ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 3, № 1 (1999) с. 25–32

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 3, No. 1 (1999) p. 25–32

ВАЙНБЕРҐІВ ПРОПАҐАТОР МАСИВНОЇ ЧАСТИНКИ ДОВІЛЬНОГО СПІНУ

В. Г. Зима[1], С. О. Федорук[2]
[1] *Харківський державний університет, пл. Свободи, 4, Харків, 310077, Україна*
[2] *Українська інженерно–педагогічна академія, вул. Університетська, 16, Харків, 310003, Україна*
(Отримано 25 вересня 1998 р.)

Визначено амплітуду переходу для масивної частинки довільного спіну у формулюванні з індексним спінором шляхом обчислення континуального інтеґрала в BFV–BRST підході. Обчислення проведене без неконтрольованих перенормувань міри континуального інтеґрала. Отримано вайнберґів пропаґатор, записаний у безіндексній формі з використанням індексного спінора. Показано, що вибір крайових умов для індексного спінора визначає голоморфне або антиголоморфне подання канонічного опису спіну частинок й античастинок.

Ключові слова: спінова частинка, BFV–BRST функціональний інтеґрал, BRST симетрія, вайнберґів пропаґатор.

PACS number(s): 04.60.Gw, 03.70.+k

У створенні теорій об'єктів із внутрішньою структурою задача коваріянтного опису частинок зі спіном, зокрема задача коваріянтного квантування таких частинок, відіграє подвійну роль. З одного боку, це навчальна модель, що дає змогу проілюструвати досягнуте і потренуватися в застосуванні розроблюваних методів, а з другого — відправна точка і, певною мірою, бажаний результат цих теорій, покликаних послідовно реалізувати фундаментальні квантові й релятивістські принципи, так щоб можна було говорити про створення теорії взаємодії частинок, які залишаються єдиним реально спостережуваним проявом фундаментальної структури матерії.

Добре відомо, що спін можна описувати, використовуючи як комутуючі, так і антикомутуючі координати, які можуть застосовуватися як незалежні і рівноправні партнери в рамках суперсиметричних теорій. Найадекватніше застосування в теорії спіну бозонні координати, як і ферміонні, знаходять у вигляді спінорів. Цьому не суперечить існування псевдокласичної механіки з додатковими антикомутуючими векторними координатами частинок, де спін виникає в процедурі квантування як деяка нова якість. У теоріях зі спінорами у спіну є нетривіяльна "класична границя", тож квантування потребує тільки уточнення констант упорядкування. До останнього часу бозонні спінори в теорії спіну застосовувалися досить обмежено, у першу чергу як змінні твісторного роду, що дозволяють розв'язати масову в'язь у безмасовому випадку. Цим, однак, аж ніяк не вичерпується роль таких змінних. Так, у теорії з бозонними спінорами, принаймні на класичному рівні, існує елементарний розв'язок проблеми нескінченної звідности ферміонної κ–симетрії, зв'язок якого з розв'язком у рамках двічі суперсиметричних моделей поки що не ясний. Це виправдовує подальший аналіз моделей частинок з бозонними спінорами, оскільки вказує на можливість існування тонших геометричних і теоретико–групових аспектів.

BFV–BRST квантування [1] масивної частинки зі спіном розглядали в досить обмеженому числі робіт [2] з використанням ґрасманових векторів і з обмеженням випадком спіну 1/2. У цих моделях отримання пропаґатора не зводиться до обчислення початкового функціонального інтеґрала, а вимагає додаткових кроків, пов'язаних із вибором реалізації операторів спіну.

У цій роботі ми застосовуємо BFV–BRST процедуру квантування масивної частинки довільного спіну у звичайній просторово–часовій вимірності. Використана схема опису спіну за допомогою індексного спінора [3] вочевидь прийнятна і для безмасового випадку й у вищих просторово–часових вимірностях, тож розв'язана задача — лише пробний крок для оцінки ефективности вказаного підходу.

Такий розгляд у рамках сучасних методів квантування проводено вперше. Крім поширення на вищі спіни, уперше в такій задачі вдалося в повному обсязі скористатися перевагами гамільтонового формулювання і обчислити континуальний інтеґрал, не звертаючись до довільних неконтрольованих перенормувань міри. Одержаний пропаґатор збігається зі знайденим раніше у традиційній теорії поля в рамках $(2J+1)$–компонентного формалізму [4].

Ми не звертаємося до процедури конверсії в'язей другого роду, оскільки такий розгляд природно провести при вивченні безмасового випадку, де бозонна κ–симетрія моделі приводить до нетривіяльної алґебри в'язей першого роду.

Ключове для подібного розгляду питання про вибір области інтеґрування за калібрувальними степенями вільности вирішуємо вибором фундаментальної области модулярної групи у просторі Тейхмюлера. Указаний вибір не пов'язаний з неоднозначністю процедури, скоріше це вибір розв'язків задачі з класу можливих для фіксованої системи. Як результат природно виникає причинний пропаґатор частинки довільного фіксованого спіну.

Ретельний аналіз крайових умов вимагає модифікації виразу для амплітуди переходу у вигляді континуального інтеґрала доданням крайових членів до класичної дії [5]. Через наявність в'язей другого роду виникає канонічна спряженість індексного спінора з комплексно–спряженим. Тому крайові члени для них різні: один фіксується в початковий момент часу, інший — у кінцевий. Показано, що постала альтернатива, яка відповідає виборові опису спіну частинок: голоморфному — непунктирними спінорами чи антиголоморфному — пунктирними. Перехід від одного вибору до іншого рівнозначний обмінові ролями між частинками й античастинками.

У роботі використано спінорні угоди з [6].

