ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 2, № 1 (1998) с. 23–29

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 2, No 1 (1998) p. 23–29

ЦИКЛІЧНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ СТАТИСТИЧНОЇ СУМИ І ЗОБРАЖЕННЯ ЗМІЩЕНЬ У ТЕОРІЇ ФЕРМІ–СИСТЕМ

М. Ваврух[1], Я. Куштай[2], В. Солов'ян[3]
[1] *Львівський державний університет імені Івана Франка, кафедра астрофізики, вул. Кирила і Мефодія, 8, Львів, UA–290005, Україна,*
[2] *Львівський економічний бізнес–коледж, вул. Менцинського, 8, Львів, UA–290000, Україна,*
[3] *Інститут фізики конденсованих систем НАН України, вул. Свєнціцького, 1, Львів, UA–290011, Україна*
(Отримано 24 лютого 1997, в остаточному вигляді — 20 червня 1997)

Доведено, що зображення зміщень у випадку фермі-систем еквівалентне деякому циклічному перетворенню статистичної суми і відповідає перенормованій теорії збурень, яка ґрунтується на врахуванні кореляційних ефектів, зокрема ефектів локального поля. Наведено результати розрахунку енерґії основного стану моделі електронної рідини в області параметра неідеальности $10^{-2} \leq r_s \leq 10$ у парамагнетній фазі.

Ключові слова: зображення зміщень, циклічне перетворення, статистичний оператор, локальне поле, енерґія основного стану.

PACS number(s): 05.30.Fk.

I. ВСТУП

Дальша розробка методу дослідження сильно неідеальних фермі-систем, запропонованого в працях авторів [1, 2], є метою цієї публікації. Тут показано, що зображення зміщень не є якимсь специфічним прийомом, а належить до певного класу перетворень статистичної суми фермі-систем, а саме циклічних перетворень, добре відомих у статистичній фізиці. Як відомо, такі перетворення є основою методів перенормування у теорії збурень. У цій роботі доведено, що перетворення зміщень (або циклічне перетворення) дає змогу сформулювати перенормовану термодинамічну теорію збурень, застосовну в широкій області параметра неідеальности, оскільки в ній природним чином враховуються як ефекти екранування, так і ефекти локального поля.

Нижче використаємо ті самі позначення, що й у роботі [2], а також поклики на відповідні формули цієї роботи.

II. ЦИКЛІЧНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ СТАТИСТИЧНОЇ СУМИ

Як і в роботі [2], розглянемо статистичну суму у великому канонічному ансамблі

$$Z(\mu) = Sp\{\exp[-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})]\} \tag{2.1}$$

фермі-системи, якій відповідає гамільтоніян загального виду

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}, \tag{2.2}$$

де $\hat{H}_0$ — оператор кінетичної енерґії, а $\hat{V}$ — локальної взаємодії між частинками. У формулі (2.1) використано позначення: $\hat{N}$ — оператор числа частинок, μ — змінна хемічного потенціялу, β — обернена температура. Використаємо ермітовий оператор $\hat{W}$, припускаючи, що він комутує з операторами $\hat{N}$ і $\hat{V}$, і виконаємо циклічне перетворення статистичної суми

$$\begin{aligned} Z(\mu) &= Sp\{\exp[-\hat{W}]\exp[-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})]\exp\hat{W}\} \\ &= Sp\{\exp[-\beta(\hat{H}_0 - \mu\hat{N} + \hat{K}_w + \hat{V} + \hat{L}_w)]\}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

де

$$\hat{K}_w = [\hat{H}_0, \hat{W}]_-, \quad \hat{L}_w = \frac{1}{2}[[\hat{H}_0, \hat{W}]_-, \hat{W}]_-. \tag{2.4}$$

Невідомий оператор $\hat{W}$ виберемо таким чином, щоб виконувалась умова

$$\begin{aligned} &[(\hat{V} + \hat{L}_w), \hat{N}]_- = [(\hat{V} + \hat{L}_w), \hat{H}_0]_- \\ &= [(\hat{V} + \hat{L}_w), \hat{K}_w]_- = 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

При такому виборі $\hat{W}$ для статистичної суми одержуємо зображення

$$\begin{aligned} Z(\mu) = \mathrm{Sp}\{&\exp[-\beta(\hat{V} + \hat{L}_w)] \\ &\times \exp[-\beta(\hat{H}_0 - \mu\hat{N} + \hat{K}_w)]\}\ , \end{aligned} \tag{2.6}$$

яке за своєю формою нагадує зображення зміщень [2].

