ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 2, № 1 (1998) с. 114–119

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 2, No 1 (1998) p. 114–119

ЕФЕКТИ ФЛЮКТУАЦІЙ ПАРАМЕТРА ВПОРЯДКУВАННЯ В ТЕОРІЇ НАДПРОВІДНОСТИ

А. Свідзинський
Волинський державний університет імені Лесі Українки, кафедра теоретичної фізики, проспект Волі, 13, Луцьк, UA–263000, Україна
(Отримано 16 травня 1996)

Розглянуто вплив флюктуацій параметра впорядкування на термодинамічні характеристики надпровідника у наближенні хаотичних фаз. Показано, що формалізм функціонального інтеґрування дає змогу оцінити поправки від флюктуацій у всіх порядках для моделі з редукованим гамільтоніяном.

Ключові слова: надпровідність, асимптотично точний розв'язок.

PACS number(s): 74.20.-z

Основою для опису ефектів флюктуацій параметра впорядкування в теорії надпровідности є зображення термодинамічних характеристик надпровідника (статистичної суми, середнього струму, кореляційних функцій) у вигляді функціонального інтеґрала [1, 2].

Для великої статистичної суми, яка відповідає гамільтоніяну теорії надпровідности з чотириферміонною взаємодією квазілокального вигляду в конфіґураційному просторі

$$H_{int} = g\int \psi_\uparrow^+(\mathbf{r})\psi_\downarrow^+(\mathbf{r})\psi_\downarrow(\mathbf{r})\psi_\uparrow(\mathbf{r})d\mathbf{r}, \quad g=-|g|,$$

це зображення можна записати символічним відношенням двох функціональних інтеґралів

$$\frac{\mathcal{Z}}{\mathcal{Z}_0} = \frac{\int D\Delta D\overset{*}{\Delta}\exp(-\frac{1}{|g|}\int d\mathbf{r}|\Delta(\mathbf{r},\tau)|^2)\langle T_\tau \exp\{-\int\limits_0^\beta d\tau\int d\mathbf{r}(\psi_\uparrow^+(\mathbf{r},\tau)\psi_\downarrow^+(\mathbf{r},\tau)\Delta(\mathbf{r},\tau)+e.c.)\}\rangle_0}{\int D\Delta D\overset{*}{\Delta}\exp(-\frac{1}{|g|}\int\limits_0^\beta d\tau\int d\mathbf{r}|\Delta(\mathbf{r},\tau)|^2)},$$

де величина

$$\mathcal{Z}_0\langle T_\tau \exp\{-\int\limits_0^\beta d\tau\int d\mathbf{r}(\psi_\uparrow^+(\mathbf{r},\tau)\psi_\downarrow^+(\mathbf{r},\tau)\Delta(\mathbf{r},\tau)+e.c.)\}\rangle_0 \equiv \exp(-\beta\Omega_{\text{Б}}[\Delta,\overset{*}{\Delta}]) = \mathcal{Z}_{\text{Б}}[\Delta,\overset{*}{\Delta}]$$

є великою статистичною сумою системи вільних електронів у полі комплексних джерел $\Delta(\mathbf{r},\tau)$ електронних пар з квазігамільтоніяном

$$\mathcal{H}[\Delta,\overset{*}{\Delta}] = \sum_\sigma\int\psi_\sigma^+(\mathbf{r})\hat{\xi}\psi_\sigma(\mathbf{r})d\mathbf{r} + \int d\mathbf{r}(\psi_\uparrow^+(\mathbf{r})\psi_\downarrow^+(\mathbf{r})\Delta(\mathbf{r},\tau)+\psi_\downarrow(\mathbf{r})\psi_\uparrow(\mathbf{r})\overset{*}{\Delta}(\mathbf{r},\tau)). \tag{1}$$

(Усі позначення див. у книзі автора [2]).