У D4 частинку зі спіном описуємо комутуючими координатами $(z^A) = (x^\mu, \zeta^\alpha, \bar\zeta^{\dot\alpha})$, де x — вектор просторово–часових координат, ζ — індексний вейлівський спінор. У формалізмі першого порядку її лаґранжіян [3] має вигляд

$$L = p\dot\omega - \frac{e}{2}(p^2 + m^2) - \lambda(\zeta\hat p\bar\zeta - j)\,, \qquad (1)$$

де бозонна "суперформа"

$$\omega \equiv \dot\omega\, d\tau = dx - id\zeta\sigma\bar\zeta + i\zeta\sigma d\bar\zeta\,.$$

Кінетичний член $p\dot\omega$ являє собою суму звичайного кінетичного члена для безспінової частинки $p\dot x$, де p_μ — допоміжний вектор енерґії–імпульсу і спінового доданка, який набуває в системі спокою стандартної осциляторної форми. Унаслідок цього ω збігається із суперформою N=1 SUSY, якщо в останній замінити ґрасмановий спінор на індексний. У лаґранжіяні (1) e (айнбайн) і λ — лаґранжеві множники, j — класичний спін, знак якого визначає знак енерґії. Наша дія $A = \int_{\tau_i}^{\tau_f} L\, d\tau$ коректна як для масивного, так і для безмасового випадків, однак у цій роботі ми обмежуємося розглядом тільки масивної частинки. За відсутности останнього доданка в лаґранжіяні (1) наша дія збігається з дією CBS [7], якщо інтерпретувати ζ як ґрасмановий спінор.

Гамільтонізація теорії [8], крім в'язей, явно закладених у дію, тобто масової в'язі

$$T \equiv \frac{1}{2}(p^2 + m^2) \approx 0 \qquad (2)$$

та спінової

$$\zeta\hat p\bar\zeta - j \approx 0\,, \qquad (3)$$

виявляє також спінорні бозе–в'язі

$$d_\zeta \equiv ip_\zeta - \hat p\bar\zeta \approx 0, \quad \bar d_\zeta \equiv -i\bar p_\zeta - \zeta\hat p \approx 0. \qquad (4)$$

В'язь на імпульс, канонічно спряжений зі змінною p, урахування якої уведенням дужок Дірака тривіяльне і не модифікує дужки для основних змінних, а також очевидні в'язі першого роду для імпульсів, спряжених з лаґранжевими множниками, опускаємо. На поверхні в'язей спінова в'язь (3) еквівалентна в'язі

$$S \equiv S_\zeta - j \equiv \frac{i}{2}(\zeta p_\zeta - \bar p_\zeta\bar\zeta) - j \approx 0\,, \qquad (5)$$

оскільки $S \equiv \frac{1}{2}(\zeta d_\zeta - \bar d_\zeta\bar\zeta) + i(\zeta\hat p\bar\zeta - j)$. Фундаментальні дужки $\{z^A, p_B\} = \delta^A{}_B$; $\bar p_\zeta \equiv p_{\bar\zeta}$.

Ненульові дужки алґебри в'язей — це

$$\{d_\zeta, \bar d_\zeta\} = 2i\hat p, \quad \{S, d_\zeta\} = \frac{i}{2}d_\zeta, \quad \{S, \bar d_\zeta\} = -\frac{i}{2}\bar d_\zeta. \quad (6)$$

Отже, в'язі $(F_a) = (F_1, F_2) \equiv (T, S)$ — першого роду, а спінорні в'язі $(G_i) = (d_{\zeta\alpha}, \bar d_{\zeta\dot\alpha})$ — другого ($\hat p\tilde p = m^2 > 0$). Звичайно, спінорні в'язі (4) — первинні, а масова (2) і спінова (3) — в'язі другого етапу процедури гамільтонізації.

Масова в'язь (2) ґенерує звичайні репараметризації просторово-часових координат фазового простору

$$\delta x^\mu = p^\mu\epsilon, \quad \delta p_\mu = 0, \quad \delta e = \dot\epsilon,$$

де остання рівність випливає з умови інваріянтности дії в гамільтоновій формі з точністю до поверхневих членів.

Спінова в'язь (5) породжує фазові (у розумінні множення на фазовий множник) перетворення спінорних координат фазового простору:

$$\delta\zeta^\alpha = \frac{i}{2}\zeta^\alpha\varphi, \quad \delta p_{\zeta\alpha} = -\frac{i}{2}p_{\zeta\alpha}\varphi; \qquad \delta\lambda = \dot\varphi.$$

Відповідна варіяція дії

$$\delta A = \frac{1}{2}(p^2 - m^2)\epsilon\Big|_{\tau_i}^{\tau_f} + j\varphi\Big|_{\tau_i}^{\tau_f}$$

дорівнює нулеві тільки за умови, що $\epsilon(\tau_i) = \epsilon(\tau_f) = 0$ і $\varphi(\tau_i) = \varphi(\tau_f)$. Ця обставина робить безпосередньо допустимими лише релятивістські калібрування з похідними, що виражають $\dot e$ через змінні задачі [9]. Канонічним калібруванням без похідних можна скористатися, розглядаючи його як певну границю допустимого [10] або ж додаючи до дії відповідні крайові члени [5].