У випадку моделі електронної рідини

$$\hat{H}_0 = \sum_{\mathbf{k},s} \varepsilon_k \; a^+_{\mathbf{k},s} \; a_{\mathbf{k},s}, \tag{2.7}$$

$$\hat{V} = (2V)^{-1} \sum_{\mathbf{q},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} V_q \sum_{s_1,s_2} a^+_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q},s_1} \; a^+_{\mathbf{k}_2-\mathbf{q},s_2} \; a_{\mathbf{k}_2,s_2} \; a_{\mathbf{k}_1,s_1},$$

де $\varepsilon_k = \hbar^2 k^2/2m$, $V_q = 4\pi e^2 q^{-2}$, V — об'єм системи, s — спінові змінні, $a_{\mathbf{k},s}$ — оператори вторинного квантування на базі плоских хвиль. Умову (2.5) задовольняє оператор у формі суми ефективних локальних багаточастинкових взаємодій

$$\hat{W} = \sum_{n\geq 2} \hat{W}_n, \tag{2.8}$$

$$\hat{W}_n = (n!)^{-1} V^{1-n} \sum_{\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_n} \nu_n(\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_n)\cdot\delta_{\mathbf{q}_1+\cdots+\mathbf{q}_n,0} \; \hat{I}_n(\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_n) \;,$$

$$\hat{I}_n(\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_n) = \sum_{\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n} \sum_{s_1,\ldots,s_n} a^+_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q}_1,s_1} \ldots \; a^+_{\mathbf{k}_n+\mathbf{q}_n,s_n} \; a_{\mathbf{k}_n,s_n} \ldots \; a_{\mathbf{k}_1,s_1} \;.$$

Виберемо функції $\nu_n(\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_n)$ таким чином, щоб вони задовольняли систему інтеґральних рівнянь (2.3) роботи [2] в границі $\beta\to\infty$, тобто:

$$V_n(\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_n) - 2N(\mu)V^{-1}\nu_2^2(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1)\varepsilon_{q_1} \; \delta_{n,2} \tag{2.9}$$

$$-(1-\delta_{n,2})\nu_n(\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_n)\Phi_n(\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_n) - \sum_{m\geq 2}\Psi_n^{(m)}(\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_n) = 0.$$

При цьому $V_2(\mathbf{q},-\mathbf{q}) \equiv V_q$, означення функцій $\Phi_n(...)$ та функціоналів $\Psi_n(...)$ наведено у (2.4) роботи [2], а $N(\mu) = \langle\hat{N}\rangle$ — статистичне середнє оператора числа частинок.

Беручи до уваги явний вигляд комутатора $\hat{L}_w$, знаходимо, що оператор

$$-\beta[\hat{V}+\hat{L}_w] = \beta\hat{N}^2V^{-1}\nu_0, \tag{2.10}$$

$$\nu_0 = V^{-1}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\epsilon_{\mathbf{q}}\nu_2^2(\mathbf{q},-\mathbf{q})$$

дійсно збігається із граничним значенням оператора зміщень $\hat{U}$ при $\beta\to\infty$.

