ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 2, № 1 (1998) с. 123–127

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 2, No 1 (1998) p. 123–127

ДИНАМІЧНІ Й ТОПОЛОГІЧНІ СОЛІТОНИ В КВАЗІОДНОВИМІРНИХ ФЕРОМАГНЕТНИХ СИСТЕМАХ

В. Яцишин
Дрогобицький педагогічний інститут,
вул. І. Франка, 24, Дрогобич, UA–293720, Україна
(Отримано 4 жовтня 1996)

Розглянуто одновимірний феромагнетний ланцюжок з урахуванням коливань ґратки в гармонічному наближенні. На підставі послідовного квантового підходу досліджено динамічні й топологічні магнетні солітони. Показано, що такого типу збурення задовольняють нелінійне рівняння Шредингера, відшукано його розв'язки і досліджено параметри солітонів.

Ключові слова: феромагнетик, солітон, кінк, фонон, плоска хвиля.

PACS number(s): 75.10.-b, 75.30.Ds

I. ВСТУП

Одним із напрямків, який активно і результативно розробляють у фізиці твердого тіла, є фізика нелінійних ефектів і явищ [1]. Найліпше вивчено одновимірні системи. Це зумовлено простотою моделей, які в цьому випадку використовують, та порівняно простими аналітичними розрахунками. Дослідження одновимірних систем різних типів засвідчили, що в таких системах може бути особливий тип збудження — солітони. Солітон — це неоднорідне збудження того чи іншого поля, зосереджене в малій області простору і здатне переміщуватися, зберігаючи свою структуру.

Серед одновимірних систем, для яких визначена наявність солітонів, є феромагнетні ланцюжки. Магнетні солітони, або, як їх ще називають, відокремлені магнони, досліджували автори [2–11]. Відокремлені магнони — це спінові збудження, локалізовані в деякій області ланцюжка і пов'язані з деформацією міжатомних відстаней. Такий самоузгоджений стан описує нелінійне рівняння Шредингера [9–11].

Ми на підставі квантового підходу, розвинутого в теорії молекулярних солітонів [12], досліджували магнетні солітони в одновимірних феромагнетних ланцюжках у гармонічному наближенні, а також другий тип магнетного солітона — 180-градусну доменну стінку, або π-кінк [13–14]. Обидва дослідження об'єднує спільна вихідна модель. Водночас у переважній більшості праць π-кінки досліджували на підставі рівняння Ландау–Ліфшиця для магнетного моменту. Показано, що динаміка ланцюжка суттєво впливає на параметри π-кінка, зокрема на збільшення його півширини.

II. ДИНАМІЧНІ СОЛІТОНИ В ОДНОВИМІРНИХ ФЕРОМАГНЕТНИХ СИСТЕМАХ

Розглянемо лінійний гайзенберґівський феромагнетний ланцюжок спінів. Для опису такої системи скористаємося звичайним гайзенберґівським гамільтоніяном з урахуванням динаміки ланцюжка:

$$H = H_\Gamma + H_\Phi, \tag{2.1}$$

де

$$H_\Gamma = -\frac{1}{2}\sum_{n,n'}\left(I_{n,n'}S_n^- S_{n'}^+ + \tilde{I}_{n,n'}S_n^z S_{n'}^z\right), \tag{2.2}$$

$n,\ n'$ — номери спінів у ланцюжку; $S_n^\pm = S_n^x \pm S_n^y$; S_n^ν — оператор ν-ї проєкції спіну ($\nu = x,\ y,\ z$); $I_{n,n'} = I(R_{n,n'})$, $\tilde{I}_{n,n'} = \tilde{I}(R_{n,n'})$ — обмінні інтеґрали; $R_{n,n'} = r_n - r'_n$, $r_n = na + x_n$, a — стала ґратки; x_n — величина зміщення з положення рівноваги. Величина H_Φ — оператор коливного руху спінів біля положення рівноваги і в гармонічному наближенні — має вигляд

$$H_\Phi = \sum_n \frac{p_n^2}{2m} + \frac{k}{2}\sum_n (x_{n+1} - x_n)^2, \tag{2.3}$$

де m — ефективна маса, яка переміщається разом зі спіном уздовж ланцюжка.

