ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 1, № 4 (1997) с. 513–520

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 1, No 4 (1997) p. 513–520

ЧИСЛОВИЙ РОЗРАХУНОК НЕЛІНІЙНИХ КОНСЕРВАТИВНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ

Т. Василенко, Л. Синицький, Я. Шмигельський
Львівський державний університет імені Івана Франка, кафедра теоретичних основ електрорадіотехніки
Україна, UA–290005, Львів, вул. Драгоманова, 19
(Отримано 19 березня 1997)

Досліджено ефекти, що виникають під час числового розрахунку коливань нелінійних консервативних осциляторів. Поряд із консервативними числовими методами, які завжди зберігають гамільтоніян, розглянуто групу методів (метод трапецій, метод прямокутників, метод Ейлера–Кромера), що є консервативними тільки для лінійних систем зі сталими параметрами. Під час застосування цих методів у дискретних моделях нелінійних осциляторів поряд з періодичними рухами виникають складні режими, які невластиві неперервній моделі. На прикладі нелінійного маятника досліджено періодичні, квазіперіодичні та стохастичні режими у його різних дискретних моделях.

Ключові слова: консервативні системи, числові методи, квазіперіодичні коливання, хаотичні режими.

PACS number(s): 02.60.Cb

I. ВСТУП

Під час дослідження періодичних режимів за допомогою числових методів у нелінійних консервативних осциляторах виникають ефекти, які спотворюють якісну картину процесів, що спостерігаються у неперервній системі. Перший з них — це порушення закону збереження енергії. Тому числові методи, що дають змогу при дискретизації не порушувати цей закон (так звані консервативні методи [1–4]), приваблюють дослідників.

Суттєвим недоліком консервативних методів є невисокий порядок їхньої точности. Тому для складних задач, що потребують розрахунків на великих проміжках часу (наприклад, у небесній механіці), відмовитися від традиційних числових методів неможливо. Саме цим зумовлено те, що надалі поряд із консервативними методами розглядаються й такі, що викликають порушення закону збереження енергії. Для того, щоб обґрунтовано порівняти ці методи, порядок їхньої точности прийнято таким самим, як і в консервативних.

II. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА ЧИСЛОВІ МЕТОДИ

Розглянемо консервативні системи другого порядку, математична модель яких має вигляд

$$\dot{x} = f(y),\ \dot{y} = -g(x), \tag{2.1}$$

де $x,\ y \in \mathrm{R}$, а функції $f(y)$ та $g(x)$ задовольняють умови існування та єдиности розв'язку. Гамільтоніян для (2.1)

$$H(x,y) = \int_0^y f(\eta)d\eta + \int_0^x f(\xi)d\xi. \tag{2.2}$$

Для гамільтонових систем консервативні методи описані в [1]. Їхня особливість полягає в тому, що у рівняннях Гамільтона

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}, \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{2.3}$$

відбувається дискретизація як лівих, так і правих частин. Наприклад, у випадку системи з одним ступенем вільности, якщо використано однокрокові методи, маємо:

$$\frac{x_{m+1}-x_m}{h} = \frac{H(x_{m+1},y_{m+1})-H(x_{m+1},y_m)}{y_{m+1}-y_m},$$
$$\frac{y_{m+1}-y_m}{h} = -\frac{H(x_{m+1},y_m)-H(x_m,y_m)}{x_{m+1}-x_m}, \tag{2.4}$$

або

$$\frac{x_{m+1}-x_m}{h} = \frac{H(x_m,y_{m+1})-H(x_m,y_m)}{y_{m+1}-y_m},$$
$$\frac{y_{m+1}-y_m}{h} = -\frac{H(x_{m+1},y_{m+1})-H(x_m,y_{m+1})}{x_{m+1}-x_m}. \tag{2.5}$$

З (2.4) і (2.5) отримуємо

$$H(x_{m+1}, y_{m+1}) = H(x_m, y_m). \tag{2.6}$$

Але з цієї рівности немає підстав робити висновок, що значення x_m та y_m збігаються у випадку розрахунку за форулами (2.4) і (2.5). Тільки в тому випадку, коли гамільтоніян можна записати у вигляді

$$H(x, y) = H_1(x) + H_2(y), \tag{2.7}$$

результати розрахунку є однаковими. Надалі розглядатимемо тільки такі приклади, коли ця умова виконується. Тому різниці між формулами (2.4) і (2.5) немає.