Модельну систему, яка описується статистичним оператором

$$\hat{P}_B = \exp\{\beta\hat{N}^2V^{-1}\nu_0 - \beta[\hat{H}_0-\mu\hat{N}]\} \;, \tag{2.11}$$

використаємо як базисну при розрахунку $Z(\mu)$. Вона така ж зручна, як і модель ідеальних ферміонів, а багаточастинкові кореляційні функції цих двох моделей збігаються. Водночас модель (2.11) певною мірою враховує взаємодію між частинками. Використовуючи зображення взаємодії, маємо:

$$Z(\mu) = Z_B(\mu)\langle\hat{S}\rangle_{\text{Б}} \;, \tag{2.12}$$

$$\hat{S} = T\;\exp\{-\int_0^\beta d\beta' \; e^{\beta'(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}\hat{K}_w \; e^{-\beta'(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}\} \;,$$

Тут

$$Z_B(\mu) = \mathrm{Sp}\hat{P}_{\text{Б}} = \exp(-\beta\Omega_{\text{Б}}(\mu)) \tag{2.13}$$

— статистична сума базисної системи, а $\Omega_{\text{Б}}(\mu)$ — її термодинамічний потенціял; символ $\langle\ldots\rangle_{\text{Б}}$ означає статистичне середнє за станами базисної системи. Асимптотично точний вираз для $\Omega_B(\mu)$ легко отримати за допомогою самоузгодженого наближення, скориставшись тотожністю

$$\hat{N}^2 = 2\hat{N}S_1 - S_1^2 + [\hat{N}-S_1]^2 \;. \tag{2.14}$$

Нехтуючи останнім членом у правій частині (2.14), знаходимо, що

$$\Omega_B(\mu) = \Omega_0(\mu^*) + V^{-1}S_1^2\nu_0, \tag{2.15}$$

$$\mu^* = \mu + 2\nu_0 S_1 V^{-1},$$

де $\Omega_0(\mu)$ — термодинамічний потенціял ідеальної системи (без взаємодії). Оскільки $S_1 = -\frac{\partial}{\partial\mu}\Omega_0(\mu)$, то умова

$$N = -\frac{\partial}{\partial\mu}\Omega_B(\mu) \tag{2.16}$$

зводиться до рівняння

$$N = -\frac{\partial}{\partial\mu^*}\Omega_0(\mu^*), \tag{2.17}$$

з якого випливає, що $\mu^* \equiv \mu_{id}\Big(\beta, \frac{N}{V}\Big)$, де μ_{id} — хемпотенціял ідеальної системи. Таким чином, хемпотенціял базисної системи (2.11) дорівнює

$$\mu_Б = \mu_{id}\Big(\beta, \frac{N}{V}\Big) - 2\frac{N}{V}\nu_0, \tag{2.18}$$

а її вільна енерґія визначається виразом

$$F_Б = \Omega_Б(\mu_Б) + N\mu_Б = F_{id} - \frac{N^2}{V}\nu_0, \tag{2.19}$$

де F_{id} — вільна енерґія системи ферміонів без взаємодії.

Отже, циклічне перетворення з оператором (2.8) статистичної суми еквівалентне зображенню зміщень при абсолютному нулі температури. Як показано в [2], наближення (2.19) обмежує знизу енерґію основного стану моделі електронної рідини і є асимптотично точним у межах низьких густин ($r_s \gg 1$). Ми покажемо тут, що наближене врахування середнього $\langle\hat{S}\rangle_Б$ у (2.12), за теорією збурень, приводить до результатів, справедливих в області високих та проміжних густин. Завдяки виділенню складової $-N^2V^{-1}\nu_0$ у вільній енерґії, ми маємо справу з перенормованою теорією збурень при розрахунку $\langle\hat{S}\rangle_Б$. Така теорія збурень відрізняється від звичайної [5] як топологією діяграм, так і наявністю ефективного потенціялу взаємодії.