Для побудови повного гамільтоніяна системи, який враховує взаємодію між спінами і коливаннями ґратки, зробимо так: обмінні інтеґрали запишемо в лінійному розкладі за операторами зміщення. Крім того, оскільки ми досліджуватимемо слабко збуджені стани, перейдемо від спінових операторів до бозе–операторів спінових збуджень. Після всіх цих перетворень гамільтоніян (2.1) набуде вигляду

$$H = \sum_n \frac{p_n^2}{2m} + \frac{k}{2}\sum_n (x_{n+1} - x_n)^2 + 2S\tilde{I}\sum_n a_n^+ a_n - SI_0 \sum_n (a_{n+1}^+ a_n + a_n a_{n+1}^+) \tag{2.4}$$

$$- S\tilde{I}_1 \sum_n (x_{n+1} - x_{n-1}) a_n^+ a_n - I_1 \sum_n (x_{n+1} - x_n)(a_{n+1}^+ a_n + a_n^+ a_{n+1}),$$

де

$$I_0 = I(a); \quad \tilde{I}_0 = \tilde{I}(a), \quad I_1 = I_1(a) = \frac{\partial I(R_{nn'})}{\partial R_{nn'}}; \quad \tilde{I}_1 = \tilde{I}_1(a) = \frac{\partial \tilde{I}(R_{nn'})}{\partial R_{nn'}}.$$

Далі будемо цікавитися одночастинковими спіновими збудженнями, хвильову функцію яких запишемо також у стандартному вигляді

$$\psi(t) = \sum_n C_n(t) e^{\sigma(t)} a_n^+ \left|0\right>, \qquad \sum_n \left|C_n(t)\right|^2 = 1, \quad \sigma(t) = -i\sum_k (U_k(t)p_k - V_k(t)x_k), \tag{2.5}$$

де $|0>$ — вакуумний стан для спінових збуджень і фононів. Комплексні функції $C_n(t)$ характеризують розподіл збуджень на вузлах ланцюжка, а дійсні функції $U_k(t)$ і $V_k(t)$ визначають середні значення зміщень і їхніх канонічних імпульсів у стані з хвильовою функцією (2.5). Наша подальша задача полягатиме у визначенні цих функцій. Після врахування явного вигляду гамільтоніяна (2.4) і пробної хвильової функції (2.5) рівняння для функцій $C_n(t)$, $U_k(t)$ і $V_k(t)$ у довгохвильовому наближенні набудуть вигляду

$$\frac{\partial C(\xi,t)}{\partial t} = (\Delta + W) + \tau \frac{\partial U(\xi,t)}{\partial t} C(\xi,t) - SI_0 \frac{\partial^2 C(\xi,t)}{\partial \xi^2}, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial U(\xi,t)}{\partial t} = \frac{1}{m} V(\xi,t), \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial V(\xi,t)}{\partial t} = \tau \frac{\partial}{\partial \xi} \left|C(\xi,t)\right|^2 + k \frac{\partial^2 U(\xi,t)}{\partial \xi^2}, \tag{2.8}$$

де $\Delta = 2S(\tilde{I}_0 - I_0)$; $\quad \tau = 2S(\tilde{I}_1 - I_1)$; $\quad W = <\psi\,|H_\Phi|\,\psi>$.

Із рівняння (2.6) бачимо, що наша система рівнянь є нелінійна. Важливо те, що ця нелінійність зумовлена як спін–фононною взаємодією, так і анізотропією обмінної енерґії ($\tau \neq 0$).

Для розв'язування системи (2.6)–(2.8) введемо функцію

$$\rho(\xi - \nu t) = -\frac{\partial U(\xi,t)}{\partial \xi}, \tag{2.9}$$

тобто вважатимемо, що динаміка ґратки має хвильовий характер.

Тепер з (2.7) і (2.8) отримаємо

$$\rho(\xi - \nu t) = \frac{\tau \left|C(\xi,t)\right|^2}{m\nu_0^2 \left(1 - \frac{\nu^2}{\nu_0^2}\right)}, \tag{2.10}$$

де ν — швидкість переміщення збудження; $\nu_0^2 = \frac{k}{m}$.

Підставивши (2.10) в (2.6), матимемо

$$i\frac{\partial C(\xi,t)}{\partial t}+SI_0\frac{\partial^2 C(\xi,t)}{\partial \xi^2}-(\Delta+W)C(\xi,t)+\frac{\tau^2}{m\nu_0^2\left(1-\frac{\nu^2}{\nu_0^2}\right)}\left|C(\xi,t)\right|^2 C(\xi,t)=0. \tag{2.11}$$

Повна енерґія W коливного руху тепер буде задаватися так:

$$W=\frac{m}{2}(\nu^2+\nu_0^2)\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi\rho^2(\xi-\nu t)=\frac{\tau^2\left(1+\frac{\nu^2}{\nu_0^2}\right)}{2m\nu_0^2\left(1-\frac{\nu^2}{\nu_0^2}\right)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi\left|C(\xi,t)\right|^4. \tag{2.12}$$

Рівняння (2.11) і (2.12) є основними для визначення хвильової функції та енерґії збуджень, які називаються відокремленими магнонами, або магнетними солітонами.

