ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 3, № 1 (1999) с. 37–41

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 3, No. 1 (1999) p. 37–41

ЗМІНА ФРАКТАЛЬНОЇ ВИМІРНОСТИ СТОХАСТИЧНОЇ СИСТЕМИ З КОЛЬОРОВИМ МУЛЬТИПЛІКАТИВНИМ ШУМОМ

Д. О. Харченко
Сумський державний університет,
вул. Римського–Корсакова 2, Суми, 244007, Україна
(Отримано 26 жовтня 1998)

Для системи з кольоровим мультиплікативним шумом показано, що нелінійність вихідного синергетичного потенціялу типу ϕ^{2+m} у рівнянні Ланжевена приводить до розширення фазового простору стохастичної системи. На прикладі системи популяційної динаміки із часом кореляції шуму $\tau_c \to \infty$ виявлено, що внутрішня фрактальна вимірність визначається як $D = m$, тоді як для систем із білим шумом $D = 0$.

Ключові слова: стохастична система, фазовий перехід, фрактальна вимірність.

PACS number(s): 05.40.+j, 05.70.Fh, 64.60.–i, 82.20.Fd

Останнім часом у кінетичній теорії все більшої актуальности набувають стохастичні системи з мультиплікативним шумом, які застосовують до процесів фізики, хемії та біології. Методи дослідження таких систем приводять до аналізу рівняння еволюції функції розподілу. На основі структури рівняння Фоккера–Планка та його розв'язку виявляється інформація про нерівноважний фазовий перехід та особливості поведінки описуваної системи [1]. Хоча практичну цінність мають особливості функції розподілу (наприклад, максимуми тощо) [2], та деколи виникає чимало питань про їхню фізичну природу (відомим ефектом є утворення конденсату [3], що відповідає розбіжності стаціонарного розподілу). У такому разі дослідження у ймовірнісному напрямку доповнюється, наприклад, фрактальними уявленнями [4] про еволюцію стохастичної змінної $x(t)$. Як результат, фрактальний опис прояснює картину щодо поведінки системи.

Досить докладно вивченими є системи з білим шумом. Для них дослідження суто дифузійних процесів можна однаково проводити, виходячи як з рівняння Фоккера–Планка, так і з еволюційного рівняння для $x(t)$. Проте для систем з кольоровим шумом ці два підходи, як буде визначено нижче, не є рівноправними (окрім випадку малого кореляційного часу зовнішнього шуму $\tau_c \to 0$). Таке твердження випливає з аналізу узагальненого еволюційного рівняння для функції розподілу за умовою сильно корельованого зовнішнього шуму [5]. У нашій роботі буде розглянуто рівняння Фоккера–Планка для стохастичної системи, що описується потенціялом ϕ^{2+m} моделі з мультиплікативним шумом із часом релаксації $\tau_c \to \infty$ в порівнянні з мікроскопічним часом квантових переходів τ_0. Буде з'ясовано ефект розширення фазового простору стохастичної системи завдяки нелінійності типу ϕ^{2+m} синергетичного потенціялу у вихідному рівнянні Ланжевена.

Розглянемо стохастичну систему, еволюція якої описується рівнянням

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g(x)\nu(t), \tag{1}$$

де x — стохастична змінна, що представляє амплітуду гідродинамічної моди; детерміністична сила $f(x) = -\partial V/\partial x$ відповідає вихідному синергетичному потенціялові ϕ^{2+m} моделі ($m = 1,\ 2$), тобто

$$V \equiv V(x) = -\frac{\varepsilon x^2}{2} + \frac{x^{2+m}}{2+m}, \tag{2}$$

ε — керуючий параметр, що відіграє роль температури в потенціялі Ландау; мультиплікативний шум вибрано з амплітудою $g(x) = x$. Будемо вважати, що неперервний гаусівський шум $\nu(t)$ моделюється процесом Орнштайна–Уленбека

$$\frac{d\nu}{dt} = -\gamma\nu + \xi(t), \tag{3}$$

де $\gamma \equiv \tau_c^{-1}$ — кінетичний коефіцієнт, τ_c — час кореляції шуму ; $\xi(t)$ — білий шум, визначений моментами $\langle\xi(t)\rangle = 0$, $\langle\xi(t)\xi(t')\rangle = \sigma^2\delta(t-t')$ з інтенсивністю σ^2. Розв'язок системи рівняннь (1), (3) має безліч реалізацій, тому переходять до використання еволюційного рівняння густини ймовірности.

