо за проміжну взаємодію справді відповідають фонони, то локальні пари фактично є біполяронами [29].) Тут важливо зауважити, що якщо в [5–7] величина $\varepsilon_b$ була незалежним параметром, який визначав розмір області існування локальних пар за густиною, то у випадку непрямої взаємодії, яку ми вивчаємо, енергія $\varepsilon_b^{(weak)}$ виражається через параметри електрон–фононної взаємодії і не може бути заданою незалежно від інших параметрів, що характеризують систему. Наприклад, з (3.7) і (3.8) видно, що $\Delta_{BCS}$ і $\varepsilon_b^{(weak)}$ пов'язані співвідношенням $|\varepsilon_b^{(weak)}| = \Delta_{BCS} e^{-\frac{2\pi}{g^2 m}}$, тобто $|\varepsilon_b^{(weak)}|$ експоненціально мала порівняно з $\Delta_{BCS}$. Це відповідно, означає, що у випадку слабкого зв'язку для розумних значень $\Delta_{BCS}$ область існування локальних пар є дуже вузькою і, швидше за все, має лише теоретичний інтерес. Відповідно, таке ж співвідношення (на користь БКШ) збережеться і для значень критичних температур, що відповідають цим ситуаціям.

4. Розглянемо випадок, який відрізняється від попереднього умовою $|\mu| \gg \omega_0$ (але $\mu < 0$). Як і раніше, $\omega_0$ є великою, тому з тих же міркувань, що і в пункті 3, $\phi$ вважаємо сталою, або $\phi = \Delta = const$. Розв'язок системи (2.5), (2.8) у цьому випадку має вигляд

$$\Delta = 2\sqrt{\omega_0 \coth\left(\frac{4\pi}{g^2 m}\right)\epsilon_F},$$

$$\mu = -\omega_0 \coth\left(\frac{4\pi}{g^2 m}\right) + 2\epsilon_F \coth^2\left(\frac{4\pi}{g^2 m}\right). \qquad (3.11)$$

Умова $|\mu| \gg \omega_0$ виконується, як видно, коли зв'язок сильний, $g^2 m/4\pi \gg 1$. За аналогією з пунктом 3 тут також можна ввести енергію зв'язку

$$\varepsilon_b^{(strong)} = -2\omega_0 \coth\frac{4\pi}{g^2 m} \simeq -\omega_0 \frac{g^2 m}{2\pi}, \qquad (3.12)$$

і розв'язок (3.10) набуває вигляду

$$\Delta = \sqrt{2|\varepsilon_b^{(strong)}|\epsilon_F},$$

$$\mu = -\frac{|\varepsilon_b^{(strong)}|}{2} + 2\epsilon_F \coth^2\frac{4\pi}{g^2 m}. \qquad (3.13)$$

Практично все, що було сказане стосовно розв'язку для випадку слабкого зв'язку (3.7), є справедливим і для (3.11), (3.12). Зокрема, можна легко записати формулу, яка пов'язує $\varepsilon_b^{(strong)}$ і $\Delta_{BCS}^{(strong)}$ (випадок 2): $|\varepsilon_b^{(strong)}| = 8\Delta_{BCS}^{(strong)}/\pi$. Але є і деякі важливі відмінності. По-перше, як видно з (3.11) і (3.12), для випадку сильного зв'язку область існування локальних пар, взагалі кажучи, досить велика ($\mu$ змінює знак при $\epsilon_F \le \omega_0/2$) і, в принципі, їх можна виявити експериментально. По-друге, з асимптотичної поведінки розв'язку (3.12) для $\mu$ видно, що при $\epsilon_F \ll \omega_0$ швидкість зростання $\mu$ відрізняється від останньої при $\epsilon_F \gg \omega_0$. Тому залежність $\mu(\epsilon_F)$ повинна мати злам в області переходу від однієї поведінки до іншої.