Поряд з (2.4) і (2.5) для дослідження (2.1) розглянемо такі числові методи:

метод трапецій

$$x_{m+1} = x_m + \frac{h}{2}[f(y_{m+1}) + f(y_m)], \tag{2.8}$$
$$y_{m+1} = y_m - \frac{h}{2}[g(x_{m+1}) + g(x_m)];$$

метод прямокутників (метод середньої точки)

$$x_{m+1} = x_m + h[f((y_{m+1} + y_m)/2)], \tag{2.9}$$
$$y_{m+1} = y_m - h[g((x_{m+1} + x_m)/2)];$$

метод Ейлера–Кромера

$$x_{m+1} = x_m + hf(y_{m+1}), \tag{2.10}$$
$$y_{m+1} = y_m - hg(x_m).$$

Відомо, що для лінійної гамільтонової системи зі сталими параметрами методи (2.8) і (2.9) є консервативними. Крім того, для лінійної системи з гамільтоніяном

$$H(x, y) = \frac{1}{2}(y^2 + x^2) \tag{2.11}$$

числові формули (2.4), (2.5), (2.8) і (2.9) приводять до однакових різницевих рівнянь. Тому порівнюватимемо саме ці методи, а також метод (2.10), який дуже ретельно досліджено в [5] з погляду виникнення хаосу під час числових розрахунків консервативних систем.

У випадку застосування методів (2.8) і (2.9) для дискретизації нелінійної консервативної системи немає жодних підстав очікувати, що рівність (2.6) буде виконуватися.

Розглянемо приріст гамільтоніяна (2.2) на одному кроці

$$\delta H = \int_{x_m}^{x_{m+1}} g(\xi)d\xi + \int_{y_m}^{y_{m+1}} f(\eta)d\eta. \tag{2.12}$$

Уздовж точного розв'язку $(x(t), y(t))$ системи (2.1) приріст δH, під час числового інтеґрування відмінний від нуля. Наприклад, для методу трапецій (2.8) виконується тотожність

$$[f(y_{m+1}) + f(y_m)](y_{m+1} - y_m) \tag{2.13}$$
$$+[g(x_{m+1}) + g(x_m)](x_{m+1} - x_m) = 0.$$

Віднімаючи від (2.12) тотожність (2.13), отримуємо

$$\delta H = \int_{x_m}^{x_{m+1}} g(\xi)d\xi - \frac{1}{2}[g(x_{m+1}) + g(x_m)](x_{m+1} - x_m)$$
$$+ \int_{y_m}^{y_{m+1}} f(\eta)d\eta - \frac{1}{2}[f(y_{m+1})$$
$$+ f(y_m)](y_{m+1} - y_m). \tag{2.14}$$

Так само для методу прямокутників

$$\delta H = \int_{x_m}^{x_{m+1}} g(\xi)d\xi - g((x_{m+1} + x_m)/2)(x_{m+1} - x_m)$$
$$+ \int_{y_m}^{y_{m+1}} f(\eta)d\eta - f((y_{m+1} + y_m)/2)$$
$$\times (y_{m+1} - y_m). \tag{2.15}$$

Отже, похибка розрахунку гамільтоніяна на одному кроці визначається похибкою методу трапецій або прямокутників для обчислення інтеґралів. Якщо функції $g(x)$ і $f(y)$ достатньо гладкі, а прирости $\Delta x_m = x_{m+1} - x_m$ та $\Delta y_m = y_{m+1} - y_m$ є малими, то, використовуючи відомі оцінки для похибок квадратурних формул [6], одержимо для методу трапецій

$$\delta H \cong -\frac{1}{12}[g''(\bar{x}_m) \cdot (\Delta x_m)^3 + f''(\bar{y}_m) \cdot (\Delta y_m)^3], \tag{2.16}$$

і для методу прямокутників

$$\delta H \cong \frac{1}{24}[g''(\bar{x}_m) \cdot (\Delta x_m)^3 + f''(\bar{y}_m) \cdot (\Delta y_m)^3], \tag{2.17}$$

де

$$\bar{x}_m = (x_{m+1} + x_m)/2, \ \bar{y}_m = (y_{m+1} + y_m)/2.$$

Як конкретний приклад системи (2.1) розглянемо математичний маятник

$$\dot{x} = y,\ \dot{y} = -\sin x, \tag{2.18}$$

де x — кут відхилення маятника від положення рівноваги. Тоді з (2.16) для методу трапецій маємо:

$$\delta H \cong \frac{1}{12} \sin \bar{x}_m (\Delta x_m)^3. \tag{2.19}$$

Для методу прямокутників аналогічне співвідношення набуває вигляду

$$\delta H \cong -\frac{1}{24} \sin \bar{x}_m (\Delta x_m)^3. \tag{2.20}$$

Отже, у цьому випадку числове значення похибки δH менше 0.01% при $\Delta x_m \cong 0.1$, що відповідає порядку 10^2 кроків на періоді коливань.