У наближенні середнього поля функціональний інтеґрал обчислюють методом Лапласа, тобто беруть підінтеґральний вираз на "перевальному" значенні $\Delta(\mathbf{r},\tau)$, яке визначається з умови мінімуму функціонала

$$\frac{1}{\beta|g|}\int\limits_0^\beta d\tau\int d\vec{r}|\Delta(\mathbf{r},\tau)|^2 + \Omega_{\text{Б}}[\Delta,\overset{*}{\Delta}] \equiv \Omega[\Delta,\overset{*}{\Delta}]. \tag{2}$$

Флюктуаційні ефекти зумовлені відхиленням Δ від екстремального значення: $\Delta(\mathbf{r},\tau)=\Delta_0+\eta(\mathbf{r},\tau)$. Розклад (2) за η дає

$$\Omega[\Delta,\overset{*}{\Delta}] = \Omega[\Delta_0,\overset{*}{\Delta}_0] + \delta^2\Omega[\eta\,\overset{*}{\eta}] + \cdots.$$

Внесок флюктуацій у квадратичному наближенні за η описує формула

$$\delta^2\Omega[\eta,\overset{*}{\eta}] = \frac{1}{\beta|g|}\int\limits_0^\beta d\tau\int d\mathbf{r}|\eta(\mathbf{r},\tau)|^2 + \frac{1}{2}\int\limits_0^\beta d\tau\int\limits_0^\beta d\tau'\int d\mathbf{r}\int d\mathbf{r}'\left\{\frac{\delta^2\Omega_\text{Б}}{\delta\Delta(\mathbf{r},\tau)\delta\Delta(\mathbf{r}',\tau')}|_{\Delta=\Delta_0}\eta(\mathbf{r},\tau)\eta(\mathbf{r}',\tau')\right.$$

$$\left.+\ 2\frac{\delta^2\Omega_\text{Б}}{\delta\Delta(\mathbf{r},\tau)\overset{*}{\Delta}(\mathbf{r}',\tau')}|_{\Delta=\Delta_0}\eta(\mathbf{r},\tau)\overset{*}{\eta}(\mathbf{r}',\tau) + \frac{\delta^2\Omega_\text{Б}}{\delta\overset{*}{\Delta}(\mathbf{r},\tau)\delta\overset{*}{\Delta}(\mathbf{r}',\tau')}|_{\Delta=\Delta_0}\overset{*}{\eta}(\mathbf{r},\tau)\overset{*}{\eta}(\mathbf{r},'\tau')\right\}. \tag{3}$$

Коефіцієнти цієї квадратичної форми легко обчислити на підставі узагальненого розкладу Віка, який у випадку усереднення за ансамблем Гіббса з гамільтоніяном (1) є точним.

Результат має вигляд

$$\delta^2\Omega[\eta,\eta^*] = \frac{1}{\beta|g|}\int\limits_0^\beta d\tau\int d\mathbf{r}|\eta(\mathbf{r},\tau)|^2 - \frac{1}{2\beta}\int\limits_0^\beta d\tau\int\limits_0^\beta d\tau'\int d\mathbf{r}\int d\mathbf{r}'\{F(\mathbf{r},\mathbf{r}';\tau,\tau')F(\mathbf{r}',\mathbf{r};\tau',\tau)\eta(\mathbf{r},\tau)\eta(\mathbf{r}',\tau')$$

$$-\ 2\tilde{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}';\tau,\tau')G(\mathbf{r}',\mathbf{r};\tau',\tau)\eta(\mathbf{r},\tau)\eta(\mathbf{r}',\tau') + \tilde{F}(\mathbf{r},\mathbf{r}';\tau,\tau')\tilde{F}(\mathbf{r}',\mathbf{r};\tau,\tau')\overset{*}{\eta}(\mathbf{r},\tau)\overset{*}{\eta}(\mathbf{r}',\tau')\}. \tag{4}$$