Дотримуючись методу побудови кінетичного рівняння [5], перейдемо до гамільтонового формалізму. Для цього потрібно ввести в розгляд поле φ, як канонічно спряжене з полем x. Тоді для x та φ можна записати рівняння руху

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H(x,\varphi)}{\partial\varphi}, \tag{4}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\partial H(x,\varphi)}{\partial x}, \tag{5}$$

де гамільтоніян визначаємо згідно з

$$H(x,\varphi)=\varphi f(x)+\varphi g(x)\nu(t). \tag{6}$$

Підстановка (6) у (4) приводить до рівняння Ланжевена (1). Для (5) можна записати формальний розв'язок

$$\varphi(t)=\varphi_0 \exp\left(-\int\limits_0^t d\tau\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x}+\nu(\tau)\frac{\partial g(x)}{\partial x}\right]\right). \tag{7}$$

Для подальшого опису доцільним є впровадження еволюційних операторів $\widehat{L}_f$, $\widehat{L}_g$, за рахунок чого вдається перейти до зображення взаємодії. Визначивши $\widehat{L}_f$, $\widehat{L}_g$ дужками Пуассона

$$\widehat{L}_f=\{\varphi f(x),\ldots\},\qquad \widehat{L}_g=\{\varphi g(x),\ldots\}, \tag{8}$$

отримуємо

$$\frac{dx}{dt}=-\left(\widehat{L}_f+\nu(t)\widehat{L}_g\right)x, \tag{9}$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=-\left(\widehat{L}_f+\nu(t)\widehat{L}_g\right)\varphi. \tag{10}$$

У результаті для точки фазового простору (x,φ) системи рівняннь (9), (10) з використанням (8), записаних у вигляді

$$\frac{dx}{dt}=f(x), \tag{11}$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=-\varphi\frac{\partial f}{\partial x}, \tag{12}$$

запроваджуємо в розгляд образ

$$X(x,t)=e^{-\widehat{L}_f t}x,\qquad \Phi(x,\varphi,t)=e^{-\widehat{L}_f t}\varphi \tag{13}$$

та прообраз

$$X^*(x,t)=e^{\widehat{L}_f t}x,\qquad \Phi^*(x,\varphi,t)=e^{\widehat{L}_f t}\varphi. \tag{14}$$

За умовою врахування (7) встановлюємо алгебраїчний зв'язок

$$\Phi(x,\varphi,t)=\varphi\Omega(x,t),\qquad \Phi^*(x,\varphi,t)=\varphi\Omega(x,-t), \tag{15}$$

де використано позначення

$$\Omega(x,t)=\exp\left(-\int\limits_0^t d\tau\frac{\partial f(X(x,\tau))}{\partial X(x,\tau)}\right). \tag{16}$$

Застосування проекційного формалізму [5] до рівняння неперервности густини ймовірности $P(x,\nu,t)$ дозволяє записати рівняння еволюції функції розподілу $P(x,t)$ у вигляді

$$\begin{aligned}\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}=&-\frac{\partial}{\partial x}\left(f(x)-g(x)\int\limits_0^t C_\nu(t,\tau)\left[\frac{\partial X^*(x,t-\tau)}{\partial x}\right]^{-1} g(X^*(x,t-\tau))\frac{\partial \ln\Omega(x,\tau-t)}{\partial x}d\tau\right)P(x,t)\\&+\frac{\partial g(x)}{\partial x}\int\limits_0^t C_\nu(t,\tau)\left[\frac{\partial X^*(x,t-\tau)}{\partial x}\right]^{-1}\frac{\partial}{\partial x}g(X^*(x,t-\tau))P(x,t)d\tau,\end{aligned} \tag{17}$$