III. ПЕРЕНОРМОВАНА ТЕОРІЯ ЗБУРЕНЬ

Як видно з (2.12), S-матриця побудована на комутаторі

$$[\hat{H}_0, \hat{W}]_- = \frac{h^2}{m}\sum_{n\geq 2}(n!)^{-1}V^{1-n}\sum_{\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_n}\delta_{\mathbf{q}_1+\cdots+\mathbf{q}_n,0}\;\nu_n(\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_n)$$
$$\times\sum_{\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n}\sum_{m=1}^{n}\Big(\mathbf{k}_m + \frac{\mathbf{q}_m}{2}, \mathbf{q}_m\Big)\;\hat{J}_n(\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_n|\,\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n)\;, \tag{3.1}$$
$$\hat{J}_n(\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_n|\,\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n) = \sum_{s_1,\ldots,s_n}a^+_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q}_1,s_1}\ldots a^+_{\mathbf{k}_n+\mathbf{q}_n,s_n}\;a_{\mathbf{k}_n,s_n}\ldots a_{\mathbf{k}_1,s_1}\;.$$

Використаємо символ узагальненого хронологічного впорядкування $\tilde{T}$ [4], який приводить добуток операторів до нормальної форми у випадку однакових значень змінної β', а саме:

$$\tilde{T}\{a_{\mathbf{k}_1,s_1}(\beta')a^+_{\mathbf{k}_2,s_2}(\beta')\} = -a^+_{\mathbf{k}_2,s_2}(\beta')a_{\mathbf{k}_1,s_1}(\beta')\;. \tag{3.2}$$

Перейдемо також до частотного зображення [4], уводячи суперпозицію фермі-операторів у зображенні взаємодії

$$a_{\mathbf{k},s}(\nu^*) = \beta^{-1/2}\int_0^\beta a_{\mathbf{k},s}(\beta')\exp(i\nu^*\beta')d\beta'\;, \tag{3.3}$$

де $\nu^* = (2n+1)\pi\beta^{-1}$ — частоти Фермі-Мацубари [3]. У результаті одержуємо такий частотний запис S-матриці:

$$\hat{S} = \tilde{T}\exp\{-\sum_{n\geq 2}\frac{\hbar^2}{m}(\beta V)^{1-n}[(n-1)!]^{-1} \tag{3.4}$$
$$\times\sum_{x_1,\ldots,x_n}\delta_{x_1+\cdots+x_n,0}\nu_n(\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_n)\;\hat{f}_{x_1}\hat{\rho}_{x_2}\cdots\hat{\rho}_{x_n}\}\;.$$

При цьому

$$\hat{\rho}_x = \hat{\rho}_{\mathbf{q},\nu} = \sum_{\mathbf{k},s;\nu^*}a^+_{\mathbf{k}+\mathbf{q},s}(\nu^*+\nu)a_{\mathbf{k},s}(\nu^*) \tag{3.5}$$

— спектральне зображення оператора електронної густини,

$$\hat{f}_x \equiv \hat{f}_{\mathbf{q},\nu} \tag{3.6}$$
$$= \sum_{\mathbf{k},s;\nu^*} \left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \mathbf{q}\right) a^+_{\mathbf{k}+\mathbf{q},s}(\nu^* + \nu) a_{\mathbf{k},s}(\nu^*) \ ,$$

де $x \equiv (\mathbf{q}, \nu)$, а $\nu = 2n\pi\beta^{-1}$ — частоти Бозе–Мацубари [3]. У роботі [4] встановлено правило обчислення середніх від добутку операторів $a_{\mathbf{k},s}(\nu^*)$, згідно з яким

$$-\langle \tilde{T}\{a_{\mathbf{k}_1,s_1}(\nu_1^*) a^+_{\mathbf{k}_2,s_2}(\nu_2^*)\}\rangle_0$$
$$= G^0_{\mathbf{k}_1,s_1}(\nu_1^*) \delta_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} \delta_{s_1,s_2} \delta_{\nu_1^*,\nu_2^*}, \tag{3.7}$$

де $G^0_{\mathbf{k},s}(\nu^*) = [i\nu^* - \varepsilon_k + \mu]^{-1} \exp(i\nu^*\delta)$ — спектральне зображення одночастинкової функції Ґріна ідеальної системи ($\delta \to +0$). У прийнятому вище самоузгодженому наближенні формула (3.7) справедлива і при засередненні за станами базисної системи (2.11).