Для діягоналізації цієї квадратичної форми виконаємо спочатку перетворення Фур'є

$$G(\mathbf{r},\tau) = T\sum_{\omega_n}\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{p}}G_{\omega_n}(\mathbf{p})e^{-i\omega_n\tau+i\mathbf{pr}},$$

$$F(\mathbf{r},\tau) = T\sum_{\omega_n}\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{p}}F_{\omega_n}(\mathbf{p})e^{-i\omega_n\tau+i\mathbf{pr}},$$

$$\eta(\mathbf{r},\tau) = T\sum_{\Omega_n}\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{q}}\eta_{\Omega_n}(\mathbf{q})e^{-i\Omega_n\tau+i\mathbf{qr}},$$

де $\Omega_n = 2\pi Tn$; n — ціле, оскільки $\eta(\mathbf{r},\tau)$ як функція τ визначена на інтервалі $(0,\beta)$; ω_n — ферміївська (непарна) мацубарівська частота.

Оскільки ми будемо розглядати флюктуації над просторово–однорідним розв'язком теорії середнього поля, то функції Ґріна будемо задавати звичайними виразами

$$G_{\omega_n}(\mathbf{p}) = -\frac{i\omega_n+\xi_p}{\omega_n^2+\xi_p^2+|\Delta|^2}, \tag{5}$$

$$F_{\omega_n}(\mathbf{p}) = \frac{\overset{*}{\Delta}}{\omega_n^2+\xi_p^2+|\Delta|^2}.$$

$$\tilde{G}_{\omega_n}(\mathbf{p}) = -G_{-\omega_n}(\mathbf{p}), \tag{6}$$

$$\tilde{F}_{\omega_n}(\mathbf{p}) = F^*_{\omega_n}(\mathbf{p}).$$

Виконавши перетворення Фур'є і врахувавши співвідношення (6), для квадратичної форми (4) отримаємо вираз

$$\delta^2\Omega[\eta,\overset{*}{\eta}] = \frac{T^2}{2}\sum_{\Omega_n}\sum_{\mathbf{q}}\{2\Phi_{\Omega_n}(\mathbf{q})|\eta_{\Omega_n}(\mathbf{q})|^2 \tag{7}$$

$$+\Xi_{\Omega_n}(\mathbf{q})(\eta_{\Omega_n}(\mathbf{q})\eta_{-\Omega_n}(-\mathbf{q})+\overset{*}{\eta}_{-\Omega_n}(-\mathbf{q})\overset{*}{\eta}_{\Omega_n}(\mathbf{q}))\},$$

де

$$\Phi_{\Omega_n}(\mathbf{q}) = \frac{1}{|g|} \tag{8}$$

$$-\ T\sum_{\omega_{n'}}\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{p}}G_{\omega_{n'}}(\mathbf{p})G_{\Omega_n-\omega_{n'}}(\mathbf{p}-\mathbf{q}),$$

$$\Xi_{\Omega_n}(\mathbf{q}) = T\sum_{\omega_{n'}}\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{p}}F_{\omega_{n'}}(\mathbf{p})F_{\omega_{n'}+\Omega_n}(\mathbf{p}+\mathbf{q}). \tag{9}$$

Звертаємо увагу, що фаза параметра порядку дорівнює нулеві, тому $\tilde{F} = F$.

Одержаний розклад функціонала $\Omega[\eta,\overset{*}{\eta}]$ за флюктуаціями в квадратичному наближенні зводиться вище від критичної температури T_c лише до члена

$$T^2\sum_{\Omega_n}\sum_{\mathbf{q}}\Phi_{\Omega_n}(\mathbf{q})|\eta_{\Omega_n}(\mathbf{q})|^2,$$

причому G-функція береться для нормального стану: $G_{\omega_{n'}} = (i\omega_{n'}-\xi_p)^{-1}$.