Протягом одного періоду можливе накопичення похибки, про що свідчать результати числового експерименту з визначення її максимального значення. Для методу трапецій максимальне відхилення енергії протягом періоду від значення, яке відповідає неперевній системі, досить добре визначається співвідношенням

$$\delta H\% = 0.21 x_{\max}^{1.72} / N_L^2, \tag{2.21}$$

де $x_{\max}$ — максимальний кут відхилення в частках π, $N_L = \mathrm{Round}(\frac{2\pi}{\omega_0 \mathrm{h}})$ — кількість кроків на періоді коливань для лінійного маятника

$$\dot{x} = y,\ \dot{y} = -\omega_0^2 x. \tag{2.22}$$

Співвідношення (2.21) дає хороші результати, коли $N_L \geq 8$. Якщо вважати, що у середньому Δx_m зростає пропорційно до кроку h, то, як бачимо з (2.19) та (2.21), глобальна похибка залежно від кроку зростає повільніше, ніж локальна: квадратичний закон замість кубічного.

Для методу Ейлера–Кромера (2.10) величина ΔH приблизно на два порядки більша, ніж для методу трапецій при $N_L \cong 5 \cdot 10^3$, але зростає лінійно залежно від кроку. Тому зі зменшенням ($N_L \cong 10$) значення ΔH практично зрівнюються.

Тепер залишається невирішеним питання про існування вікових змін енергії протягом багатьох періодів. Відповідь на нього тісно пов'язана з характером рухів, що визначаються різницевими рівняннями.

III. ПЕРІОДИЧНІ РЕЖИМИ

Для малих кроків дискретизації та малих значень енергії точки, що відповідають послідовним ітераціям на площині (x, y), лягають на просту криву Γ, топологічно еквівалентну до кола, яка є інваріянтною до відображень (2.8)–(2.10). Відомо, що навіть для найпростіших відображень відшукання аналітичного виразу для рівняння цієї кривої є дуже складною задачею.

Ніколи немає впевнености, що інваріянтна крива не є стохастичним шаром з дуже малою шириною. Тож коли йдеться про прості інваріянтні криві, мається на увазі, що усіма доступними методами не вдавалося помітити розширення такої кривої. З цією метою спостерігали її окремі ділянки на екрані дисплея, збільшені в 10^7 разів, аналізували спектр сигналу на відрізку, що охоплює приблизно 100 періодів коливань. Тому тут і надалі тільки у випадку, коли нема розмиття кривої та чітко виражений дискретний спектр, використовується термін "проста інваріянтна крива".

Якщо кількість кроків досить велика (10^5–10^6), то крива Γ у переважній більшості випадків щільно заповнюється послідовністю точок. Це свідчить про те, що послідовності $\{x_m\}$ та $\{y_m\}$ не є періодичними. Точніше, період, який завжди є при дискретизації за рівнем, значно перевищує кількість кроків. Тільки у рідкісних випадках за q обертів, яким відповідає N кроків, досягається повний збіг точок на Γ: тоді період одного оберту $N_0 = \frac{N}{q}$. Очевидно, що $N_0 = \frac{1}{\alpha}$, де α — число обертання [7].

Отже, період одного оберту N_0 слід вважати ірраціональним числом, або таким раціональним числом, для якого N та q є взаємно простими дуже великими числами. Випадки, коли $q = 1$, тобто N_0 є ціле число, надзвичайно рідкісні, але заслуговують на увагу, тому що приводять до зміни характеру руху.

Для періодичних послідовностей, незважаючи на зміну енергії протягом одного періоду, можна твердити, що вікові зміни енергії дорівнюють нулю. Справді, якщо для деякого значення $m = M$ маємо $y_M = 0$, тобто дискретний відлік потрапляє в екстремальну точку, то внаслідок симетрії $g(x)$ для всіх інших точок виконується співвідношення

$$x_{M-r} = x_{M+r} \text{ та } y_{M-r} = y_{M+r}, \tag{3.1}$$

де r — довільне ціле число. У цьому випадку

$$\sum_{m=M-r}^{M+r} [g(x_{m+1}) - g(x_m)](x_{m+1} - x_m) = 0, \tag{3.2}$$

де підсумовування поширюється на цілий період. Тоді $\Delta H = 0$ на періоді процесу, що означає відсутність вікових змін енергії.

Якщо жоден з дискретних відліків не потрапляє в екстремальну точку, а період дискретної системи — невелике ціле число, то зміна енергії, на перший погляд, може відрізнятися від нуля. Покажемо, що цей випадок теж не реалізується. Справді, енергія системи та число обертання є неперервними функціями початкових умов $(x_0,\ y_0)$. Коли N_0 є ірраціональним числом, то деяка точка одного з відображень (2.8)–(2.10) наближається до екстремальних точок як завгодно близько. Тому в цьому випадку вікова зміна енергії буде як завгодно малою. Внаслідок неперервности цей висновок є справедливим для всіх початкових умов, за яких прості криві є інваріянтними для відображень (2.8)–(2.10).