Розв'язок рівняння (2.11) має вигляд

$$C(\xi,t)=\sqrt{\mu/2}\frac{\exp\{i(q\xi-\Omega t)\}}{ch(\mu(\xi-\nu t))}, \tag{2.13}$$

де $q=\frac{\nu}{2SI_0}$; Ω — енерґія збудження:

$$\Omega=E_0+\frac{m^*\nu^2}{2}, \tag{2.14}$$

$$E_0=\Delta-\frac{5\tau^4}{48\ SI_0\ m\nu_0^4(1-\frac{\nu^2}{\nu_0^2})}, \tag{2.15}$$

$$m^*=\frac{1}{2I_0S}+\frac{\tau^4\left(2+3\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2-\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^4\right)}{24SI_0m^2\nu_0^4\left(1-\frac{\nu^2}{\nu_0^2}\right)^3}. \tag{2.16}$$

Тепер проаналізуємо отримані результати. Розв'язок (2.13) описує тип збуджень, які ми називаємо відокремленим магноном, або магнетним солітоном. Відмінність хвильової функції відокремленого магнона від звичайного полягає в тому, що квадрат її модуля є локалізованим у просторі:

$$\left|C(\xi,t)\right|^2=\frac{\mu}{2}\cdot\frac{1}{ch^2(\mu(\xi-\nu t))}.$$

Тепер щодо енерґії (2.14). Енерґія основного стану E_0 відокремленого магнона є меншою від енерґії основного стану звичайного магнона. Це видно з (2.15). Що стосується ефективної маси m^* (2.16), то вона є більшою від маси звичайного магнона. Усе це дає змогу зробити висновок, що в одновимірних феромагнетних ланцюжках, якщо виконуються умови лінійности спін–фононної взаємодії, енерґетично більш вигідною є наявність відокремлених магнонів. Відокремлений магнон можна інтерпретувати так. Збуджений стан, який відповідає перекиданню спіну, змінює силу взаємодії між атомами, внаслідок чого ґратка деформується. Під час руху збудження (магнона) вздовж ланцюжка разом з ним буде рухатися і деформація ґратки. Магнон разом з деформацією, що його супроводжує, ми назвали відокремленим магноном.

Зауважимо таке: вихід за гармонічне наближення [11] свідчить, що ангармонізм суттєво змінює енерґію відокремлених магнонів, може зробити їх більш стійкими або навпаки.

III. ТОПОЛОГІЧНІ СОЛІТОНИ В ОДНОВИМІРНИХ ФЕРОМАГНЕТНИХ СИСТЕМАХ

У цьому параграфі в межах тієї ж моделі, що і в попередньому, досліджено інший тип солітонів — топологічні. Ці солітони, як і динамічні, описує певний тип нелінійного рівняння для кута повороту спінового моменту.

Будемо опиратися на гамільтоніян (2.1)–(2.3), який запишемо тепер у вигляді

$$H=\sum_n\frac{p_n^2}{2m}+\frac{k}{2}\sum_n(x_{n+1}-x_n)^2-\frac{I_0}{4}\sum_{n,\delta}(S_n^-S_{n+\delta}^++S_n^+S_{n+\delta}^-)-\frac{\tilde{I}}{2}\sum_n S_n^zS_{n+\delta}^z$$
$$-\frac{I_1}{2}\sum_n(x_n-x_{n-1})(S_n^+S_{n-1}^-+S_n^-S_{n-1}^+)-\tilde{I}_1\sum_n(x_n-x_{n-1})S_n^zS_{n-1}^z, \tag{3.1}$$

де $\delta=\pm1$, решта позначень ті ж самі.