Закінчуючи обговорення отриманих вище аналітичних розв'язків системи (2.5) і (2.8) для випадків 3 і 4 малої густини, важливо зазначити таке. Ми не враховували флюктуацій параметра впорядкування $\phi(p)$ і розглядали 2D систему в наближенні середнього поля. Водночас добре відомо [30], що в такій системі критична температура $T_c$ надпровідного переходу дорівнює нулю саме завдяки цим флюктуаціям. Реальні ж системи є швидше квазі-2D системами, тому для них $T_c \neq 0$. Однак врахування флуктуацій параметра порядку є принципово важливим і для квазі-2D систем, тому що воно кардинально змінює залежність $T_c$ від $\varepsilon_b$. Наприклад, якщо припустити, що $|\mu|/T_c \gg 1$ (тобто енергія зв'язку (див. (3.11) локальних пар настільки велика, що в межах $T \le T_c$ можна знехтувати їх термічним руйнуванням), то $T_c$ квазі-2D системи, яка складається з набору металевих слабко зв'язаних шарів, буде визначатись із рівняння [7, 8]

$$T_c \simeq \frac{\epsilon_F}{2\ln(2T_c|\varepsilon_b|m_z^2 d^4)}, \qquad (3.14)$$

де $m_z$ — ефективна маса носіїв для руху між надпровідними площинами, $d$ — відстань між цими площинами. Порівнюючи (3.13) з (3.12), бачимо, що якщо в наближенні середнього поля величина $\Delta$ (а отже, і $T_c$) збільшувалася зі збільшенням $|\varepsilon_b^{(strong)}|$, то з (3.13) випливає, що зі збільшенням ростом $|\varepsilon_b^{(strong)}|$ температура $T_c$ починає знижуватися. Принципова відмінність від результату праць [7, 8] у тому, що якщо в останніх розглядали випадок миттєвої взаємодії і $T_c$ знижувалася саме як функція її величини, то для неконтактного 4F-притягання в квазі-2D системі $T_c$ фактично знижується і зі збільшенням $\omega_0(\gg \epsilon_F)$ (насправді, $|\varepsilon_b^{(strong)}|$ збільшується зі збільшенням $g$, так і $\omega_0$, що і призводить до зниження $T_c$). Отже, врахування флуктуацій справді сильно відображається на ситуації і здається, що отримання високих $T_c$ за рахунок збільшення енергії зв'язку в квазі-2D системах є малоймовірним.

5. На закінчення розглянемо випадок миттєвої взаємодії, який відповідає виконанню нерівностей

$\omega_0 \gg W, \epsilon_F, \Delta$. З тієї ж причини великого $\omega_0$ з (2.8) можна отримати рівняння для сталої $\Delta$:

$$\frac{1}{g^2} - \frac{m}{4\pi} \ln \frac{W - \mu + \sqrt{(W-\mu)^2 + \Delta^2}}{\sqrt{\mu^2 + \Delta^2} - \mu} = 0. \quad (3.15)$$

Рівняння для хемопотенціялу набуває вигляду

$$W - \sqrt{(W-\mu)^2 + \Delta^2} + \sqrt{\mu^2 + \Delta^2} = 2\epsilon_F. \quad (3.16)$$

Розв'язок системи (3.14), (3.15) було відшукано в [6]. При $W \to \infty$ він переходить в (2.3). Отже, ми отримали результат моделі з миттєвою непрямою взаємодією, який є еквівалентним моделі з 4F-взаємодією [5–8].

## IV. ВИСНОВКИ

Наведені вище результати, хоча вони й отримані для досить спрощеної моделі, переконливо демонструють тісний зв'язок характеристик надпровідності з положенням рівня Фермі $\epsilon_F$ стосовно до граничної частоти елементарних збуджень $\omega_0$, які відповідають за притягання між електронами. Так виявилось, що для малих густин носіїв характер залежності $\Delta(\epsilon_F)$, отриманий у моделі з миттєвою локальною чотирифермiонною взаємодією, є справедливим і для розглянутої, більш реалістичної моделі. Це дає змогу припустити, що, наприклад, запропоноване в [9] пояснення спостережуваної у ВТНП 1-2-3 характерної "сходинкової" залежності $T_c(\epsilon_F)$, яке суттєво спирається саме на зростаючу з ростом $n_f$ поведінку $\Delta(\epsilon_F)$ в однозонній моделі і на наявність декількох надпровідних шарів в елементарній комірці, в принципі, є правильним.

Проаналізовано залежність значення енергетичної щілини від енергії частинок. Показано, що наближення $\Delta = const$ [14] є припустимим і непоганим наближенням майже в усіх випадках (крім 2).