Розглянемо тепер вплив дискретизації на точність відтворення періоду коливань. Жоден із розглянутих методів не зберігає значення періоду коливань неперервної системи. Відомо [8], що для лінійної системи (2.22) метод трапецій при $\omega_0 h \ll 1$ дає відносну похибку для періоду

$$\delta_T \cong \frac{1}{12}(\omega_0 h)^2, \tag{3.3}$$

а метод прямокутників —

$$\delta_T \cong -\frac{1}{24}(\omega_0 h)^2. \tag{3.4}$$

Графіки залежностей відносних похибок для періоду нелінійного маятника (2.18) від амплітуди коливань показані на рис. 1. Тут і в усіх інших числових експериментах початкові умови для дискретних моделей маятника приймали у вигляді $(x_0, 0)$, тому в подальшому x_0 ототожнюється з амплітудою коливань.

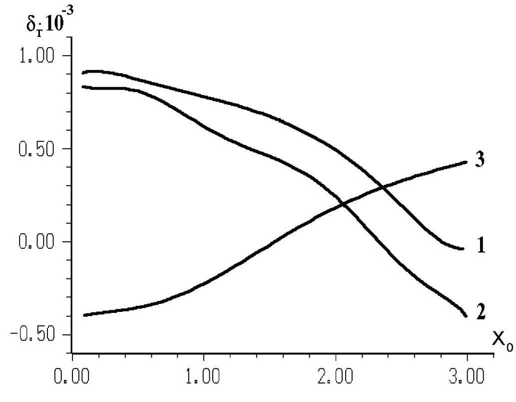

Рис. 1. Залежність відносної похибки визначення періоду коливань нелінійного маятника від амплітуди: 1 — для методу трапецій; 2 — для консервативного методу; 3 — для методу Ейлера–Кромера.

Для методу трапецій та консервативного методу зі збільшенням аплітуди, коли не можна нехтувати нелінійністю, похибка суттєво зменшується і переходить через нуль при $x_0 \cong 0.7\pi$ для методу трапецій та при $x_0 \cong 0.9\pi$ для консервативного методу. Для кутів, близьких до π, похибка від'ємна і принаймні удвічі менша, ніж для лінійного маятника. Отже, консервативний метод з погляду збереження періоду коливань не має переваг перед методами трапецій та прямокутників.

У випадку методу Ейлера–Кромера збільшення амплітуди коливань спочатку також викликає зменшення похибки визначення періоду. При $x_0 = \frac{\pi}{2}$ похибка дорівнює нулю, а потім змінює знак і збільшується до значення, що за абсолютною величиною відповідає похибці δ_T при розрахунку лінійного маятника.

Зменшення похибки δ_T під час розрахунку нелінійного маятника частково пояснюється тим, що частота коливань при великих відхиленнях значно менша, ніж для лінійного маятника. Це відповідно приводить до відносного зменшення кроку дискретизації.

IV. КВАЗІПЕРІОДИЧНІ РЕЖИМИ

Для неконсервативних методів (8–10) при кроках інтеґрування і початкових енергіях, більших від деяких критичних значень, у дискретній моделі нелінійного маятника спостерігаються квазіперіодичні режими. В цьому випадку фазова траєкторія перестає бути простою кривою.

Квазіперіодичні рухи, звичайно, виникають в околі точок $(x_m^*, y_m^*),\ m = 1, N$, які відповідають періодичному режиму з цілим періодом N і числом обертання, що є відношенням порівняно невеликих взаємно простих цілих чисел. На рис. 2 для $N = N_0 = 8$ зображені фазові траєкторії дискретної моделі за методом Ейлера–Кромера для нелінійного маятника. Періодичному режиму відповідає початкова амплітуда $x_0^* = 0.77209$. При малих відхиленнях від періодичного режиму $(x_0 = 0.77236)$ фазовий портрет має вигляд N ізольованих замкнених кривих, які формою подібні до еліпсів (рис. 2, *а*). Область, помічена прямокутником, збільшена у 100 разів і зображена на рис. 2, *б*. Подальше збільшення відхилень від x_0^* призводить до деформації еліпсів. Вони набувають серпоподібної форми, наближаються один до одного, їхня "товщина" поступово збільшується. На рис. 2, *в* зображені такі траєкторії при $x_0 = 0.77896$. У момент зникнення квазіперіодичного режиму $(x_0 = 0.78116)$ товщина стрибком стає такою, що дорівнює нулю, і знову утворюється проста інваріянтна крива, що відповідає періодичному режиму (рис. 2, *г*).