де $C_\nu(t,\tau)$ — корелятор шуму, визначений формулою

$$C_\nu(t,\tau)=\frac{\sigma^2}{2\gamma}\exp(-\gamma|t-\tau|). \tag{18}$$

Для проведення інтеґрування в (17) визначимо $X(x,t)$ як розв'язок детерміністичного рівняння еволюції (11) (див. [5]), що дозволяє записати

$$X^m(x,t)=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\chi_m(x)e^{-m\varepsilon t}},$$
$$\chi_m(x)=x^{-m}-\varepsilon^{-1}. \tag{19}$$

Слід звернути увагу на те, що верхня межа в (17) не є сталою величиною. Як було з'ясовано в роботі [5], за умовою швидкого спадання корелятора $C_\nu(t)$ необхідно проводити обмеження для x на області інтеґрування за t. Механізм упровадження процедури обмеження полягає в розгляді релаксації детерміністичної системи (11). Згідно з (19) усі точки, що були віднесені на нескінченність у вихідний момент $t = 0$, релаксують при $t \neq 0$ за законом

$$\lim_{x\to\pm\infty} X^m(x,t) = \frac{\varepsilon}{1-e^{-m\varepsilon t}}. \qquad (20)$$

Таким чином, усі віднесені точки за час t будуть знаходитись на інтервалі

$$\Delta x \in \left[-\left(\frac{\varepsilon}{1-e^{-m\varepsilon t}}\right)^{1/m}, \left(\frac{\varepsilon}{1-e^{-m\varepsilon t}}\right)^{1/m}\right]. \qquad (21)$$

Отже, верхня межа інтеґрування в (17) може бути виражена через x, якщо увести параметр обрізання $\theta_m(x)$. Тоді для нашої системи, згідно з (20), отримуємо

$$\theta_m(x) = -\frac{1}{m\varepsilon}\ln\left(1-\frac{\varepsilon}{x^m}\right). \qquad (22)$$

У разі заміни верхньої межі інтеґрування параметром (22) канонізуємо (17), виділяючи ефективні сили

$$\Lambda(x) = -\frac{\sigma^2}{2}g(x)\int_0^{\theta_m(x)} d\tau e^{-\tau/\tau_c}\left[\frac{\partial X^*(x,\tau)}{\partial x}\right]^{-1} \times g(X^*(x,\tau))\frac{\partial \ln\Omega(x,-\tau)}{\partial x}, \qquad (23)$$

$$F(x) = -\frac{\sigma^2}{2}g(x)\int_0^{\theta_m(x)} d\tau e^{-\tau/\tau_c}\left[\frac{\partial X^*(x,\tau)}{\partial x}\right]^{-1} \times \frac{\partial g(X^*(x,\tau))}{\partial x} \qquad (24)$$

та дифузійну складову

$$\mathcal{D}(x) = \frac{\sigma^2}{2}g(x)\int_0^{\theta_m(x)} d\tau e^{-\tau/\tau_c}\left[\frac{\partial X^*(x,\tau)}{\partial x}\right]^{-1} \times g(X^*(x,\tau)), \qquad (25)$$

що дає змогу замість (17) записати

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(f(x)+\Lambda(x)+F(x)\right)P(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{D}(x)\frac{\partial}{\partial x}P(x,t). \qquad (26)$$

Наведемо методичне спостереження. Повертаючись до рівняння (26), зауважимо, що за формою воно являє собою (17), ми переписали його лише з уведенням позначень. Але саме такого вигляду набуває рівняння Фоккера–Планка, яке подане теорією, викладеною в огляді [8]. У нашому випадку рівняння Фоккера–Планка у вигляді (26) було встановлене розглядом суто кольорового шуму $\nu(t)$ з формалізмом за правилами Іто [6], тоді як у [8] використано модель білого шуму зі своєрідною "проблемою вибору точки диференцювання змінної $x(t)$" [7]. На наш погляд, доволі очевидним є висновок про те, що в наближенні кольорового шуму з $\tau_c \gg 1$, де враховано часовий інтервал релаксації детерміністичної системи, рівняння Фоккера–Планка у вигляді (26) є природним наслідком формалізму ймовірнісного опису стохастичних систем.