Уведемо в розгляд нові оператори спіну згідно з перетвореннями

$$S_n^x = \sigma_n^x, \quad S_n^y = \sigma_n^y \cos\alpha_n + \sigma_n^z \sin\alpha_n, \quad S_n^z = -\sigma_n^y \sin\alpha_n + \sigma_n^z \cos\alpha_n, \tag{3.2}$$

де кут повороту α_n є функцією номера спіну. Власне, визначення функціональної залежности α_n від номера вузла ґратки і є нашим завданням. Рівняння для $\alpha_n \to \alpha(x)$ в континуальному наближенні відшукаємо з умови мінімуму енерґії $H =< \Phi|H|\Phi >$, де $|\Phi >$ — хвильова функція, яку виберемо у вигляді

$$|\Phi >= |\psi >|\varphi(t) > .$$

Тут $|\psi >= \prod_n | \alpha_n >$ — спінова хвильова функція основного стану:

$$\sigma^{\pm}|\alpha_n > = 0, \quad \sigma^z|\alpha_n >= S|\alpha_n >,$$

$$|\varphi(t) > = \prod_n e^{-(U_n(t)P_n - V_n(t)X_n}|0 >$$

Тепер

$$\mathcal{H} = < \Phi|H|\Phi >= -S^2 I_0 \sum_n \sin a_n(\sin a_{n+1} + \sin a_{n-1}) - \tilde{I} S^2 \sum_n \cos a_n(\cos a_{n+1} + \cos a_{n-1}) \tag{3.3}$$

$$- S^2 I_1 \sum_n (U_n - U_{n-1}) \sin\alpha_n \sin\alpha_{n-1} - 2S^2 \tilde{I} \sum_n (U_n - U_{n-1}) \cos\alpha_n \cos\alpha_{n+1} + \sum_n \frac{\nu^2}{2m} + \frac{k}{2} \sum_n (U_{n+1} - U_n)^2.$$

Після простих перетворень з умови мінімуму енерґії ми отримаємо таке рівняння для $\alpha(\xi)$:

$$(1 + \tau_0 \sin^2\alpha)\frac{d^2\alpha}{d\xi^2} + \tau_0 \cos\alpha \sin\alpha \left(\frac{d\alpha}{d\xi}\right)^2 - 2\tau_0 \cos\alpha \sin\alpha - \frac{4g^2\tau_1^2 S^2 I_0}{m\nu_0^2\left(1 - \frac{\nu^2}{\nu_0^2}\right)} \cos\alpha \sin^3\alpha = 0, \tag{3.4}$$

де

$$\tau_0 = \frac{\tilde{I} - \ I_0}{I_0}, \qquad \tau_1 = \frac{\tilde{I}_1 - I_1}{I_1}, \qquad g = \frac{I_1}{I_0}.$$

Під час виведення рівняння (3.4) закладено такі граничні умови:

$$\alpha(\xi) \to 0 \ \text{ для } \quad \xi \to -\infty,$$

$$\alpha(\xi) \to \pi \ \text{ для } \quad \xi \to +\infty.$$

Перш ніж навести розв'язок рівняння (3.4), відшукаємо з (3.4)

$$\frac{d\alpha}{d\xi} = \frac{\sqrt{2\tau_0} \sin\alpha \sqrt{1 - \frac{g^2 I_0 \tau_1^2 S^2}{\tau_0 m\nu_0^2\left(1 - \frac{\nu^2}{\nu_0^2}\right)} \sin^2\alpha}}{\sqrt{1 + \tau_0 \sin^2\alpha}}. \tag{3.5}$$

Вимога дійсности $\frac{d\alpha}{d\xi}$ накладає такі умови: $\tau_0 > 0$ i $\nu^2 < \nu_0^2 - \frac{g^2 I_0 \tau_1^2 S^2}{m}$. Далі, в лінійному наближенні за g розв'язок рівняння (3.4) після інтеґрування (3.5) має вигляд

$$\xi - \xi_0 = \frac{1}{2\sqrt{2\tau_0}} \ln \frac{\sqrt{1 + \tau_0 \sin^2\alpha} - \cos\alpha}{\sqrt{1 + \tau_0 \sin^2\alpha} + \cos\alpha} - \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{\sqrt{\tau_0}\cos\alpha}{\sqrt{1 + \tau_0}} - \frac{g^2 I_0 \tau_1^2 S^2}{4\sqrt{2\tau_0}\tau_0 m\nu_0^2\left(1 - \frac{\nu^2}{\nu_0^2}\right)} \tag{3.6}$$

$$\times \left\{ \sqrt{1 + \tau_0 \sin^2 \alpha} \cos\alpha + \frac{1 + \tau_0}{\sqrt{\tau_0}} \arcsin \frac{\sqrt{\tau_0} \cos\alpha}{\sqrt{1 + \tau_0}} \right\}.$$

Розв'язок (3.6) описує топологічний солітон, або так званий π-кінк.