Крім того, показано, що і в рамках моделі з непрямою взаємодією, коли енергія зв'язку носіїв уже не є незалежним параметром, ця взаємодія все таки може забезечити більшу енергію зв'язку пар, а отже, — достатню для спостереження область їх існування в локальному вигляді.

Водночас, завдяки наближенням, що дали змогу отримати аналітичні результати, деякі питання ще невирішені. Наприклад, здавалось, що найбільшого значення $\Delta$ досягає при $\epsilon \gg \omega_0$, тобто в області, де справедлива теорія БКШ–Еліашберга. У зв'язку з цим виникає природне запитання: в чому перевага ВТНП, що дає змогу досягти рекордних значень $T_c$ при порівняно малих значеннях $\epsilon_F$, значно менших, ніж у низькотемпературних надпровідниках? Можливо, для відповіді на це запитання і доведення можливості того, що $\Delta$ є більшим від $\Delta_{BCS}$, необхідне врахування вершинної функції [24, 25]. Іншими словами, потрібною перевірити теорему Мігдала для області $\epsilon_F \sim \omega_0$ і з'ясувати роль другого (для $\mu$) рівняння. Крім того, оскільки універсальне співвідношення $2\Delta/T_c = 3.52$ в загальному випадку не виконується, треба окремо дослідити і залежність $T_c(\epsilon_F)$. Цікавим було б узагальнення запропонованого самоузгодженого розгляду на випадок наявності в системі декількох видів проміжних бозонів різної природи, вивчення особливостей спарювання, відмінного від ізотропного, а також врахування завжди наявної кулонівської взаємодії між носіями.

На закінчення ми хочемо висловити подяку В.П. Гусиніну за корисні обговорення та консультації з приводу використання методу, розвинутого в працях [17, 18].

## V. ДОДАТОК А

Перетворимо інтеґральне рівняння (2.8) в диференціальне. Зробивши поворот Віка $\omega \to ip_3$ [17] (див. також [18]), отримаємо

$$\phi(p_3) = g^2 \omega_0^2 \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{\phi(p_3')}{p_3'^2 + (\frac{\mathbf{k}'^2}{2m} - \mu)^2 + \phi^2(p_3')} \frac{1}{(p_3 - p_3')^2 + \omega_0^2}, \quad (5.1)$$

де $\phi(p_3)$ є дійсною функцією.

Перейдемо до полярної системи координат:

$$\phi(p_3) = \frac{g^2 \omega_0^2}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_3 \frac{\phi(p_3')}{(p_3 - p_3')^2 + \omega_0^2} \int_0^{\sqrt{2mW}} \frac{k' dk'}{\left(\frac{k'^2}{2m} - \mu\right)^2 + p_3'^2 + \phi^2(p_3')}$$

($W$ — ширина зони провідності). Виконавши інтеґрування по $k'$, отримаємо рівняння

$$\phi(p_3) = \frac{g^2\omega_0^2 m}{2\pi^2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dp_3'\phi(p_3')}{\sqrt{p_3'^2+\phi^2(p_3')}} \frac{1}{(p_3-p_3')^2+\omega_0^2} \left[\arctan\frac{W-\mu}{\sqrt{p_3'^2+\phi^2(p_3')}} + \arctan\frac{\mu}{\sqrt{p_3'^2+\phi^2(p_3')}}\right]. \tag{5.2}$$

В останній рівності зміну меж інтеґрування по $p_3'$ зроблено завдяки використанню умови парності $\phi(p_3) = \phi(-p_3)$.