Найпослідовнішим методом обчислення амплітуди переходу для систем із в'язями є BFV–BRST формалізм [1]. У цьому підході координати початкового фазового простору для кожної в'язі F_a першого роду доповнюються "динамічними" лаґранжевими множниками $(\lambda^a) \equiv (\lambda_T, \lambda_S)$ тієї ж ґрасманової парности і канонічно спряженими з ними імпульсами π_a, $\{\lambda^a, \pi_b\} = \delta^a_b$, а також дýховими змінними. Дýховий сектор містить ґрасманово непарні дýхи C^a і антидýхи $\tilde{C}_a$ і канонічно спряжені з ними величини $\tilde{\mathcal{P}}_a$ та $\mathcal{P}^a$: $\{C^a, \tilde{\mathcal{P}}_b\} = \{\mathcal{P}^a, \tilde{C}_b\} = \delta^a_b$. Змінні λ, π, C, $\mathcal{P}$ дійсні, а $\tilde{\mathcal{P}}$, $\tilde{C}$ — уявні.

Змінні початкового фазового простору підпорядковані в'язям другого роду (4), однак алґебра в'язей першого роду F_a залишається абелевою і після уведення дужок Дірака

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \frac{i}{2p^2}\{A, \bar{d}_\zeta\}\tilde{p}\{d_\zeta, B\}$$

$$+ (-1)^{AB}\frac{i}{2p^2}\{B, \bar{d}_\zeta\}\tilde{p}\{d_\zeta, A\},$$

тож BRST заряд має нульовий ранґ і являє собою лінійну комбінацію в'язей першого роду:

$$\Omega = F_a C^a + \pi_a \mathcal{P}^a\,; \tag{7}$$

$$\{\Omega, \Omega\} = \{\Omega, \Omega\}_D = 0, \quad \overline{\Omega} = \Omega.$$

У виразі для амплітуди переходу у вигляді континуального інтеґрала

$$Z_\Psi = \int \mathcal{D}[z, p_z; \lambda, \pi; C, \tilde{\mathcal{P}}; \mathcal{P}, \tilde{C}] \prod_{i,\tau} \delta(G_i)$$

$$\times \prod_\tau (2\pi)^2 \left|\det\{G_i, G_j\}\right|^{1/2} \exp(iA_{eff}) \tag{8}$$

використана звичайна міра Ліувіля для бозе– і фермі–змінних. Для звичайних інтеґралів, які використовують при скінченновимірній апроксимації континуального інтеґрала, це означає, що добуток диференціялів кожної пари канонічно спряжених дійсних бозе–змінних у мірі ділиться на 2π. На 2π ділиться також диференціял змінної, що залишається без пари відповідно до крайових умов, які розглядаємо. Тут крайові умови такі (див. нижче (12) і (14)), що це стосується змінних p_μ, λ^a. Для ґрасманових величин подібних множників немає. У гамільтоновім підході у мірі не виникають (точніше скорочуються) множники, які відповідають якобіянові зреальнення комплексних змінних, що використані.

Виконання в'язей другого роду (4) в (8) забезпечується фунціональною δ–функцією; при зреальненні змінних множники, які відповідають якобіянові переходу, не виникають у добутку $\prod_i \delta(G_i)$ від комплексних в'язей другого роду. Міра нормується детермінантом матриці дужок Пуассона дійсних в'язей другого роду $\det\{G_i, G_j\} = \left(\det\{d_\zeta, \bar{d}_\zeta\}\right)^2 = \left(4p^2\right)^2$. Крім того, у міру для кожного "моменту часу" τ повинен бути введений множник 2π на кожну пару дійсних канонічно спряжених бозе–в'язей другого роду.

Ефективна гамільтонова дія має вигляд

$$A_{eff} = \int_{\tau_i}^{\tau_f} \left(p\dot{x} + \dot{\zeta}p_\zeta + \bar{p}_\zeta\dot{\bar{\zeta}} + \pi\dot{\lambda} + \tilde{\mathcal{P}}\dot{C} + \tilde{C}\dot{\mathcal{P}} - H_\Psi \right) d\tau + A_{b.t.}\,. \tag{9}$$

Вибір BRST гамільтоніяна H_Ψ та крайового члена $A_{b.t.}$ обговорено нижче.

Для репараметризаційно інваріянтної теорії, яку розглядаємо, гамільтоніян H_Ψ є BRST похідною калібрувального ферміона Ψ: $H_\Psi = \{\Omega, \Psi\}$. В амплітуді (8) можна на рівній підставі користуватися як дужками Пуассона, так і дужками Дірака, оскільки в нашому випадку дужки Пуассона в'язей першого роду (що входять до Ω) з довільною функцією збігаються з дужками Дірака на поверхні в'язей другого роду. Відомо [1], що амплітуда переходу не залежить від вибору калібрувального ферміона, якщо фунціональний інтеґрал узято за траєкторіями, які належать одному класові еквівалентности відносно BRST перетворень. Останній виділяємо вибором відповідних калібрувальних і крайових умов. Релятивістське калібрування з похідними для лаґранжевих множників $(\dot{\lambda}^a = 0)$ одержуємо, використавши вибір

$$\Psi = \tilde{\mathcal{P}}_a \lambda^a\,, \tag{10}$$

тоді

$$H_\Psi = F_a \lambda^a + \tilde{\mathcal{P}}_a \mathcal{P}^a\,. \tag{11}$$

Наголосимо, що подальше спрощення виразу для Ψ шляхом виключення деяких доданків не бажане, бо тоді не виділяється один клас еквівалентности траєкторій і результат "усереднюється" за багатьма класами, а його отримання потребує нескінченних перенормувань міри інтеґрування [11].