Функціональний інтеґрал від ґаусівського функціонала береться елементарно, у результаті для флюктуаційного внеску в термодинамічний потенціял отримаємо внесок

$$\Delta\Omega_{\text{фл}} = T\ln\prod_{\Omega_n}\prod_{\mathbf{q}}|g|\Phi_{\Omega_n}(\mathbf{q}) = T\sum_{\Omega_n}\sum_{\mathbf{q}}\ln\{1-|g|T\sum_{\omega_{n'}}\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{p}}G_{\omega_{n'}}(\mathbf{p})G_{\Omega_n-\omega_{n'}}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\}, \tag{10}$$

який нижче від критичної температури T_c виявляє нестійкість Купера у випадку вибору тривіяльного розв'язку для щілини через втрату позитивної визначености арґументу логарифма. Для $T > T_c$ можна розкласти цей арґумент в околі особливости. Отримуємо вираз

$$|g|\Phi_{\Omega_n}(\mathbf{q}) = N(0)|g|\left(\frac{T-T_c}{T_c}+\alpha q^2+\frac{\pi}{8T_c}|\Omega_n|\right), \tag{11}$$

$$\alpha = \frac{7\zeta(3)v_0^2}{48\pi^2T_c^2}.$$

З урахуванням дискретности Ω_n можна оцінити внесок $\Delta\Omega_{\text{фл}}$ так:

$$\Delta\Omega_{\text{фл}} \overset{as}{=} VT_c\int\frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\ln\left\{|g|N(0)\left(\frac{T-T_c}{T_c}+\alpha q^2\right)\right\}.$$

Звідси для флюктуаційного члена в теплоємності отримуємо

$$\frac{\Delta C_{\text{фл}}}{V} = \int\frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3}\left(\frac{T-T_c}{T_c}+\alpha q^2\right)^{-2} = \frac{1}{8\pi\alpha^{3/2}}\sqrt{\frac{T_c}{T-T_c}},$$

що стосовно до теплоємности нормального металу при T_c дає

$$\frac{\Delta C_{\text{фл}}}{C_n} \cong 12,6\sqrt{\frac{T_c}{T-T_c}}\left(\frac{T_c}{E_F}\right)^2. \tag{12}$$

Поправка для кореляційної функції від флюктуацій вище від T_c

$$\Delta\mathcal{G} = \frac{1}{g^2}\overline{\eta(\mathbf{r},\tau)\overset{*}{\eta}(\mathbf{r}',\tau')} = T\sum_{\Omega_n}\int\frac{d\mathbf{q}}{2\pi}\frac{e^{-i\Omega_n(\tau-\tau')+i\mathbf{q}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{g^2\Phi_{\Omega_n}(q)}. \tag{13}$$

Тут риска над виразом $\eta\ \overset{*}{\eta}$ означає функціональне усереднення, яке й було виконане. Поблизу T_c з урахуванням внеску від околу точки особливости як основного отримуємо

$$\Delta\mathcal{G} \overset{as}{=} \frac{T_c}{4\pi\alpha g^2N(0)}\frac{1}{r}e^{-r/r_c}, \quad r_c = \sqrt{\frac{\alpha T_c}{T-T_c}}. \tag{14}$$

Нижче від T_c повинні розглядати повну квадратичну форму (7), яку ще треба діягоналізувати повністю, причому унітарним перетворенням. Для цього треба переконатися у властивостях симетрії $\Phi_{-\Omega_n}(-\mathbf{q}) = \Phi_{\Omega_n}(\mathbf{q})$ і так само для $\Xi_{\Omega_n}(\mathbf{q})$. Щодо останньої функції це видно безпосередньо, функція ж $\Phi_{\Omega_n}(\mathbf{q})$ має цю властивість лише у наближенні, у якому нехтують поправками близько T_c/E_F. Ця процедура еквівалентна згладжуванню по відстанях близько атомної довжини порівняно з основним масштабом близько довжини когерентности і в цьому випадку виконується просто.