З виразу (5.1) можна отримати асимптотичну поведінку $\phi(p_3)$:

$$\phi(0) = const, \qquad \phi(p_3)\,|_{p_3\to\infty} \sim \frac{1}{p_3^2}.$$

Зробивши в (5.1) наближення (див., наприклад [18])

$$\frac{1}{(p_3-p_3')^2+\omega_0^2} = \frac{1}{p_3^2+\omega_0^2}\theta(p_3-p_3') + \frac{1}{p_3'^2+\omega_0^2}\theta(p_3'-p_3),$$

отримаємо інтеґральне рівняння

$$\phi(p_3) = \frac{g^2\omega_0^2 m}{2\pi^2}\left[\frac{1}{p_3^2+\omega_0^2}\int\limits_0^{p_3} \frac{dp_3'\phi(p_3')}{\sqrt{p_3'^2+\phi^2(p_3')}}\left[\arctan\frac{W-\mu}{\sqrt{p_3'^2+\phi^2(p_3')}} + \arctan\frac{\mu}{\sqrt{p_3'^2+\phi^2(p_3')}}\right]\right.$$
$$\left. + \int\limits_{p_0}^{\infty} \frac{dp_3'\phi(p_3')}{\sqrt{p_3'^2+\phi^2(p_3')}}\frac{1}{p_3'^2+\omega_0^2}\left[\arctan\frac{W-\mu}{\sqrt{p_3'^2+\phi^2(p_3')}} + \arctan\frac{\mu}{\sqrt{p_3'^2+\phi^2(p_3')}}\right]\right]. \tag{5.3}$$

Звідси безпосередньо отримуємо (3.1) та (3.2).

## VI. ДОДАТОК В

Відшукаємо розв'язок рівняння (3.1) з граничними умовами (3.2) у випадку $W \to \infty, \epsilon_F \gg \omega_0 \gg \phi(p_3)$. Тоді легко бачити, що рівняння (3.1) набуває вигляду

$$\phi'' + \frac{3p_3^2-\omega_0^2}{p_3(p_3^2+\omega_0^2)}\phi' + 2\lambda\frac{p_3}{(p_0^2+\omega_0^2)^2}$$
$$\times\left[\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{\mu}{\sqrt{p_3^2+\phi^2(p_3)}}\right] = 0,$$

де $\lambda = g^2\omega_0^2 m/2\pi$. Зробивши заміну змінної $x = p_3^2$, переходимо до рівняння

$$\phi''(x) + \frac{2}{x+\omega_0^2}\phi'(x) + \frac{\lambda}{2}\frac{\phi(x)}{(x+\omega_0^2)^2\sqrt{x(x+\phi^2(x))}}$$
$$\times\left[\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{\mu}{\sqrt{x+\phi^2(x)}}\right] = 0 \tag{6.1}$$

з граничними умовами:

$$\phi'\,|_{x=0} = 0\ ,$$

$$[\phi + (x+\omega_0^2)\phi']\,|_{x=\infty} = 0\ .$$

У загальному випадку рівняння (6.1) розв'язати неможливо, тому ми відшукаємо асимптотичні розв'язки при $x \gg \phi^2(0)$ і $x \ll \phi^2(0)$, а потім зшиваємо розв'язки у точці $x = \phi^2(0)$.

Спочатку знайдемо розв'язок при $x \gg \phi^2(0), \mu^2$. В цій області рівняння (6.1) набуває форми:

$$\phi'' + \frac{2}{x+\omega_0^2}\phi' + \frac{\lambda\pi}{4}\frac{\phi}{x(x+\omega_0^2)^2} = 0.$$

Його розв'язок будемо шукати, враховуючи граничну умову на нескінченності у вигляді $\phi(x) = \frac{1}{x}\varphi(-\frac{\omega_0^2}{x})$. Увівши нову змінну $z = -\frac{\omega_0^2}{x}$, перетворимо рівняння (6.2) до вигляду

$$\varphi'' - \frac{2}{1-z}\varphi' - \left[\frac{2}{1-z} + \frac{\lambda\pi}{4\omega_0^2(1-z)^2}\right]\varphi = 0.$$

Стандартним чином після підставлення $\varphi(z) = (1-z)^\beta f(z), \beta = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{\lambda\pi}{\omega_0^2}}$ останнє рівняння зводиться до гіпергеометричного:

$$z(1-z)f'' + [2-(4+2\beta)z]f' - [\beta^2+3\beta+2]f = 0.$$

Його розв'язком є функція

$$f(z) = F(1+\beta, 2+\beta; 2; z).$$

Отже, шуканим розв'язком рівняння (6.2) буде

$$\phi_1(p_3) = \frac{C}{p_3^2}\left(1+\frac{\omega_0^2}{p_3^2}\right)^{\beta} \times F\left(1+\beta, 2+\beta; 2; -\frac{\omega_0^2}{p_3^2}\right).$$