Обчислення амплітуди переходу проведемо в координатному поданні для змінних z^A і в змішаному поданні для ду́хів, тобто виберемо крайові умови

$$x^\mu(\tau_i) = x_i{}^\mu, \quad x^\mu(\tau_f) = x_f{}^\mu; \tag{12}$$

$$\zeta^\alpha(\tau_1) = \zeta_1^\alpha, \quad \bar\zeta^{\dot\alpha}(\tau_2) = \bar\zeta_2{}^{\dot\alpha}, \tag{13}$$

де мітки $(1,2)$ спінорів треба розуміти як (f,i) для голоморфного та (i,f) — для антиголоморфного вибору;

$$\pi_a(\tau_i) = \pi_a(\tau_f) = 0; \quad C^a(\tau_i) = C^a(\tau_f) = 0;$$
$$\tilde C_a(\tau_i) = \tilde C_a(\tau_f) = 0. \tag{14}$$

Для інших змінних крайові значення не фіксуємо. Крайові умови, що накладаються, BRST інваріянтні і забезпечують обернення в нуль BRST заряду на кінцях. Це ґарантує форм–інваріянтність амплітуди (8); обернення в нуль крайових значень BRST заряду можна розуміти як класичне вираження умови $\hat\Omega\,|\psi_{phys}\rangle = 0$ [12]. Крайові умови для індексного спінора — коваріянтний вибір, узгоджений з канонічною спряженістю ζ і $\bar\zeta$, яка виникає внаслідок в'язей другого роду. Звичайно, такий вибір не є єдино можливим. Використовуючи комбінації індексного спінора і спряженого з ним імпульсу з іншими змінними фазового простору, можна запропонувати безліч варіянтів коваріянтних крайових умов на індексні змінні. Усі вони, по суті, еквівалентні і пов'язані з вибором конкретного способу опису спіну (реалізації гільбертового простору станів). Ми обмежуємся тут розглядом двох основних варіянтів (13), як найпростіших і пов'язаних з уже описаними в літературі [3].

За крайових умов (13) коректність варіяційного принципу (незалежність варіяції дії від варіяцій змінних, що не фіксуються на кінцях) вимагає введення крайового члена

$$A_{b.t.} = \varepsilon_\zeta \frac{1}{2}(\zeta_i p_{\zeta i} + \zeta_f p_{\zeta f} - \bar p_{\zeta i}\bar\zeta_i - \bar p_{\zeta f}\bar\zeta_f) \tag{15}$$

де $\varepsilon_\zeta = -1$ відповідає голоморфному, а $\varepsilon_\zeta = +1$ — антиголоморфному виборові.

У калібруванні (10), яке розглядаємо, фунціональний інтеґрал (8) факторизується:

$$Z_\Psi = Z \cdot Z_{gh}, \tag{16}$$

де функціональний інтеґрал Z_{gh} за непарними духовими змінними має простий ґаусівський вигляд. Інтеґрал Z_{gh} можна обчислити, розбиваючи інтервал зміни параметра еволюції τ на N рівних частин; покладемо $T_\tau \equiv \tau_f - \tau_i$ і $\Delta\tau = T_\tau/N$. Тоді інтеґрування за $\mathcal P$ і $\tilde{\mathcal P}$ автоматично визначає нормувальний множник $(i\Delta\tau)^{2N}$ для міри у проміжному інтеґралі

$$Z_{gh} = \int D[C,\tilde C]\exp\{-i\int_{\tau_i}^{\tau_f}\dot{\tilde C}_a \dot C^a d\tau\} \tag{17}$$

за обчислення його дискретизацією проміжку $[\tau_i,\tau_f]$; не турбуючись про нормування, (17) можна отримати без дискретизації послідовними інтеґруваннями за $\tilde{\mathcal P}$, що дасть $\delta(\mathcal P - \dot C)$, і за $\mathcal P$, що зніме цю δ–функцію. Результат інтеґрування в (17), який не спирається на припущення про нульові крайові значення духових змінних C і $\tilde C$, має вигляд

$$Z_{gh} = -T_\tau^2 \exp\{-i(\tilde C_{fa} - \tilde C_{ia})(C_f^a - C_i^a)/T_\tau\}\,. \tag{18}$$

Оскільки в показнику підінтеґральної експоненти в Z_{gh} нема перехресних членів з духами для різних в'язей, достатньо обмежитися обчисленням для випадку однієї в'язі. Маємо

$$Z_{gh}^{(1)} = \lim_{N\to 0} Z_{gh}[C_i, C_f; \tilde C_i, \tilde C_f; T_\tau, N],$$

де

$$\begin{aligned} Z_{gh}^{(1)}[C_i, C_f; \tilde C_i, \tilde C_f; T_\tau, N] &= \int \prod_{k=1}^{N-1} dC_k d\tilde C_k \cdot \prod_{k=1}^{N} d\tilde{\mathcal P}_k d\mathcal P_k \\ &\times \exp\left\{ i\sum_{k=1}^{N}\left[\tilde{\mathcal P}_k(C_k - C_{k-1}) - (\tilde C_k - \tilde C_{k-1})\mathcal P_k - \tilde{\mathcal P}_k\mathcal P_k\Delta\tau\right]\right\} \\ &= i\Delta\tau \int \prod_{k=1}^{N-1} dC_k d\tilde C_k (i\Delta\tau)\cdot \exp\left\{-\frac{i}{\Delta\tau}\sum_{k=1}^{N}(\tilde C_k - \tilde C_{k-1})(C_k - C_{k-1})\right\}, \\ & C_0 = C_i, \quad \tilde C_0 = \tilde C_i, \quad C_N = C_f, \quad \tilde C_N = \tilde C_f. \end{aligned}$$

Як легко перевірити методом математичної індукції за N, цей інтеґрал не залежить від N:

$$Z_{gh}^{(1)}[C_i, C_f; \tilde{C}_i, \tilde{C}_f; T_\tau, N]$$
$$= iT_\tau \exp\left\{-i(\tilde{C}_f - \tilde{C}_i)(C_f - C_i)/T_\tau\right\} = Z_{gh}^{(1)}.$$

Для нульових крайових значень C і $\tilde{C}$ (14) і навіть за слабкіших умов, $C_f = C_i$ або $\tilde{C}_f = \tilde{C}_i$, та двох комутуючих в'язей маємо

$$Z_{gh} = -T_\tau{}^2. \tag{19}$$

Отже, в амплітуді переходу Z_Ψ залишилося виконати функціональне інтеґрування лише за парними змінними.