Якщо порівнювати метод Ейлера–Кромера і метод трапецій, то при однаковому значенні кроку квазіперіодичні режими для методу трапецій виникають при значно більшій амплітуді, ніж для методу Ейлера–Кромера. Зокрема, якщо $h = 0.8$, то квазіперіодичний режим для методу трапецій настає при $x_0 \cong 0.55\pi$, тоді як для методу Ейлера–Кромера він уперше спостерігається при $x_0 \cong 0.25\pi$.

Лінеаризувавши відображення (2.8)–(2.10) в околі траєкторії (x_m^*, y_m^*), одержимо рівняння у варіяціях

$$\begin{bmatrix} \xi_{m+1} \\ \vartheta_{m+1} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_m \cdot \begin{bmatrix} \xi_m \\ \vartheta_m \end{bmatrix}, \tag{4.1}$$

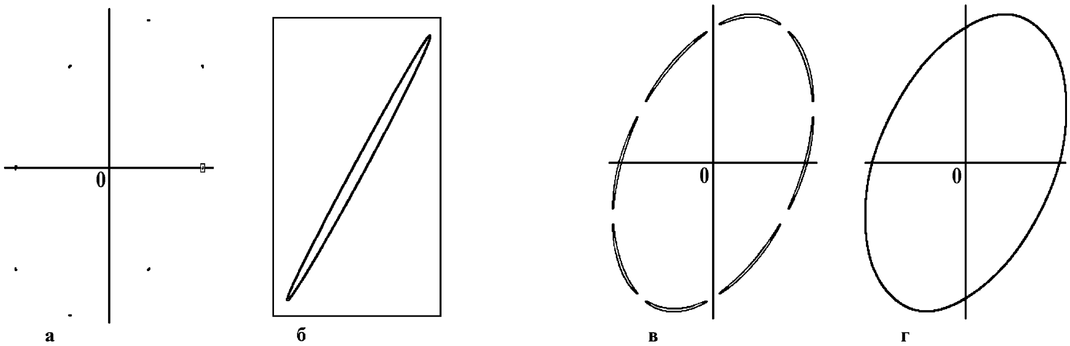

Рис. 2. Еволюція квазіперіодичних коливань у дискретній моделі нелінійного маятника (метод Ейлера–Кромера) залежно від амплітуди.

де $\xi_m = x_m - x_m^*$, $\vartheta_m = y_m - y_m^*$ — відхилення від заданої траєкторії, а матриця $\mathbf{A}_m$ у випадку системи (18) має вигляд: для методу трапецій

$$\mathbf{A}_m = \frac{1}{1+\frac{h^2}{4}\cos x_{m+1}^*}\begin{bmatrix} 1-\frac{h^2}{4}\cos x_m^* & h \\ -\frac{h}{2}(\cos x_{m+1}^* + \cos x_m^*) & 1-\frac{h^2}{4}\cos x_{m+1}^* \end{bmatrix}; \tag{4.2}$$

для методу прямокутників

$$\mathbf{A}_m = \frac{1}{1+\frac{h^2}{4}\cos \bar{x}_m^*}\begin{bmatrix} 1-\frac{h^2}{4}\cos \bar{x}_m^* & h \\ -h\cos \bar{x}_m^* & 1-\frac{h^2}{4}\cos \bar{x}_m^* \end{bmatrix}, \tag{4.3}$$

де $\bar{x}_m^* = (x_{m+1}^* + x_m^*)/2$; для методу Ейлера–Кромера

$$\mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} 1-h^2\cos x_m^* & h \\ -h\cos x_m^* & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.4}$$

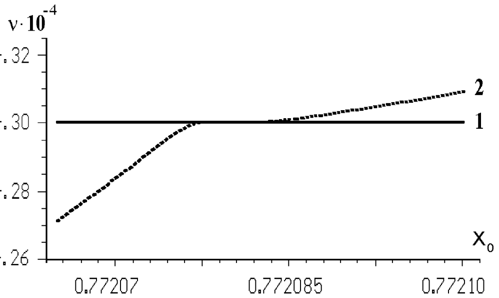

Рис. 3. Залежність другої базисної частоти квазіперіодичних коливань від амплітуди в дискретній моделі нелінійного маятника (метод Ейлера–Кромера): 1 — для лінеаризованої моделі; 2 — для нелінійної моделі.

Друга базисна частота ν_2 у квазіперіодичному русі значно менша від основної $\nu_1 = \frac{1}{N}$. Для методу Ейлера–Кромера значення для певного діяпазону початкових амплітуд дуже добре збігаєтьсяє зі значенням частоти $\nu_{\text{Л}}$ лінеаризованої системи (4.1). Ці дані показано на рис. 3. Для методу трапецій такого збігу немає: друга частота квазіперіодичного руху менша від частоти лінеаризованих коливань на порядок. Пояснити цей факт не вдається.