Для обох коефіцієнтів у зазначеному наближенні отримуємо

$$\Phi_{\Omega_n}(\mathbf{q}) = \frac{1}{|g|}+\frac{1}{2}N(0)\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi\int\limits_{-1}^{1}dx\left\{(1-f_+-f_-)(u_+^2u_-^2-v_+^2v_-^2)\frac{\varepsilon_++\varepsilon_-}{\Omega_n^2+(\varepsilon_++\varepsilon_-)^2}\right.$$
$$\left.+\ (f_+-f_-)(u_+^2v_-^2+u_-^2v_+^2)\frac{\varepsilon_+-\varepsilon_-}{\Omega_n^2+(\varepsilon_+-\varepsilon_-)^2}\right\}, \tag{15}$$

$$\Xi_{\Omega_n}(\mathbf{q}) = N(0)\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi \int\limits_{-1}^{1} dx u_+ u_- v_+ v_- \left\{(1-f_+-f_-)\frac{\varepsilon_+ + \varepsilon_-}{\Omega_n^2 + (\varepsilon_+ + \varepsilon_-)^2} + +(f_+ - f_-)\frac{\varepsilon_+ - \varepsilon_-}{\Omega_n^2 + (\varepsilon_+ - \varepsilon_-)^2}\right\}. \quad (16)$$

Тут величини з індексом $\pm$ є функціями енерґетичної змінної ξ_p, у якій $\mathbf{p}$ зміщено на $\pm\mathbf{q}/2$; $f = (\exp(\varepsilon_p/T)+1)^{-1}$ — функція розподілу боголюбівських квазічастинок із законом дисперсії $\varepsilon = \sqrt{\xi^2+\Delta^2}$; u, v — коефіцієнти канонічного перетворення Боголюбова. Згадані вище властивості симетрії виразів (15), (16) видно безпосередньо.

Тепер виконаємо діягоналізацію форми (7) підставлянням

$$\eta_{\Omega_n}(\mathbf{q}) = Q_{\Omega_n}(\mathbf{q}) - i\mathcal{P}_{\Omega_n}(\mathbf{q}),$$

$$\overset{*}{\eta}_{-\Omega_n}(-\mathbf{q}) = \overset{*}{Q}_{-\Omega_n}(-\mathbf{q}) + i\,\overset{*}{\mathcal{P}}_{-\Omega_n}(-\mathbf{q}) = Q_{\Omega_n}(\mathbf{q}) + i\mathcal{P}_{\Omega_n}(\mathbf{q}).$$

Це дає змогу записати такий функціональний інтеґрал, що визначає флюктуаційний внесок до статистичної суми надпровідника:

$$\Delta Z_{\text{фл}} = \frac{\int \mathcal{D}\overset{*}{\mathcal{P}}\,\mathcal{D}\mathcal{P}\int\mathcal{D}\overset{*}{Q}\,\mathcal{D}Q\exp\{-T\sum\limits_{\Omega_n,\mathbf{q}}(\Phi_{\Omega_n}(\mathbf{q})+\Xi_{\Omega_n}(\mathbf{q}))|Q_{\Omega_n}(\mathbf{q})|^2 + (\Phi_{\Omega_n}(\mathbf{q})-\Xi_{\Omega_n}(\mathbf{q}))|\mathcal{P}_{\Omega_n}(\mathbf{q})|^2\}}{\int \mathcal{D}\overset{*}{\mathcal{P}}\,\mathcal{D}\mathcal{P}\int\mathcal{D}\overset{*}{Q}\,\mathcal{D}Q\exp\left\{-\frac{1}{|g|}T\sum\limits_{\Omega_n,\mathbf{q}}(|Q_{\Omega_n}(\mathbf{q})|^2 + |\mathcal{P}_{\Omega_n}(\mathbf{q})|^2)\right\}}.$$