Інтеґрали за імпульсами π_a лаґранжевих множників дають δ–функції $\delta(\dot{\lambda}^a)$, тож після функціонального інтеґрування за λ^a в Z_Ψ залишаються лише звичайні інтеґрали за нульовими модами λ^a. Уточнення області інтеґрування за цими змінними, яке відіграє ключову роль у нашому розгляді, буде виконане нижче.

Інтеґрування за x дає δ–функцію $\delta(\dot{p})$, тож функціональний інтеґрал за p в (16) редукується до звичайного інтеґрала за нульовими модами p, і замість інтеґрала $\int p\dot{x}d\tau$, у показникові підінтеґральної експоненти з'являється вираз $ip(x_f - x_i)$.

В'язі другого роду (4) мають розв'язаний вигляд відносно спінорних імпульсів p_ζ і $\bar{p}_\zeta$. Це дозволяє легко проінтеґрувати за цими змінними, якщо скористатися функціональними δ–функціями в мірі.

Тепер в амплітуді переходу залишається лише функціональний інтеґрал за індексними змінними, який факторизується у вигляді

$$Z_\zeta = \int \prod_\tau d^2\zeta d^2\bar{\zeta}|p^2| \tag{20}$$
$$\times \exp\left\{i\int_{\tau_i}^{\tau_f}(-i\dot{\zeta}\hat{p}\bar{\zeta} + i\zeta\hat{p}\dot{\bar{\zeta}} - \lambda_s\zeta\hat{p}\bar{\zeta})d\tau + i\tilde{A}_{b.t.}\right\},$$

де

$$\tilde{A}_{b.t.} = i\varepsilon_\zeta(\zeta_i\hat{p}\bar{\zeta}_i + \zeta_f\hat{p}\bar{\zeta}_f) \tag{21}$$

Експоненційний множник у виразі для ґаусівського інтеґрала (20), як звичайно, легко знаходимо методом перевалу. Умови екстремуму показника підінтеґральної експоненти за $\bar{\zeta}$ і ζ, з урахуванням крайових умов (13), дають рівняння руху для ζ і $\bar{\zeta}$:

$$2i\dot{\zeta}\hat{p} + \lambda_s\zeta\hat{p} = 0\,, \tag{22}$$

тож нетривіяльний вклад, при підстановці розв'язків до показника підінтеґральної експоненти в (20), дасть тільки крайовий член (21). Розв'язки рівнянь (22), з урахуванням крайових умов (13), мають вигляд

$$\zeta\hat{p} = e^{\frac{i}{2}\lambda_s(\tau-\tau_1)}\zeta_1\hat{p}, \quad \hat{p}\bar{\zeta} = e^{-\frac{i}{2}\lambda_s(\tau-\tau_2)}\hat{p}\bar{\zeta}_2\,. \tag{23}$$

Результат обчислення інтеґрала (21):

$$Z_\zeta = \exp\{-2\varepsilon_\zeta\zeta_1\hat{p}\bar{\zeta}_2 e^{i\varepsilon_\zeta\lambda_s T_\tau/2}\} \tag{24}$$

Передекспоненційний множник у (24) можна знайти, складаючи дограничний вираз для обчислення ґаусівського інтеґрала (20) шляхом дискретизації проміжку зміни параметра розвитку τ: $Z_\zeta = \lim\limits_{N\to\infty} Z_\zeta[\zeta_1, \bar{\zeta}_2; T_\tau, N]$. Наприклад, у голоморфному випадку

$$Z_\zeta[\zeta_f, \bar{\zeta}_i; T_\tau, N] = \int \prod_{k=1}^{N} d^2\zeta_{k-1}d^2\bar{\zeta}_k|p^2|/\pi^2 \exp\left\{-2\left(1 + i\lambda_s\frac{T_\tau}{2N}\right)\sum_{k=1}^{N}\zeta_{k-1}\hat{p}\bar{\zeta}_k + 2\sum_{k=0}^{N}\zeta_k\hat{p}\bar{\zeta}_k\right\},$$

де $\bar{\zeta}_0 = \bar{\zeta}_i$, $\zeta_N = \zeta_f$. Використовуючи метод математичної індукції, неважко перевірити, що

$$Z_\zeta[\zeta_f, \bar{\zeta}_i; T_\tau, N] = \left[1 + \left(\frac{\lambda_s T_\tau}{2N}\right)^2\right]^{-N} \exp\left\{2\zeta_f\hat{p}\bar{\zeta}_i\left(1 + i\lambda_s\frac{T_\tau}{2N}\right)^{-N}\right\},$$

звідки гранично за $N \to \infty$, очевидно, одержуємо (24).

Тепер в амплітуді переходу (8) виконані всі функціональні інтеґрування:

$$Z_\Psi = -T_\tau{}^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip(x_f - x_i)} \frac{d\lambda_T d\lambda_s}{(2\pi)^2} \exp\left\{-i\frac{T}{2}\lambda_T(p^2 + m^2) + i\lambda_s T_\tau J\right\} \exp\left\{-2\varepsilon_\zeta\zeta_1\hat{p}\bar{\zeta}_2 e^{i\varepsilon_\zeta\lambda_s T_\tau/2}\right\}. \tag{25}$$

У (25) фігурує квантовий спін J, уведений для того, щоб підкреслити можливість переозначення класичного спіну j з (1) константами впорядкування при квантуванні класичної теорії.