Рівнянню (26) можна надати еквівалентної форми ряду Крамерса–Мойала [1]

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(f(x)+\Lambda(x)+F(x)+\frac{\partial\mathcal{D}(x)}{\partial x}\right) \times P(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{D}(x)P(x,t), \qquad (27)$$

для якого записуємо відповідне рівняння Ланжевена

$$\frac{dx}{dt} = f(x)+\Lambda(x)+F(x)+\frac{\partial\mathcal{D}(x)}{\partial x}+\sqrt{\mathcal{D}(x)}\zeta(t) \qquad (28)$$

з білим шумом $\zeta(t)$.

Переходячи до встановлення конкретного вигляду коефіцієнтів, наведених у (23)–(25), запишемо допоміжні вирази

$$\frac{\partial X^*(x,t)}{\partial x} = \left[\frac{\partial X^*(x,t)}{\partial x}\right]^{1+m} e^{m\varepsilon t}, \qquad (29)$$

$$\frac{\partial \ln\Omega(x,-t)}{\partial x} = \frac{(m+1)x^{m-1}(e^{-m\varepsilon t}-1)}{\varepsilon + x^m(e^{-m\varepsilon t}-1)}. \qquad (30)$$

Оскільки побудоване рівняння Фоккера–Планка використовують у випадку сильнокорельованого шуму, то розглянемо границю $\tau_c \to \infty$. Тоді, згідно з означенням (23)–(25), маємо

$$\Lambda_m(x) = \frac{m+1}{2m}\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}x\left(\varepsilon + x^m\ln\left(1-\frac{\varepsilon}{x^m}\right)\right), \qquad (31)$$

$$F_m(x) = \frac{1}{2m}\frac{\sigma^2}{\varepsilon}x\ln\left(1-\frac{\varepsilon}{x^m}\right), \qquad (32)$$

$$\mathcal{D}_m(x) = \frac{1}{2m}\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}x^{2+m} \times \left(\frac{\varepsilon}{x^m}+\left(1-\frac{\varepsilon}{x^m}\right)\ln\left(1-\frac{\varepsilon}{x^m}\right)\right). \qquad (33)$$

Наявність логарифмічних функцій у (31)–(33) робить надто тяжким сприйняття сил $\Lambda(x)$, $F(x)$ та ефективного коефіцієнта дифузії $\mathcal{D}(x)$. Використовуючи припущення малого відношення ε/x^m та визначення його як параметра розкладання логарифмів, замість (31)–(33) отримуємо

$$\Lambda_m(x) = \frac{m+1}{4m}\sigma^2 x^{1-m}, \tag{31a}$$

$$F_m(x) = -\frac{\sigma^2}{2m}x^{1-m}\left(1+\frac{\varepsilon}{2x^m}\right), \tag{32a}$$

$$\mathcal{D}_m(x) = \frac{\sigma^2}{4m}x^{2-m}\left(1+\frac{\varepsilon}{x^m}\right). \tag{33a}$$

Виходячи з виразу $\Lambda(x)$ та $F(x)$, можна бачити, що ці сили мають протилежний напрямок, а при $m=1$ сила $\Lambda(x)$ вироджується в константу $\sigma^2/2$, тоді як $F(x)$ набуває особливости в точці $x=0$. Окрім того, коли $m=2$, то всі компоненти (31a)–(33a) набувають особливости поблизу $x=0$. Хоча члени ряду Крамерса–Мойала виявляють таку неприємну поведінку, однак легко можна переконатись, що на стаціонарному розв'язку рівняння Фоккера–Планка це ніяк не відчувається. Квазігібсівський стаціонарний розподіл для (27) не складається з множників, що розбігаються. Тому точка $x=0$ на стаціонарному розподілі не є особливою.