Розрахунок середнього $\langle \hat{S} \rangle_{\text{Б}}$ виконаємо за теорію збурень. Унаслідок антиермітовости оператора $\hat{K}_w$ внески всіх непарних порядків у цьому випадку дорівнюють нулеві. З цієї ж причини дорівнюють нулеві також усі власнеенерґетичні діяграми або діяграми з такими елементами. У зв'язку з цим перетворення (2.3) інваріянтне відносно заміни $\hat{W} \to -\hat{W}$, що має чіткий фізичний сенс. Розглянемо насамперед внесок у термодинамічний потенціял діяграм другого порядку (поляризаційної й обмінної) та суми поляризаційних діяграм усіх вищих порядків ($n \geq 4$), побудованих на найважливішому ефективному потенціялі $\nu_2(\mathbf{q}, -\mathbf{q})$. У цьому наближенні

$$\Omega(\mu) = \Omega_{\text{Б}}(\mu) + (2\beta)^{-1} \sum_x \ln[1 + M_x] + \Omega_2^{ex}(\mu), \tag{3.8}$$

$$M_x = -\left(\frac{\hbar^2}{m}\right)^2 (\beta V)^{-2} \nu_2^2(\mathbf{q}, -\mathbf{q})$$
$$\times \{\langle \hat{\rho}_x \hat{\rho}_{-x} \rangle_0 \langle \hat{f}_x \hat{f}_{-x} \rangle_0 + \langle \hat{\rho}_x \hat{f}_{-x} \rangle_0^2\}.$$

Середні, що тут фіґурують, виражаються через двочастинкову кореляційну функцію ідеальної системи $\tilde{\mu}_2^0(x, -x)$:

$$\langle \hat{\rho}_x \hat{\rho}_{-x} \rangle_0 = -\sum_{\mathbf{k},s;\nu^*} G^0_{\mathbf{k}+\mathbf{q},s}(\nu^* + \nu) \ G^0_{\mathbf{k},s}(\nu^*) \tag{3.9}$$
$$= \beta \ \tilde{\mu}_2^0(x, -x) \ ,$$
$$\langle \hat{\rho}_x \hat{f}_{-x} \rangle_0 = -i\nu\beta \left(\frac{\hbar^2}{m}\right)^{-1} \tilde{\mu}_2^0(x, -x),$$
$$\langle \hat{f}_x \hat{f}_{-x} \rangle_0 = -2\beta N \varepsilon_q \left(\frac{\hbar^2}{m}\right)^{-2} + \beta\nu^2 \left(\frac{\hbar^2}{m}\right)^{-1} \tilde{\mu}_2^0(x, -x).$$

Таким чином,

$$M_x = V^{-1} \tilde{\mu}_2^0(x, -x) v_{ef}(\mathbf{q}), \tag{3.10}$$

де ефективний потенціял

$$v_{ef}(\mathbf{q}) = 2NV^{-1} \varepsilon_q \nu_2^2(\mathbf{q}, -\mathbf{q}) \tag{3.11}$$

має властивості фур'є-образу потенціялу квантового пакета ($v_{ef}(\mathbf{q}) \sim q^{-2}$ при $q \to 0$; $v_{ef}(\mathbf{q}) \sim q^{-5}$ при $q \to \infty$).

Після обчислення сум за частотами й елементарних перетворень внесок обмінної діяграми набуває форми

$$\Omega_2^{ex}(\mu) = (2V)^{-1} \sum_{\mathbf{q}} \Psi_2^{(2)}(\mathbf{q}, -\mathbf{q}) \tilde{\mu}_2^0(\mathbf{q}, -\mathbf{q}) \tag{3.12}$$
$$+ (3!)^{-1} V^{-2} \sum_{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3} V_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \tilde{\mu}_3^0(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3).$$