Для характеристики класів еквівалентности орбіт калібруввльної групи в розширеному фазовому просторі введемо параметри Тейхмюлера

$$C_T = \frac{1}{2}\int_{\tau_i}^{\tau_f} \lambda_T(\tau) d\tau, \quad C_S = \frac{1}{2}\int_{\tau_i}^{\tau_f} \lambda_S(\tau) d\tau. \qquad (26)$$

Параметр C_T має прозорий фізичний смисл — у відповідному калібруванні це власний час [9]. Поява в теорії параметра C_S пов'язана з тим, що внутрішні квантові числа, такі, як спін, заряд і т.п., реалізуються у класичних термінах як топологічні характеристики торових шляхів. Називатимемо параметр C_S власним спіновим фазовим кутом. Унаслідок крайових умов на параметри репараметризацій, $\varepsilon(\tau_i) = \varepsilon(\tau_f) = 0$, і фазових перетворень індексних спінорів, $\varphi(\tau_i) = \varphi(\tau_f) = 0$, параметри Тейхмюлера не можуть бути змінені калібрувальними перетвореннями, оскільки $\delta\lambda_T = \dot{\varepsilon}$, $\delta\lambda_S = \dot{\varphi}$. Припустимість використаного тут калібрування з похідними, $\dot{\lambda}_T = \dot{\lambda}_S = 0$, означає, що класи еквівалентности орбіт калібрувальної групи взаємно однозначно характеризуються нульовими модами лаґранжевих множників, для яких, очевидно,

$$C_T = \lambda_T \cdot T_\tau/2, \qquad C_S = \lambda_S \cdot T_\tau/2. \qquad (27)$$

Оскільки параметр еволюції повинен бієктивно відповідати точкам світової лінії частинки [9], допустимі тільки репараметризації зі строго монотонними функціями. Унаслідок цього група репараметризацій розпадається на дві зв'язні компоненти: підгрупу, що зберігає орієнтацію світової лінії, і множину репараметризацій, які змінюють орієнтацію. Відповідна модулярна група (фактор повної калібрувальної групи за зв'язною компонентою одиниці) є Z_2. BFV–BRST квантування включає тільки калібрувальні перетворення, що неперервно пов'язані з тотожним, тож інтеґрування має вестися по фундаментальній області модулярної групи у просторі Тейхмюлера. Виберемо область для параметра C_T, кладучи $C_T > 0$, тоді частинки з позитивною енерґією рухаються вперед у часі і амплітуда переходу (8) є причинним пропаґатором.

Якщо враховувати незалежність внутрішніх квантових чисел від стану руху частинки, то фундаментальна область модулярної групи для фазових перетворень індексних спінорів очевидна зі знайденого виразу для амплітуди (26). Унаслідок періодичности підінтеґрального виразу за параметром $C_S = \lambda_S T_\tau/2$ при напівцілих J, як фундаментальну область можна взяти будь–який проміжок довжиною в період, скажімо, $[0, 2\pi]$. Сама модулярна група фазових перетворень — це група Z.

Інтеґрування в (25) за параметром Тейхмюлера C_T виконуємо з використанням добре відомої рівности $\int\limits_0^\infty dC_T \exp\{-iC_T(p^2+m^2)\} = -i/(p^2+m^2-i0)$. Таким чином, зроблений вибір фундаментальної області еквівалентний звичайному правилу обходу полюсів в інтеґральному поданні причинного пропаґатора.

Інтеґрал за параметром C_S знаходимо застосуванням інтеґральної формули Коші для n–ої похідної аналітичної функції $f(z)$ однієї комплексної змінної z. Якщо функція $f(z) = \exp(Az)$, а контур C є одиничним колом із центром у точці z, легко вишукуємо $\int\limits_0^{2\pi} \exp(-in\alpha + Ae^{i\alpha}) d\alpha = 2\pi A^n/n!$.

Остаточно, виконуючи в (25) інтеґрування за параметрами Тейхмюлера, одержуємо для амплітуди переходу (8), при допустимих у голоморфному випадку невід'ємних J [3], вираз

$$Z_\Psi = \frac{-i}{(2J\varepsilon_\zeta)!}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip(x_f - x_i)} \times \frac{(2\varepsilon_\zeta \zeta_1 \hat{p} \bar{\zeta}_2)^{2J\varepsilon_\zeta}}{p^2+m^2-i0} \cdot \frac{2}{\pi}, \qquad (28)$$

який являє собою безіндексний запис вайнберґівського пропаґатора [4] в $2J+1$–компонентному формалізмі теорії поля. У голоморфному випадку коректний знак J позитивний [3], $J \geq 0$, і частинки описуємо симетричними спінорами ранґу $2J+1$ з непунктирними індексами. В антиголоморфному випадку $J \neq 0$ і частинки описуємо спінорами з пунктирними індексами. Зв'язок між знаком J і знаком енерґії показує, відповідно до звичайних міркувань [9], що зміна вибору крайових умов (13) рівнозначна зміні означення частинок і античастинок.

Зазначимо, що залежний від спіну множник у підінтеґральному виразі в (28) можна подати у вигляді $(2\varepsilon_\zeta \zeta_1 \hat{p} \bar{\zeta}_2)^{2J\varepsilon_\zeta}/(2J\varepsilon_\zeta)! = (2\varepsilon_\zeta \zeta_1 \hat{p} \bar{\zeta}_2)^{2J\varepsilon_\zeta}/\Gamma(2J\varepsilon_\zeta + 1)$, єдиному для башти всіх спінів, і такому, що має аналітичне продовження на "всі" комплексні J [13,14], важливе для теорії рухомих полюсів Редже і струнної теорії.