Розглянемо нестаціонарне рівняння (26). Як загальновідомо, його розв'язок одержують в автомодельному режимі. Припускаючи, що всі складові (26) є однорідними функціями часу, за рахунок масштабування поля $x(t)=ya(t)$ на довільному масштабі $a(t)$ (де y від часу не залежить) переходимо до зображення $P(x,t)=a^\alpha\rho(y)$, $f(x)+\Lambda(x)+F(x)=a^\beta\kappa(y)$, $\mathcal{D}(x)=a^\gamma\delta(y)$. У результаті кінетичне рівняння (26) набуває вигляду

$$\begin{aligned} &a^{-\beta}\dot a(\alpha\rho(y)-y\rho'(y)) \\ &= (\kappa(y)\rho(y))' + a^{\gamma-1-\beta}(\delta(y)\rho(y))'. \end{aligned} \tag{34}$$

Виконання умови нормування розподілу $P(x,t)$ надає α значення -1. З умови $a^{-\beta}\dot a \equiv c = \mathrm{const}$ випливає співвідношення $\gamma-\beta=1$. Унаслідок наведених положень вироджене рівняння другого порядку (34) за y допускає розв'язок

$$\rho(y) = N^{-1}\exp\left(-\int^y \frac{cy'+\kappa(y')}{\delta(y')}dy'\right), \tag{35}$$

а також надає змогу отримати вираз для масштабної функції $a(t)=(c(1-\beta)t)^{1/(1-\beta)}$. Установимо значення для β та γ. Для цього використовуємо дифузійне співвідношення $\langle x^2(t)\rangle = \mathcal{D}(x)t$ [4,10]. Виходячи з визначення Херста для однорідних функцій та застосовуючи його до масштабного множника, маємо $a(t)\propto t^H$, де H— показник Гьольдера, що дає максимальний порядок похідної неаналітичної функції $a(t)$. З визначення другого моменту стохастичної змінної $\langle x^2(t)\rangle \equiv a^2(t)\int y^2\rho(y)dy = a^2(t)B(y)$ випливає, що $a(t)\propto \langle x^2(t)\rangle^{1/2}$. Отже, використання наведених положень та вигляду $\mathcal{D}_m(x)\equiv\mathcal{D}_m(ya(t))$ для показника Гьольдера дає

$$H = m^{-1}, \tag{36}$$

а тому $\beta = 1-m$, $\gamma = 2-m$. Оскільки за значенням H встановлено фрактальні вимірності [11], то можна бачити, що локальна фрактальна вимірність дорівнює $D_{loc} = 2-1/m$, а внутрішня — $D_{in}=m$. Відомо, що саме остання відображає природу стохастичного процесу. Слід зазначити, що при знаходженні фрактальної вимірности ми виходили з форми ефективного коефіцієнта дифузії в рівнянні Фоккера–Планка. Таким чином, для системи з вихідним синергетичним потенціялом ϕ^4 моделі та мультиплікативною функцією $g(x)=x$ фазовий простір стане площиною ($D_{in}=2$), тоді як для ϕ^3 моделі цього потенціялу фазовий простір вироджується в лінію ($D_{in}=1$).