V. СТОХАСТИЧНІ КОЛИВАННЯ

Виникнення стохастичних коливань при дискретизації рівнянь маятника досліджували в [5]. Ефект дискретизації враховували як збурення гамільтоніяна відповідної неперервної системи. Це дає змогу оцінити зміну енергії у процесі коливань, з якою пов'язується виникнення стохастичних шарів. Але оцінити відхилення енергії від значень, що відповідають неперервній системі, як було показано вище, можна безпосередньо з аналізу різницевих рівнянь. Причому відразу виявляється суттєве збільшення зміни енергії зі збільшенням амплітуди коливань, що кількісно не враховано в [5]. Числові експерименти, однак, не дають змоги виявити прямий зв'язок між зміною енергії і виникненням стохастичних коливань та товщиною стохастичного шару. Непостійність енергії для неконсервативних числових методів притаманна їм незалежно від типу режиму: не спостерігаються аномальні зміни енергії під час появи як квазіперіодичних, так і стохастичних режимів.

Стохастичні коливання, як і квазіперіодичні рухи, виникають в околі точок (x_m^*, y_m^*) періодичних режимів з числом обертання $\alpha = \frac{q}{N}$, що є відношенням порівняно невеликих взаємно простих цілих чисел.

Структура хаотичних шарів, якщо їх детально досліджувати, є досить складною. Це відмічено у багатьох працях. У випадку, який розглядаємо, суттєву роль відіграють квазіперіодичні рухи, які існують у межах стохастичного шару і непомітні під час не дуже детального дослідження. В околі деяких точок (x_m^*, y_m^*), що містяться всередені стохастичного шару, режим хаотичних коливань руйнується і виникають квазіперіодичні коливання. В результаті "суцільний" стохастичний шар виявляється розділеним на окремі шари, між якими є квазіперіодичні режими. Чергування зон періодичних, квазіперіодичних та стохастичних режимів має дуже складний характер. Аналітично ця задача не розв'язана навіть для найпростіших відображень. Ширина зон квазіперіодичних режимів залежить від значень N та q: чим вони більші, тим вужча смуга квазіперіодичних режимів, якщо такий режим є взагалі.

Наприклад, для методу Ейлера–Кромера стохастичний шар, що є в околі точки з $N_0 = N = 14$, містить у собі квазіперіодичні режими в околі точок зі значеннями $N_0 = 1064/77$; $180/13$; $239/17$; $128/9$; $100/7$. Але одночасно хаотичні коливання знищують періодичні рухи і можливі в їхньму околі квазіперіодичні режими при $N_0 = N = 14$ і $N = 71/5$, які є всередині стохастичного шару.

Для визначення наявности хаотичних рухів використовували відомі критерії [7, 9]:

1) значення характеристичних показників Ляпунова;

2) спектральний склад коливань на відрізках часу різної довжини.

На підставі лінеаризованого рівняння (4.1) для малих відхилень від заданої траєкторії (x_m^*, y_m^*) можемо записати для довільного $k > 0$

$$\begin{bmatrix} \xi_k \\ \vartheta_k \end{bmatrix} = \mathbf{W} \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \vartheta_0 \end{bmatrix}, \quad \text{де } \mathbf{W} = \prod_{m=0}^{k-1} \mathbf{A}_m. \tag{5.1}$$

Характеристичні показники Ляпунова λ_i визначаються власними значеннями ρ_i матриці $\mathbf{W}$, які є розв'язками рівняння

$$\rho^2 - \mathrm{Sp}\mathbf{W}\rho + \det\mathbf{W} = 0. \tag{5.2}$$

Для методу Ейлера–Кромера, як випливає з (30),

$$\mathrm{Sp}\mathbf{A}_m = 2 - h^2 \cos x_m^*, \tag{5.3}$$

$$\det\mathbf{A}_m = 1, \ \forall m.$$

При $h < 2$ та $|x_m^*| \leq \frac{\pi}{2}$ маємо $\mathrm{Sp}\mathbf{A}_m < 2$. Неважко пересвідчитись, що в цьому випадку і $|\mathrm{Sp}\mathbf{W}| < 2$. Тоді з (5.2), враховуючи, що $\det\mathbf{W} = 1$, маємо $|\rho| = 1$ і це означає, що хаотичні рухи неможливі. Числовий експеримент підтверджує цей висновок: при $|x_0| \leq \frac{\pi}{2}$ хаотичні рухи не спостерігаються, а при $x_0 = 0.55\pi$ вони вже виникають. Однак при $|x_0| > \frac{\pi}{2}$, незважаючи на те, що характеристичні показники Ляпунова більші від нуля, хаос спостерігається не завжди. Числовий розрахунок старшого показника Ляпунова λ_1, усередненого протягом кількох сотень періодів коливань, дає $\lambda_1 = 0$ для $|x_0| \leq \frac{\pi}{2}$ і $\lambda_1 > 0$ для $|x_0| > \frac{\pi}{2}$ відповідно, причому зі збільшенням x_0 старший показник λ_1 збільшується. На рис. 4 показано залежність λ_1 від x_0 для різних кроків інтеґрування h.