Зіставлення отриманого результату з результатом роботи [4] можна здійснити таким чином. Характеристики віґнерівської хвильової функції $u(p, \zeta; \sigma)$ визначаємо процедурою первинного квантування [3], тому вона підпорядкована спіновій в'язі $(\hat{S}_\zeta - J) = 0$ та, у голоморфному випадку, в'язі $\hat{\bar{d}}_\zeta u = 0$, де оператори індексних спінорів ζ реалізуються як оператори множення: $\hat{\zeta} = \zeta$, а оператори канонічно спряжених з ними імпульсів p_ζ — як оператори диференціювання: $\hat{p}_\zeta = -i\partial/\partial\zeta$. Унаслідок цього [3] $u(p, \zeta; \sigma) = e^{-\zeta \hat{p} \bar{\zeta}} [\zeta]^{J,\sigma}$, де $[\zeta]^{J,\zeta}$ — однорідний многочлен від ζ степеня $2J$, $\sigma = -J, -J = 1, \cdots, J-1, J$.

Важливо, що віґнерівську хвильову функцію довільного імпульсу одержуємо з хвильової функції стандартного імпульсу перетворенням тільки індексного спінора

$$u(p,\zeta;\sigma) = u(\overset{o}{p},\zeta B_p;\sigma),$$

де $B_p = B_p{}^+$ — оператор Віґнера, а $\overset{o}{p} = (m,0)$ — стандартний імпульс.

У системі спокою поліном $[\zeta]^{J,\sigma}$ задовольняє ту ж умову, що й віґнерівська хвильова функція: $(\hat{M}_3 - \sigma)u(\overset{o}{p},\zeta;\sigma) = 0$, де спінорна частина третьої компоненти моменту $\hat{M}_3 = \frac{1}{2}(-\zeta^1\frac{\partial}{\partial\zeta^1} + \zeta^2\frac{\partial}{\partial\zeta^2} + c.c.)$. Цим визначається степінь $(J-\sigma)$, з яким до $[\zeta]^{J,\sigma}$ входить координата $\zeta^{1,2}$ індексного спінора: $[\zeta]^{J,\sigma} = N_J\binom{2J}{J-\sigma}^{1/2}(\zeta^1)^{J-\sigma}(\zeta^2)^{J+\sigma}$. Тут $\binom{2J}{J-\sigma}$ — біномний коефіцієнт, який дозволяє ототожнити згортки за спінорними індексами та за проекцією спіну σ, а множник нормування N_J знаходиться нижче.

Для переходу до довільної системи відліку слід скористатися тим, що

$$[\zeta B]^{J,\sigma} = [\zeta]^{J,\sigma'} D^J(B)_{\sigma'}{}^{\sigma},$$

де B — довільна 2×2 матриця, а D^J — D-функції Віґнера.

Звичайна півторалінійна форма у просторі голоморфних функцій від індексного спінора індукує для поліномних функцій від ζ скалярний добуток у вигляді

$$(\varphi,\psi) = N\int d^2\zeta\, d^2\bar{\zeta}\, e^{-2\zeta\hat{p}\bar{\zeta}}\bar{\varphi}\psi. \tag{29}$$

Цей скалярний добуток для однорідних функцій степеня J можна записати в термінах диференціяльного оператора

$$(\varphi,\psi) = \frac{2^{-(2J+2)}}{(2J)!m^{4J}}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}\hat{p}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\right)^{2J}\bar{\varphi}^J\psi^J\cdot N\cdot\frac{4\pi^2}{m^2}. \tag{30}$$

Права частина в (30) з точністю до множника збігається з відомим виразом (див., напр., [14], де загальний множник не фіксований). Тепер з умови ортонормованости $([\zeta]^{J',\sigma'},[\zeta]^{J,\sigma}) = \delta_{J'J}\delta_{\sigma'\sigma}$ легко знайти нормування базисних симетричних спінорів $[\zeta]^{J,\sigma}$. В обчисленні достатньо обмежитися випадком $\sigma = -J$: $N_J{}^2 = \frac{2^{2J+2}}{(2J)!m^{2J}}\cdot\frac{m^2}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{N}$. Множник нормування N знаходимо з умови обернення в одиницю цього виразу за $J=0$: $N = m^2/\pi^2$.

Тепер для одержання вайнберґового пропаґатора необхідно проінтеґрувати за початковим ζ_i та кінцевим ζ_f індексними спінорами підінтеґральний вираз у (28), помножений на $[\zeta_i]^{J,\sigma}[\bar{\zeta}_f]^{J,\sigma}$, за мірою з (29). Отримаємо у відповідності з [4] пропаґатор

$$G^J_{\sigma'\sigma}(x) = -im^{-2J}\Pi^J_{\sigma'\sigma}(i\partial)\Delta^C(x), \tag{31}$$

де

$$\Delta^C(x) = (2\pi)^{-4}\int d^4p e^{ipx}/(p^2+m^2-i0)$$

— причинна функція Ґріна скалярного поля, а $(2J+1)\times(2J+1)$–компонентна матриця $\Pi^J_{\sigma'\sigma}$ — визначається тотожностями в наступному ланцюжку

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2J)!}(2\zeta_f\hat{p}\bar{\zeta}_i)^{2J} &= \frac{1}{(2J)!}((\zeta_f B_p)2\hat{\overset{o}{p}}(B_p\bar{\zeta}_i))^{2J} \equiv [\zeta_f B_p]^{J,\sigma'}\Pi^J_{\sigma'\sigma}(\overset{o}{p})[B_p\bar{\zeta}_i]^{J,\sigma}\\ &= [\zeta_f]^{J,\sigma'}\Pi^J_{\sigma'\sigma}(p)[\bar{\zeta}_i]^{J,\sigma} \equiv p_{\mu_1}\cdots p_{\mu_{2J}}[\zeta_f]^{J,\sigma'}t^{\mu_1\cdots\mu_{2J}}_{\sigma'\sigma}[\bar{\zeta}_i]^{J,\sigma}(-1)^{2J}.\end{aligned} \tag{32}$$

При зіставленні треба ввести додаткові множники $\frac{1}{\pi}$ і $2i$, що пов'язані з різницею в уведенні полюсного множника до підінтеґрального виразу при описанні спіну в нашому підході і в підході роботи [4].