Після інтеґрування отримаємо

$$\Delta Z_{\text{фл}} = {\prod_{\Omega_n,\mathbf{q}}}' (\mathcal{A}_{\Omega_n}(\mathbf{q}) + B_{\Omega_n}(\mathbf{q}))^{-1}(\mathcal{A}_{\Omega_n}(\mathbf{q}) - B_{\Omega_n}(\mathbf{q}))^{-1},$$

$$\mathcal{A} = |g|\Phi, \quad B = |g|\Xi,$$

де штрих біля знака добутку означає, що перемножується половинний набір змінних Ω_n та $\mathbf{q}$, обмежити які необхідно, оскільки фактично подвоєння кратности інтеґралів немає. Для $\Delta\Omega_{\text{фл}}$ отримаємо

$$\Delta\Omega_{\text{фл}} = \frac{T}{2}\sum_{\Omega_n}\sum_{\mathbf{q}}\ln(\mathcal{A}^2_{\Omega_n}(\mathbf{q}) - B^2_{\Omega_n}(\mathbf{q})), \quad (17)$$

де підсумовування вже знову ведеться за повним набором, натомість виникла 1/2. Очевидно,

$$\overline{\eta_{\Omega_{n_1}}(\mathbf{q}_1)\,\overset{*}{\eta}_{\Omega_{n_2}}(\mathbf{q}_2)} = \overline{Q_{\Omega_{n_1}}(\mathbf{q}_1)\,\overset{*}{Q}_{\Omega_{n_2}}(\mathbf{q}_2)} + \overline{\mathcal{P}_{\Omega_{n_1}}(\mathbf{q}_1)\,\overset{*}{\mathcal{P}}_{\Omega_{n_2}}(\mathbf{q}_2)}$$

$$= \frac{|g|}{T}\delta_{\Omega_{n_1},\Omega_{n_2}}\frac{(2\pi)^3}{V}\delta(\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)\left\{\frac{1}{\mathcal{A}_{\Omega_{n_1}}(\mathbf{q}_1) + B_{\Omega_{n_1}}(\mathbf{q}_1)} + \frac{1}{\mathcal{A}_{\Omega_{n_1}}(\mathbf{q}_1) - B_{\Omega_{n_1}}(\mathbf{q}_1)}\right\}.$$

Отже, фур'є–зображення флюктуаційного доданка до парної кореляційної функції має вигляд

$$\delta_{\text{фл}}\mathcal{G}_{\Omega_n}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2|g|}\left(\frac{1}{\mathcal{A}_{\Omega_n}(\mathbf{q}) + B_{\Omega_n}(\mathbf{q})} + \frac{1}{\mathcal{A}_{\Omega_n}(\mathbf{q}) - B_{\Omega_n}(\mathbf{q})}\right). \quad (18)$$

Продовження виразу (18) на реальні частоти $E = i\Omega_n$ дає змогу визначити спектр колективних коливань, який має дві гілки. Одна, що відповідає особливості другого доданка в (18), являє собою квазіакустичний спектр Боголюбова. При малих $\mathbf{q}$ маємо $E = v_0 q/\sqrt{3}$; гілка, що відповідає особливості першого доданка, починається з енергії 2Δ і пов'язана з розривом куперівської пари.

Якщо цікавитися поведінкою (18) поблизу критичної температури, то можна прийняти $\Omega_n = 0$, оскільки Ω_n дискретне, а знаменники матимуть при $\Omega_n = 0$ особливість поблизу $T = T_c$ і $q \sim 0$.