Відшукаємо тепер розв'язок рівняння (6.1) при $p_3 \ll \phi^2(0)$. У цьому випадку воно набуває вигляду

$$\phi'' + \frac{3p_3^2-\omega_0^2}{p_3(p_3^2+\omega_0^2)}\phi' + 2\lambda\frac{p_3}{(p_3^2+\omega_0^2)^2}\left[\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{\mu}{\phi(0)}\right] = 0.$$

Розв'язком, який задовольняє граничну умову $\frac{\phi'}{p_3}|_{p_3=0} = 0$, буде

$$\phi_2(p_3) = \phi(0) - \lambda\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{\mu}{\phi(0)}\right) \times \left(\frac{1}{\omega_0}\arctan\frac{p_3}{\omega_0} - \frac{p_3}{p_3^2+\omega_0^2}\right).$$

Зшиємо розв'язки $\phi_1$ і $\phi_2$ в точці $p_3 = \phi_0 \ll \omega_0$. Це дає змогу обчислити значення $\phi_0$ (з точністю до довільної константи). Використавши тоді розклад $F\left(1+\beta, 2+\beta, 2; -\frac{\omega_0^2}{p_3^2}\right)$ при великих значеннях арґументу [31]

$$F\left(1+\beta,2+\beta;2;-\frac{\omega_0^2}{p_3^2}\right)\frac{\Gamma(2+\beta)}{\Gamma(2)} \simeq \left(\frac{\omega_0^2}{p_3^2}\right)^{-2-\beta}\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}(1+\beta)\beta\left[\ln\frac{\omega_0^2}{p_3^2}+h_0\right] + \left(\frac{\omega_0^2}{p_3^2}\right)^{-1-\beta}\frac{1}{\Gamma(1-\beta)},$$

де $h_0 = \psi(2)+\psi(1)-\psi(2+\beta)-\psi(1-\beta)-\frac{1}{\beta}$, ($\beta$ - мале), а також асимптотичні формули для функцій $\psi$ і $\Gamma$ при малих $x$:

$$\psi(x) = \psi(1-x) - \pi\cot(\pi x)$$

($\psi(1) = -\gamma$, де $\gamma \simeq -0.5772$ — число Ейлера),

$$\Gamma(x) = \frac{\pi}{\Gamma(1-x)\sin\pi x},$$

отримаємо

$$\Delta(0) = \omega_0 e^{-\frac{2\pi}{g^2 m}}.$$

Врешті, використавши формулу

$$F(a,b;c;z) = (1-z)^{-a}F\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right),$$

одержуємо (3.3).


[1] В. М. Локтев, ФНТ **22**, 3 (1996).
[2] M. R. Schafroth, Phys. Rev. **96**, 1149, 1442 (1954); **100**, 463 (1955).
[3] И. А. Вакарчук, ТМФ **23**, 260 (1975); **32**, 247 (1977); ТМФ **36**, 122 (1978).
[4] И. А. Вакарчук, Ю. К. Рудавский, Ю. В. Головач, Укр. физ. журн. **27**, 127 (1982).
[5] M. Randeria, J. Duan and L. Shieh, Phys. Rev. Lett. **62**, 981 (1989); Phys. Rev. B **41**, 327 (1990).
[6] Э. В. Горбар, В. П. Гусынин, В. М. Локтев, СФХТ **6**, 483 (1992); ФНТ **19**, 1171 (1993).
[7] E. V. Gorbar, V. M. Loktev, S. G. Sharapov, Physica C **257**, 355 (1996).
[8] С. Г. Шарапов, Укр. фіз. журн. **41**, 212 (1996).
[9] Э. В. Горбар, В. М. Локтєв, С. Г. Шарапов, ФНТ **21**, 421 (1995).