Властивості величин $t^{\mu_1\cdots\mu_{2J}}_{\sigma'\sigma}$ і $\Pi^J_{\sigma'\sigma}(p)$ докладно описані в [4]. Зокрема, в (32) істотно використано те, що величини $t^{\mu_1\cdots\mu_{2J}}_{\sigma'\sigma}$

а) симетричні за 4–векторними індексами;

б) безслідові за цими 4–векторними індексами;

в) є тензорами $D^J(A)\Pi^J(p)D^J(A)^+ = \Pi^J(p')$, де $A\in sL(2,C)$, $\hat{p'} = A\hat{p}A^+$.

Незвідність подань групи обертань у системі спокою, яка є автоматичним наслідком моделі, що розглядається, і лема Шура означають, що величина $\Pi(p)$ кратна одиничній матриці і нормована так, що $\Pi^J_{\sigma'\sigma}(p) = m^{2J}\delta_{\sigma'\sigma}$.

Тепер зв'язок між виразами (28) і (31) уже цілком очевидний.

Обчислення для безмасового випадку, а також для спінової частинки у формулюванні з діраківськими індексними бозе–спінорами ((2J + 1)–компонентний формалізм теорії поля) і для вищих просторово–часових вимірностей, як і для суперсиметричних теорій, будуть зроблені в наступних роботах.

Автори вдячні І. А. Бандосові, Д. П. Сорокіну, О. Ю. Нурмагамбетову (ННЦ ХФТІ, Харків) за гостинність і корисні дискусії. Дякуємо Є. О. Іванову і С. О. Кривоносові (ОІЯІ, Дубна, Росія) за гостинність, а А. І. Пашневу також і за надану літературу. Один з нас (В. З.) дякує О. О. Капустнікову за продуктивне обговорення κ–симетрії і А. І. Ахієзерові за корисну критику.

---

[1] E. S. Fradkin, G. A. Vilkovisky, Phys. Lett. B **55**, 224 (1975); I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky, Phys. Lett. B**69** 309 (1977); E. S. Fradkin, T. E. Fradkina, Phys. Lett. B **72**, 343 (1978); I. A. Batalin, E. S. Fradkin, in *Proceeding of the internation seminar "Group theoretical methods in physics", Vol. 2* (Zvenigorod, 1979), p. 247.

[2] S. Monaghan, Phys. Lett. B **181**, 101 (1986); C. Batlle, J. Gomis, J. Roca, Phys. Rev. D **40**, 1950 (1989).

[3] В. Г. Зима, С. А. Федорук, Письма журн. эксп. теор. физ. **61**, 241 (1995).

[4] S. Weinberg, Phys. Rev. B **133**, 1318 (1964).

[5] M. Henneaux, C. Teitelboim, J. D. Vergara. Nucl. Phys. B **387**, 391 (1992).

[6] Ю. Весс, Дж. Беггер, *Суперсимметрия и супергравитация* (Мир, Москва, 1986).

[7] R. Casalbuoni, Nuovo Cimento A **35**, 377 (1976); L. Brink, J. H. Schwarz, Phys. Lett. B **100**, 310 (1981).

[8] П. А. М. Дирак, *Лекции по квантовой механике* (Мир, Москва, 1968).

[9] C. Teitelboim, Phys. Rev. D **25**, 3159 (1982).

[10] E. S. Fradkin, A. A. Vilkovisky, CERN Report TH-2332, 1977; S. A. Frolov, A. A. Slavnov, Phys. Lett. B **208**, 245 (1988).

[11] I. Bandos, A. Maznytsia, I. Rudychev, D. Sorokin, Int. J. Mod. Phys. A **12**, 3259 (1997).

[12] M. Henneaux, Phys. Rep. **126**, 1 (1985).

[13] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин, *Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений (Обобщенные функции. Вып.5)* (Физматгиз, Москва, 1962).

[14] Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, А. І. Оксак, І. Т. Тодоров, *Общие принципы квантовой теории поля* (Наука, Наука, 1987).

WEINBERG PROPAGATOR OF A MASSIVE PARTICLE WITH AN ARBITRARY SPIN

V. G. Zima[1], S. O. Fedoruk[2]
[1] *Kharkiv State University,*
4 Svoboda Sq., Kharkiv, UA–310077, Ukraine
e–mail: zima@postmaster.co.uk
[2] *Ukrainian Engineering–Pedagogical Academy,*
16 Universytetska Str., Kharkiv, UA–310003, Ukraine
e–mail: fed@postmaster.co.uk

The transition amplitude is obtained for a free massive particle of an arbitrary spin by calculating the path integral in the index–spinor formulation within the BFV–BRST approach. None renormalizations of the path integral measure were applied. The calculation has given the Weinberg propagator written in the index–free form with the use of an index spinor. The choice of boundary conditions on the index spinor determines holomorphic or antiholomorphic representation for the canonical description of particle/antiparticle spin.