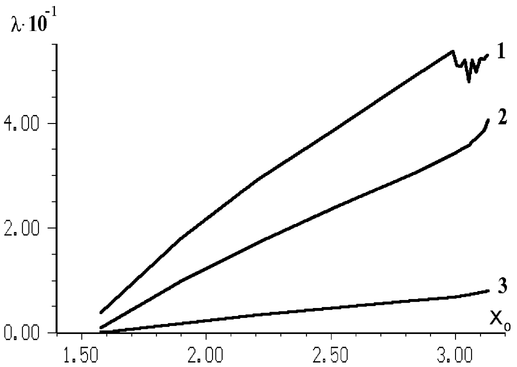

Рис. 4. Залежність старшого показника Ляпунова від амплітуди коливань у дискретній моделі нелінійного маятника (метод Ейлера–Кромера) при різних кроках інтеґрування: 1 — $h = 0.8$; 2 — $h = 0.5$; 3 — $h = 0.1$.

Для методу трапецій з (4.2) маємо

$$\mathrm{Sp}\mathbf{A}_m = \frac{2 - \frac{h^2}{4}(\cos x_m^* + \cos x_{m+1}^*)}{1 + \frac{h^2}{4}\cos x_{m+1}^*}, \tag{5.4}$$

$$\det\mathbf{A}_m = \frac{1 + \frac{h^2}{4}\cos x_m^*}{1 + \frac{h^2}{4}\cos x_{m+1}^*}. \tag{5.5}$$

На відміну від методу Ейлера–Кромера у методі трапецій $\det\mathbf{A}_m > 1$, якщо $x_m^* > x_{m+1}^*$. Нерівність $\mathrm{Sp}\mathbf{A}_m < 2$ справджується тільки тоді, коли виконується умова

$$3\cos x_{m+1}^* + \cos x_m^* > 0,$$

яка безумовно є при $|x_m^*| < \frac{\pi}{2}$. Але і в цьому випадку одне з власних значень матриці $\mathbf{W}$ перевищує за модулем одиницю, якщо $\det\mathbf{W} > 1$. Однак поява хаотичних рухів у випадку використання методу трапецій спостерігається, якщо значення амплітуди коливань більші, ніж для методу Ейлера–Кромера ($x_0 \cong 0.75\pi$). Числовий розрахунок λ_1, аналогічний до розрахунку для методу Ейлера–Кромера, так само дає $\lambda_1 = 0$ при $|x_0| \le \frac{\pi}{2}$, і $\lambda_1 > 0$ при $|x_0| > \frac{\pi}{2}$. На рис. 5 показана залежність λ_1 від x_0 для різних кроків інтеґрування h.

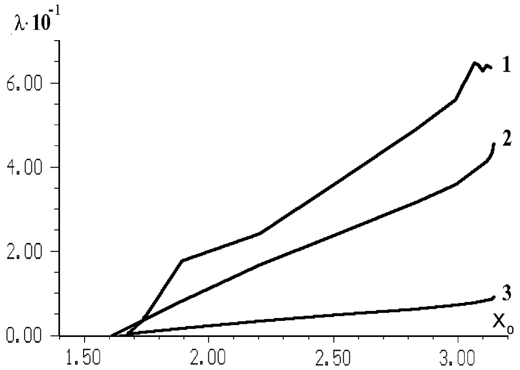

Рис. 5. Залежність старшого показника Ляпунова від амплітуди коливань у дискретній моделі нелінійного маятника (метод трапецій) при різних кроках інтеґрування: 1 — $h = 0.8$; 2 — $h = 0.5$; 3 — $h = 0.1$.

У спектрі коливань при хаотичному режимі частота, на якій спостерігається максимальна інтенсивність спектра не збігається з частотою, яка б мала бути у випадку, коли хаотичних рухів нема. Відомо, що частота коливань монотонно спадає зі збільшенням енергії, тому слід було чекати зменшення номерів ліній максимальної інтенсивности $I_{\max}$. Насправді номери ліній максимальної інтенсивности змінюються немонотонно зі збільшенням початкової енергії.