Отже, розкладемо величини $\mathcal{A}_0(q)$ та $B_0(q)$ в околі $T = T_c$ і $q \sim 0$ при $T < T_c$. Величина $B_0(q)$ та додатковий член до $\mathcal{A}_0(q)$ виникають завдяки $\Delta \neq 0$, отже, самі по собі пропорційні $\dfrac{T_c - T}{T_c}$, і враховувати при такому множнику члени $\sim q^2$ не треба. З огляду на це отримуємо

$$\mathcal{A}_0(q) \overset{as}{=} \rho\left(\frac{T_c - T}{T_c} + \alpha q^2\right), \quad T < T_c, \quad \rho = |g|N(0);$$

$$B_0(q) \overset{as}{=} \rho\frac{T_c - T}{T_c}.$$

Як бачимо, вище і нижче від T_c коефіцієнт $\mathcal{A}_0(q)$ в околі $T = T_c$ задається виразом

$$\mathcal{A}_0(q) \overset{as}{=} \rho\left(\left|\frac{T_c - T}{T_c}\right| + \alpha q^2\right), \tag{19}$$

тобто зберігає позитивність і вище, і нижче від T_c. Для (18) отримаємо нижче від T_c такий асимптотичний вираз:

$$\delta_{\text{фл}}\mathcal{G}(q,0) = \frac{1}{2|g|\rho}\left(\frac{1}{2(1 - T/T_c) + \alpha q^2} + \frac{1}{\alpha q^2}\right),$$
$$T < T_c. \tag{20}$$

Нижче від T_c виникає особливість типу $1/q^2$, що узгоджується з точною теоремою Боголюбова, і, отже, нескінченний радіус кореляцій у конфіґ ураційному просторі.

Найяскравіший експериментально спостережуваний ефект, пов'язаний з флюктуаціями параметра порядку в надпровідниках, — парапровідність, тобто флюктуаційний доданок до провідности σ вище від T_c квазідвовимірної надпровідної плівки (товщина $d << \xi_0$); температурна залежність $\sigma_{\text{фл}} = \dfrac{e^2}{16d}\,\dfrac{T_c}{T - T_c}$. Розрахунку тут не розглядаємо, елементарна теорія і огляд експерименту описані у [3].

На завершення зробимо зауваження щодо моделі з редукованим гамільтоніяном у теорії надпровідности. У ній використовується чотириферміонний гамільтоніян прямої взаємодії між електронами, у якому після переходу до операторів породження і знищення електронів з певним імпульсом залишаються лише члени взаємодії з сумарним імпульсом пари, що дорівнює нулеві. Отже, редукований гамільтоніян має вигляд

$$\mathcal{H}_{red} = \sum_{\mathbf{p}} \xi_p (a^+_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} + b^+_{\mathbf{b}} b_{\mathbf{p}})$$
$$- \frac{|g|}{V}\sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} \lambda(p)\lambda(p') a^+_{\mathbf{p}} b^+_{-\mathbf{p}} b_{-\mathbf{p}'} a_{\mathbf{p}'},$$

де $a_{\mathbf{p}} = a_{\mathbf{p}\uparrow}$; $b_{\mathbf{p}} = a_{\mathbf{p}\downarrow}$; $\lambda(p)$ — функція, яка поза шаром поблизу фермі–сфери $\xi_p = 0$ товщиною $2\omega_{\mathcal{D}}$ перетворюється в нуль, а всередині цього шару дорівнює одиниці. Гамільтоніян, отже, не містить додаткової суми за $\mathbf{q}$ з операторами типу $b_{\mathbf{q}-\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}$, і його можна зобразити у вигляді

$$\mathcal{H}_{red} = \sum_{\mathbf{p}} \xi_p (a^+_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} + b^+_{\mathbf{b}} b_{\mathbf{p}}) - V|g|Q^+Q,$$

де

$$Q = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{p}} \lambda(p) b_{-\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}.$$