Уведемо і розрахуємо ще півширину топологічного солітона. Півшириною Δ топологічного солітона будемо вважати лінійні розміри области, симетричної стосовно $\xi_0 (\xi_0 = 0)$, у межах якої зміна кута повороту спінового моменту дорівнює $\frac{\pi}{2}$:

$$\Delta = \Delta_0 + \frac{g^2 I_0 \tau_1^2 S^2}{(2\tau_0)^{\frac{3}{2}} m \nu_0^2 \left(1 - \frac{\nu^2}{\nu_0^2}\right)} \left\{ \frac{\sqrt{2 + \tau_0}}{2} + \frac{1 + \tau_0}{\sqrt{\tau_0}} \arcsin \frac{\sqrt{2\tau_0}}{2\sqrt{1 + \tau_0}} \right\}, \tag{3.7}$$

де Δ_0 — півширина кінка без урахування динаміки ланцюжка.

Отже, на підставі мікроскопічної одновимірної анізотропної гайзенберґівської моделі лінійного ланцюжка отримано нелінійне рівняння для кута повороту спіну, розв'язком якого є топологічний солітон. Далі, як свідчить (3.7), динаміка ланцюжка приводить до збільшення півширини солітона. На закінчення зауважимо, що є обмеження на швидкість хвилі, яка описує динаміку ланцюжка. Вона повинна бути меншою від деякої граничної швидкости, що менша, ніж швидкість звуку.

Ця робота була частково підтримана Міжнародною Соросівською Програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISSEP), ґрант № APU072121.

---

[1] А. М. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны* (Наукова думка, Київ, 1983).

[2] D. I. Pyshkarov, Kh. J. Pushkarov, Phys. Lett. A **61**, 339 (1977).

[3] D. I. Pyshkarov, Kh. J. Pushkarov, Phys. Status Solidi B **81**, 89K (1977).

[4] D. I. Pyshkarov, Kh. J. Pushkarov, J. P. Vlahov, Phys. Status Solidi B **90**, 82K (1978).

[5] D. I. Pyshkarov, Kh. J. Pushkarov, J. P. Vlahov, Phys. Status Solidi B **88**, 65K (1978).

[6] C. E. Cordeiro, Phys. Lett. F **66**, (1978).

[7] Mikeska, J. Phys. C. **11**, (1978).

[8] Lindner, V. K. Fedyanin, Phys. Status Solidi B **89**, 2 (19).

[9] В. П. Яцишин, Теор. мат. физ. **32**, 127 (1977).

[10] В. П. Яцишин, Теор. мат. физ. **42**, 284 (1980).

[11] В. П. Яцишин, Укр. физ. журн. **25**, 1436 (1980).

[12] А. С. Давыдов, *Солитоны в молекулярных системах* (Наукова думка, Київ, 1984).

[13] K. G. Fischer, G. Heber, Phys. Status Solidi B **129**, 645 (1985).

[14] В. П. Яцишин, З. В. Поліщук, Укр. фіз. журн. **40**, 370 (1995).

DYNAMIC AND TOPOLOGIC SOLITONS IN QUASI–ONE–DIMENSIONAL FERROMAGNETIC SYSTEMS

V. Yatsyshyn
Ivan Franko Drohobych State Pedagogical Institute
24 I. Franko Str., UA–293720, Drohobych, Ukraine

A one-dimensional ferromagnetic anisotropic chain with regard for the lattice fluctuations in harmonic approximation is investigated. Anisotropy is caused by exchange interaction anisotropy. Using the quantum approach one-particle wall excitations are considered. It is shown that the wave function of these excitations satisfies the Schrödinger nonlinear equation. The nonlinearity of the latter which is caused by the chain dynamics is possible for anisotropic ferromagnetic systems only. Here lies the importance of anisotropy.

The solution of the Schrödinger nonlinear equation reveals the wave function to be of a localized nature and the fundamental state energy of the corresponding excitations (which we call magnetic solitons) to be lower than the energy of ordinary magnons.

The influence of unharmonicity of lattice fluctuations on the parameters of magnetic solitons is determined.

Together with the dynamic solitons the influence of lattice fluctuations on the parameters of topologic solitons of domain walls type is considered. The domain walls width and the partial constituent of the width caused by the lattice dynamics are determined. It turned out that the wave speed limiting appears if fluctuations are regarded as ordinary waves. The corresponding top wave speed is calculated.