Розпізнавання хаотичних коливань за допомогою спектрального аналізу потребує дуже обережного підходу, особливо у випадку систем великої розмірности. Якщо математична модель описується n рівняннями першого порядку, то квазіперіодичні рухи можуть мати $n-1$ базисних частот $\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots\omega_{n-1}$, а спектр містить лінії на частотах

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \ldots + m_{n-1}\omega_{n-1},$$

де m_i — довільні цілі числа. Під час числового експерименту досліджують завжди дискретний спектр. Тому, можливо, що під час квазіперіодичного руху майже на всіх частотах буде спостерігатися ненульова інтенсивність спектра. Навіть у найбільш сприятливому випадку двочастотних квазіперіодичних коливань, якщо $\omega_1 \ll \omega_2$, а проміжок часу, на якому аналізують спектр, має порядок $\frac{2\pi}{\omega_1}$, то частоти $m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ можуть охоплювати майже всі частотні відліки, що відповідають дискретному перетворенню Фур'є. Тому наявність хаосу визначали шляхом дослідження зміни спектра з поступовою зміною початкового відхилення x_0. Досліджували величину $\sigma = \frac{\hat{X}}{X_{max}}$, де $\hat{X}$ — середнє квадратичне значення інтенсивности без максимального значення інтенсивности спектра $X_{\max}$. Залежність $\sigma(x_0)$ показана на рис. 6.

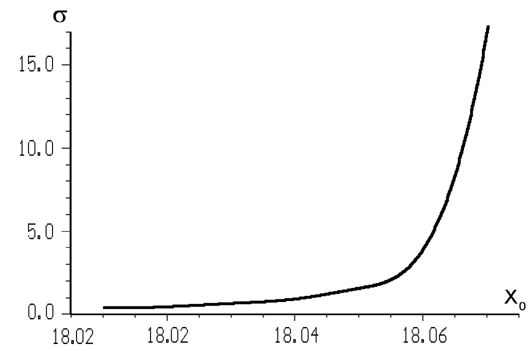

Рис. 6. Залежність нормованого середнього квадратичного значення інтенсивности спектра коливань від амплітуди в дискретній моделі нелінійного маятника (метод трапецій).

Дані рис. 6 свідчать про те, що спектр майже стрибком при певному значенні x_0 переходить від лінійного до неперервного на межі переходу від квазіперіодичних коливань до хаотичних.

Наведені результати числових експериментів дають змогу дещо уточнити картину виникнення квазіперіодичних та хаотичних коливань у дискретних моделях математичного маятника порівняно з тим, коли ці ефекти пояснюються збуренням гамільтоніяна $H(x, y)$ з урахуванням його залежности від часу [5].

[1] Л. А. Синицкий, *Методы аналитической механики в теории электрических цепей* (Вища школа, Львів, 1978).

[2] Ю. А. Криксин, Журн. выч. мат. мат. физ. **33**, 206 (1993).

[3] Ю. А. Криксин, Журн. выч. мат. мат. физ. **36**, 156 (1996).

[4] D. Greenspan, J. Comput. Phys. **56**, 28 (1984).

[5] Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, Д. А. Усиков, А. А. Черников, *Слабый хаос и квазирегулярные структуры* (Наука, Москва, 1991).

[6] Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер, *Машинные*

методы математических вычислений (Мир, Москва, 1980).

[7] А. Лихтенберг, М. Либеран, *Регулярная и стохастическая динамика* (Мир, Москва, 1984).

[8] Л. А. Синицкий, *Элементы качественной теории нелинейных электрических цепей* (Вища школа, Львів, 1975).

[9] В. С. Анищенко, *Сложные колебания в простых системах* (Наука, Москва, 1990).

NUMERICAL ANALYSIS OF NON–LINEAR CONSERVATIVE OSCILLATORS

T. Vasylenko, L. Sinitsky, Ja. Shmigelsky
Lviv State University, Chair of Radioelectronics
19 Drahomanov Str., Lviv, UA–290005, Ukraine

The paper provides an analysis of bifurcation phenomena in the dynamic of conservative oscillators when their equations are discretised by various numerical methods. The Euler–Cromer method, trapezoidal, rectangular rules and conservative methods are considered. For each of them the dependence of the energy and the frequency of oscillation are evaluated as a function of the step of integration. Nevertheless the conservative methods preserve the energy conservation law the change of the frequency of oscillation has the same order just as for all other methods mentioned above. Conditions for existence of quasy-periodic motions and evaluation of their frequencies are established. Chaotic behavour caused by discretisation was investigated in some papers. More detailed analysis of such phenomena permitted to establish the values of parameters when such effects are impossible. Special attention was devoted to a problem of distinguishing chaotic behavour from quasy-periodic motion. For this purpose detailed analysis of spectrum of both motions was carried out. In particular it was shown that the change of energy due to the discretisation cannot be considered as a main sign of an appearance of chaotic behavour: there exists a wide interval steps of integration where energy changes to a marked degree during a period. Nevertheless chaotic motions are not observed. The existence of chaos was assured in the case when spectrum changes discontiniously under smoothly increasing of the energy.