Оператори Q та Q^+ комутують з алґеброю операторів породження і знищення в асимптотичній границі $V \to \infty$, тому наближаються до c-чисел. Приймаючи

$$\mathcal{H}_{red} = \mathcal{H}_{ap} + H',$$
$$\mathcal{H}_{ap} = V|g||\sigma|^2 + \sum_{\mathbf{p}} \xi_p (a^+_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} + b^+_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}})$$
$$-|g|\sum_{\mathbf{p}} \lambda(p)(\sigma^* b_{-\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} + \sigma a^+_{\mathbf{p}} b^+_{-\mathbf{p}}),$$
$$H' = -V|g|(Q^+ - \sigma^*)(Q - \sigma),$$

можна передбачати, що при належному підборі досі довільної комплексної величини σ доданок H' стане неефективним у термодинамічній границі, тоді як задача з апроксимуючим гамільтоніяном $\mathcal{H}_{ap}$ розв'язується точно за допомогою боголюбівського канонічного перетворення. Однак точний доказ цієї теореми виявився нелегким, незважаючи на зрозумілість евристичної ідеї [3, 4].

Метод функціонального інтеґрування у формі, наведеній в [1], дає змогу вирішити проблему цілком просто. Річ у тому, що для редукованого гамільтоніяна статистична сума має представлення

$$\mathcal{Z}_{red} = Z_0 \frac{\int \mathcal{D}\Delta(\tau)\mathcal{D}\overset{*}{\Delta}(\tau)\exp\left(-\frac{V}{|g|}\int\limits_0^\beta d\tau|\Delta(\tau)|^2 - \beta\Omega_{ap}[\Delta(\tau),\overset{*}{\Delta}(\tau)]\right)}{\int \mathcal{D}\Delta(\tau)\mathcal{D}\overset{*}{\Delta}(\tau)\exp\left(-\frac{V}{|g|}\int\limits_0^\beta d\tau|\Delta(\tau)|^2\right)}.$$

Тут інтеґрування виконується за простором функцій, залежних лише від τ і не залежних від радіус–вектора (або після перетворення Фур'є — від імпульсу $\mathbf{q}$). Тому, хоча в наближенні середнього поля одержуємо стандартний результат для статистичної суми надпровідника, флюктуації параметра впорядкування не дають внеску, оскільки при $V \to \infty$ виявляються нескінченно малими. Наприклад, у квадратичному наближенні отримуємо

$$\Delta\Omega_{\text{фл}} = \frac{1}{2}T\sum_{\Omega_n}\ln(\mathcal{A}^2_{\Omega_n} - B^2_{\Omega_n}),$$

тобто величину, яка, оскільки нема суми за $\mathbf{q}$ (порівняймо з (17)), не містить об'єму, а тому поряд з пропорційним до об'єму внеском від наближення середнього поля дає асимптотично малий внесок. Це ж стосується всіх наступних членів розкладу термодинамічного потенціялу за флюктуаціями. Очевидно, що редукований гамільтоніян не описує ніяких колективних коливань, не задовольняє теорему про особливість типу $1/q^2$.

[1] А. Свидзинский, Теор. мат. физ. **9**, 273 (1971).

[2] А. Свидзинский, *Пространственно–неоднородные задачи теории сверхпроводимости* (Наука, Москва, 1982).

[3] М. Тинкхам, *Введение в сверхпроводимость* (Атомиздат, Москва, 1980).

[4] N. Bogolubov, Physica **26S**, 1 (1960); Н. Н. Боголюбов, *Избранные труды, т. 3* (Наукова думка, Київ, 1971).

[5] Н. Н. Боголюбов (мл.), *Метод исследования модельных гамильтонианов* (Наука, Москва, 1974).

ORDER PARAMETER FLUCTUATIONS IN THE THEORY OF SUPERCONDUCTIVITY

A. Svidzinsky

Lesya Ukrainka Volyn State University, Chair for Theoretical Physics

13 Voli Avenue, Lutsk, UA–263000, Ukraine

The influence of the order parameter fluctuations on the superconductor thermodynamic characteristics is studied in the random phase approximation. It is shown that the functional integration formalism enables one to estimate in all orders the fluctuation induced corrections for the model with a reduced basis.