Тут уведено фур'є-образи n-частинкових кореляційних функцій ідеальної системи:

$$\tilde{\mu}_2^0(\mathbf{q}, -\mathbf{q}) = -\sum_{\mathbf{k},s} n^0_{\mathbf{k},s} n^0_{\mathbf{k}+\mathbf{q},s}, \tag{3.13}$$
$$\tilde{\mu}_3^0(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) = 2 \sum_{\mathbf{k},s} \ n^0_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_1,s} \ n^0_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2,s} \ n^0_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3,s} \ \delta_{\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3,0}, \ldots,$$

де $n^0_{\mathbf{k},s}$ — розподіл за імпульсами в ідеальній системі. Оскільки

$$(2\beta)^{-1} \sum_x M_x = (2V)^{-1} \sum_{\mathbf{q}} [N + \tilde{\mu}_2^0(\mathbf{q}, -\mathbf{q})] v_{ef}(\mathbf{q}), \tag{3.14}$$

то, враховуючи в операторі $\hat{K}_w$ члени з $\nu_n(...)$ при $n \geq 3$, а також беручи до уваги рівняння для функції $\nu_2(\mathbf{q}, -\mathbf{q})$, зобразимо термодинамічний потенціал у традиційному вигляді, виділяючи внесок ідеальних кореляцій $\Omega_{HF}(\mu)$ і так званий кореляційний (внесок неідеальних кореляцій):

$$\Omega(\mu) = \Omega_0(\mu) + \Omega_{HF}(\mu) + \Omega_c(\mu),$$

$$\Omega_{HF}(\mu) = (2V)^{-1} \sum_{\mathbf{q}} \tilde{\mu}_2^0(\mathbf{q}, -\mathbf{q}) V_q, \tag{3.15}$$

$$\Omega_c(\mu) = (2\beta)^{-1} \sum_x \{\ln[1 + M_x] - M_x\}.$$

У границі малих хвильових векторів $v_{ef}(\mathbf{q})$ близький до кулонівського потенціялу V_q (див. (2.9)), а через це складова $\Omega_c(\mu)$ близька до кореляційного внеску у звичайному наближенні хаотичних фаз [5], застосовному в області високих густин ($r_s \leq 1$). Однак при малих і проміжних густинах $\Omega_c(\mu)$ приймає вищі значення, ніж у звичайній теорії збурень на кулонівському потенціялі. Переходячи до енерґії основного стану, запишемо її також у традиційній формі. У наближенні (3.15) кореляційна енерґія в розрахунку на один електрон (у рідберґах) дорівнює:

$$\varepsilon_c(r_s) = \frac{3}{2\pi} \left(\frac{4}{\pi}\right)^{2/3} r_s^{-2} \int_0^\infty du \int_0^\infty dt t^3 \{\ln[1 + m_t] - m_t\} \ ,$$

$$m_t = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{2/3} \frac{r_s}{t^2} Z_2^2(t) I_{2,0}\left(t\left[\frac{4}{3\pi}\right]^{1/3}, u\right). \tag{3.16}$$

Тут використано безрозмірні змінні

$$t = qa_0 n^{-1/3}, \quad u = \nu(2\varepsilon_F t)^{-1} k_F a_0 n^{-1/3},$$

$$n = 4\pi \frac{N}{V} a_0^3, \tag{3.17}$$

а $I_{2,0}(q,u)$ — безрозмірний множник кумулянта $\tilde{\mu}_2^0(x, -x)$:

$$I_{2,0}(q,u) = 2\varepsilon_F (3N)^{-1} \mu_2^0(x, -x)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{1 + (2q)^{-1}\left[1 + u^2 - \frac{q^2}{4}\right] \ln \frac{u^2 + (1+\frac{q}{2})^2}{u^2 + (1-\frac{q}{2})^2} \right. \tag{3.18}$$

$$\left. + u\left[\mathrm{arctg}\, \frac{1+\frac{q}{2}}{u} + \mathrm{arctg} \frac{1-\frac{q}{2}}{u}\right]\right\} \ .$$