[10] Ф. Г. Кочорбэ, М. Е. Палистрант, ТМФ **96**, 459 (1993).
[11] М. Е. Палистрант, ТМФ **105**, 491 (1995).
[12] Yu. B. Gaididei, V. M. Loktev, Phys. Stat. Sol. (b) **147**, 307 (1988).
[13] W. Weber, Z. Phys. **B70**, 323 (1988).
[14] V. M. Loktev, S. G. Sharapov, Low Temp. Phys. **22**, 211 (1996).
[15] Г. М. Элиашберг, ЖЭТФ **38**, 966 (1960).
[16] J. P. Carbotte, Rev. Mod. Phys. **62**, 1027 (1990).
[17] T. Appelquist, M. Bowich, D. Karabali, L. C. R. Wijewardhara, Phys. Rev. D **33**, 3704 (1986).
[18] V. P. Gusynin, V. A. Miransky, I. A. Shovkovy, Nucl. Phys. B **462**, 249 (1996).
[19] А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, I. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике* (Наука, Москва, 1962).
[20] С. В. Вонсовский, Э. З. Курмаев, Ю. А. Изюмов, *Сверхпроводимость переходных металлов, их сплавов и соединений* (Наука, Москва, 1977).
[21] J. R. Schrieffer, *Theory of Superconductivity* (Benjamin, N.–Y., 1964).
[22] E. H. Simnons, Phys. Rev. D **42**, 2933 (1990); T. Kugo, M. J. Mitchard, Phys. Lett. B **282**, 162 (1992).
[23] А. Б. Мигдал, ЖЭТФ **34**, 1438 (1958).
[24] M. A. Ikeda, A. Ogasawara and M. Sugihara, Phys. Lett. A **170**, 319 (1992).
[25] L. Pietronero, S. Strassler, Europhys. Lett. **18**, 627 (1992).
[26] C. Grimadi, L. Pietronero, S. Strassler, Phys. Rev. Lett. **75**, 1158 (1995).
[27] P. B. Allen, R. C. Dynes, Phys. Rev. B **12**, 905 (1975).
[28] K. Miyake, Progr. Theor. Phys. **69**, 1794 (1983).
[29] А. С. Александров, А. Б. Кребс, УФН **162**, N 5, 1 (1992).
[30] H. C. Hohenberg, Phys. Rev. **158**, 384 (1967).
[31] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцедентные функции, в 3-х томах. Т. 1* (Наука, Москва, 1973).
[32] Між іншим, сполуки ВТНП належать до йонних кристалів, де оптичні фононні вітки з відносно слабкою дисперсією мають відігравати більш важливу роль, ніж акустичні. Це ж припущення досить добре відповідає квадрупольним екситонам (див. [12]), дисперсія яких не є значною. Що ж стосується магнонів, то нехтування їхньою аномально великою у ВТНП дисперсією є неприпустимим, і до них використане припущення про $\omega(\mathbf{k}) = \omega_0$ застосувати не можна.
[33] Цікаво зауважити, що саме для ВТНП можна було деякою мірою відновити "релятивістську інваріантність", якщо мати на увазі обмін не фононами, а магнонами, швидкість яких у цих речовинах, на відміну від фононів досить велика (див. [1]). В усякому разі, якщо, використовуючи розклад (2.9), прийняти $k_F/m \simeq c$, де $c$ — вже швидкість магнонів, можна сподіватись на аналітичний аналіз такої "релятивістської" моделі з наявним в ній нетривіальним вакуумом. У цьому випадку відповідний розв'язок рівнянь стосувався б тільки системи з деякою фіксованою густиною носіїв.

## CROSSOVER FROM SUPERFLUIDITY TO SUPERCONDUCTIVITY IN 2D SYSTEMS AT INDIRECT INTERACTION BETWEEN CARRIERS

V. Loktev†, V. Turkowski††, S. Sharapov†
†*N. Bogolubov Institute for Theoretical Physics, Ukrainian National Academy of Sciences*
*14b Metrolohichna Str., Kiev UA–252143, Ukraine*
††*Taras Shevchenko Kiev National University*
*6 Academician Hlushkov Av., Kiev UA–252127, Ukraine*

Proceeding from the microscopic model Hamiltonian for the system of Fermi–particles interacting with phonons the equations for gap and chemical potential, admitting the analysis of its superconducting properties at arbitrary fermion concentration, are obtained. The solution of these equations allows to trace the crossover from local pair regime to Cooper pairing. It is shown that the type of superconducting behaviour depends not only on the strength of indirect interaction between fermions, but also on Fermi level position relatively to the maximal phonon energy.