Безрозмірна функція $Z_2^2(t)$ є універсальною монотонною функцією змінної t, що має таку асимптотику:

$$Z_2^2(t) \sim \begin{cases} 1 \text{ при} & t \ll 1, \\ t^{-3} \text{ при} & t \gg 1 \end{cases} \tag{3.19}$$

(див. рис. 1 в [2]). Покладаючи формально $Z_2^2(t) = 1$, одержуємо наближення хаотичних фаз звичайної теорії збурень $\varepsilon_c^{RPA}(r_s)$. У табл. 1 наведено $\varepsilon_c(r_s)$, $\varepsilon_c^{RPA}(r_s)$, кореляційну енерґію, одержану методом Монте–Карло [6, 7] $\varepsilon_c^{MC}(r_s)$, а також результати деяких інших робіт в області параметра неідеальности (параметра Віґнера–Бракнера) $0{,}01 \leq r_s \leq 10{,}0$. Як видно з табл. 1, кореляційна енерґія, обчислена за формулою (3.16), дуже близька до результатів робіт [8, 9], що ґрунтуються на використанні поляризаційного оператора, розрахованого в рамках звичайної теорії збурень з урахуванням кореляційних функцій ідеальної системи $\tilde{\mu}_3^0(x_1, x_2, x_3)$ та $\tilde{\mu}_4^0(x_1, -x_1, x_2, -x_2)$($\varepsilon_c^{PRPA}$). Розрахована за формулою (3.16), $\varepsilon_c(r_s)$ близька також до результатів методу Монте–Карло [6, 7], особливо в області слабкої та проміжної неідеальности: відносне відхилення при $r_s = 10{,}0$ складає 6%.

r_s	0.01	0.1	1	2	3	4	5	6	10
ε_c^{RPA}	428.9	288.0	157.6	123.6	105.5	93.6	84.95	78.2	61.3
ε_c^{MC}; [6]	-	-	120.0	90.2	-	-	56.3	-	37.2
ε_c^{MC}; [7]	380.6	242.6	120.0	89.6	73.8	63.6	56.3	50.7	37.1
ε_c^{IU}; [10]	-	-	117.4	86.9	71.1	61.0	53.8	48.3	35.0
ε_c^{VS}; [11]	-	-	112.0	89.0	75.0	65.0	58.0	52.0	35.0
ε_c^{EZ}; [12]	-	-	122.0	90.4	73.8	63.4	56.0	50.5	23.6
ε_c^{PRPA}; [8]	-	-	119.7	89.3	72.9	62.1	54.2	48.0	32.6
ε_c; (3.16)	398.4	253.7	120.0	87.5	71.2	60.8	53.6	48.1	35.0

Таблиця 1. Кореляційна енерґія моделі електронної рідини ($-10^3\epsilon_c(r_s)$).

IV. ЗАКІНЧЕННЯ

Таким чином, зображення зміщень, або циклічне перетворення (2.3), (2.8) статистичної суми, можна розглядати як ефективний спосіб урахування кореляційних ефектів у фермі-системах в області великих хвильових векторів, тобто ефектів локального поля. Дійсно, спектральне зображення двочастинкової кореляційної функції системи (2.2)

$$\mu_2(x,-x) = Z^{-1}(\mu)\ \mathrm{Sp}\ \{\hat{\rho}_x \hat{\rho}_{-x} e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}\} \tag{4.1}$$

у розглянутому вище наближенні хаотичних фаз для оператора $\hat{K}_w$ має такий вигляд:

$$\mu_2(x,-x) = \tilde{\mu}_2^0(x,-x)\{1+M_x\}^{-1}. \tag{4.2}$$

Оскільки в наближенні локального поля [13, 14]

$$\mu_2(x,-x) = \tilde{\mu}_2^0(x,-x) \times \{1+\frac{V_q}{V}\tilde{\mu}_2^0(x,-x)[1-G_x]\}^{-1}\ , \tag{4.3}$$

то статична поправка на локальне поле у нашому підході визначається співвідношенням

$$G_q^0 = 1 - v_{ef}(q)V_q^{-1}. \tag{4.4}$$

Якщо $\nu_2(\mathbf{q},-\mathbf{q})$ задовольняє перше з рівнянь (2.9), то G_q^0 є безрозмірною універсальною функцією, яка не залежить від параметра неідеальности

$$G_q^0 = 1 - Z_2^2(qa_0n^{-1/3})\ . \tag{4.5}$$

Ця функція має загальні властивості поправки на локальне поле моделі електронної рідини: змінюється в межах від нуля до одиниці, квадратична відносно хвильового вектора $\mathbf{q}$ в області $q \le k_F$

$$G_q^0 = \gamma(q/k_F)^2 + \cdots\ , \quad \gamma \approx 0,323...\ , \tag{4.6}$$

а також слабо залежить від хвильового вектора при великих $\mathbf{q}$.

Як відомо, поправка на локальне поле залежить від параметра неідеальности r_s: навіть сама форма цієї функції змінюється залежно від значення цього параметра [13]. Через це G_q^0 не можна цілком ототожнити з поправкою на локальне поле. Однак її можна розглядати як певне наближення цієї функції для випадку сильно неідеальних систем, де залежність від r_s та частоти є слабкою, короткохвильова асимптотика близька до одиниці, а сама поправка є монотонною функцією хвильового вектора з довгохвильовою границею, близькою до (4.6).

[1] М. В. Ваврух, Доп. Акад. Наук УРСР А, 48 (1985).
[2] М. В. Ваврух, Я. В. Куштай, Журн. фіз. досл. **1**, 12 (1996).
[3] А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике* (Физматгиз, Москва, 1962).
[4] M. V. Vavrukh, T. E. Krokhmalskii, Phys. Status Solidi B **168**, 519 (1991).
[5] Н. Марч, У. Янг, С. Сампантхар, *Проблема многих тел в квантовой механике* (Мир, Москва, 1969).
[6] D. M. Ceperley, B. J. Alder, Phys. Rev. Lett. **45**, 566 (1980).
[7] S. H. Vosko, L. Wilk, N. Nusair, Can. J. Phys. **58**, 1200 (1980).
[8] М. В. Ваврух, Т. Є. Крохмальський, Укр. фіз. журн. **36**, 296 (1991).
[9] M. V. Vavrukh, T. E. Krokhmalskii, Phys. Status Solidi B **169**, 451 (1992).
[10] S. Ichimaru, K. Utsumi, Phys. Rev. B **24**, 7385 (1981).
[11] P. Vashishta, K. Singwi, Phys. Rev. B **6**, 875 (1972).
[12] K. Emrich, J. G. Zabolitsky, Phys. Rev. B **31**, 2049 (1984).
[13] M. Vavrukh, N. Vavrukh, V. Solovyan, Phys. Status Solidi B **177**, 361 (1993).
[14] М. В. Ваврух, Физ. низк. темп. **22**, 1005 (1996).

CYCLIC TRANSFORMATION OF PARTITION FUNCTION AND THE DISPLACEMENTS REPRESENTATION IN THE FERMI SYSTEMS THEORY

M. Vavrukh[1], Ya. Kushtay[2], V. Solovyan[3]
[1]*Lviv State University, Chair of Astrophysics*
8 Kyrylo i Mefodii Str., Lviv, UA-290005, Ukraine
[2]*Lviv Commercial College, Lviv*
8 Mentsinskyi Str., Lviv, UA-290000, Ukraine
[3]*Institute for Condensed Matter Physics Ukrainian Academy of Sciences*
1 Svientsitskyi Str., Lviv, UA-290011, Ukraine

It is proved that in the case of Fermi systems the representation of displacements is equal to some cyclic transformation of the partition function. It corresponds to the renormalized perturbation theory which is based on the taking into account of the correlation effects, particularly of the local-field ones. The results of the calculation of the ground state of the electron liquid model in the paramagnetic phase are presented for the coupling parameter region $10^{-2} \leq r_s \leq 10$.