Для систем з білим шумом, а також систем з кольоровим шумом, де час кореляції τ_c є малим параметром, встановити значення показника Гьольдера так само можна і з рівняння Ланжевена. Покажемо, що для систем із сильно кольоровим шумом такий аналіз з рівняння Ланжевена не є правомірним. Для цього повернемося до системи рівнянь (1), (3). Діючи стандартними методами, розглянемо суто дифузійний процес $dx = g(x)\nu(t)dt$. Виражаючи з (1) νdt, для $(dx)^2 \equiv (x(t)-x(t_0))^2$, знаходимо $(dx)^2 = \gamma^{-2}g^2(x)(\sigma^2(dW)^2+(d\nu)^2-2\sigma dWd\nu)$. Залишаючи перший порядок за t, одержуємо $(dx)^2 = 2\gamma^{-2}g^2(x)\sigma^2(dW)^2$. Проведення усереднення з урахуванням $(dW)^2\sim t$ дозволяє записати $\langle x^2(t)\rangle = 2\gamma^{-2}g^2(x)t$. Як було з'ясовано раніше [3], при $g(x)=x$ для білого шуму $D_{in}=0$, такий же результат маємо і за вище отриманою формулою. Але якщо для білого шуму $D_{in}=0$ означає замерзання системи в точці, що відповідає розбіжності стаціонарного розв'язку рівняння Фоккера–Планка [3], то для системи кольорового шуму такий результат не має сенсу. Проте повний аналіз для нашої системи показує, що $D_{in}=m$ та стаціонарний розподіл не розбігаються ні в одній точці.

Отриманий висновок про розширення фазового простору розглянутої системи, завдяки нелінійності в рівнянні руху, є доволі очевидним, якщо звернутися до рівняння (17). Дійсно, при побудові рівняння Фоккера–Планка у формі (26) ми враховували ефект великого часу релаксації шумової складової в рівнянні Ланжевена, що привело до розгляду релаксації нашої системи. Як наслідок виникло перенормування дифузійної складової $\mathcal{D}(x)$, з вигляду якої визначено фрактальну вимірність. Проводячи аналогію з формалізмом, викладеним у роботах [3,4], можна сказати, що вибраний вихідний потенціял (2) збігається з формою ефективного потенціялу стаціонарного розподілу системи з білим шумом довільної амплітуди [4].

Таким чином, виявляється, що для фрактального аналізу систем з кольоровим шумом сильної кореляції ($\tau_c \to \infty$) слід ураховувати всі еволюційні складові (як детерміністичну, так і дифузійну). Ймовірнісний опис таких систем показує, що ефект великого часу кореляції шуму може приводити до перенормування детерміністичної сили $f(x)$, а також утворення ефективної дифузії, яка суттєво змінює уявлення про фрактальну природу дифузійного процесу.

---

[1] H. Risken, *The Fokker–Planck Equation* (Springer–Verlag, Berlin, 1989).

[2] В. Хорстхемке, Р. Лефевр, *Индуцированные шумом переходы* (Мир, Москва, 1990).

[3] А. И. Олемской, Д. О. Харченко, Металлофизика **18**, 3 (1996).

[4] А. И. Олемской, Усп. физ. наук **168**, 287 (1998).

[5] А. В. Солдатов, Теор. мат. физ. **85**, 288 (1990).

[6] К. В. Гардинер, *Стохастические методы в естественных науках* (Мир, Москва, 1986)

[7] Розв'язанню цієї задачі була присвячена робота [8], де для системи з білим шумом проблему неоднозначности диференцювання $x(t)$ розв'язували застосуванням калібрувальних перетворень до відповідної функції розподілу.

[8] Ю. Л. Климонтович, Усп. физ. наук **164**, 811 (1994).

[9] А. И. Олемской, Д. О. Харченко, Изв. вузов, физика, № 2, 121 (1996).

[10] A. I. Olemskoi, Physics Reviews, edited by I. M. Khalatnikov, **18**, Part 1, 1 (1996).

[11] Е. Федер, *Фракталы* (Мир, Москва, 1991).

THE CHANGE OF THE FRACTAL DIMENSION OF THE STOCHASTIC SYSTEM WITH COLORED MULTIPLICATIVE NOISE

D. O. Kharchenko
Sumy State University,
2 Rimskiy–Korsakov Str., Sumy, UA–244007, Ukraine

For the system with colored multiplicative noise the nonlinearity of the synergetic potential like ϕ^{2+m} model in Langevin equation was shown to be capable of providing the expanse of the stochastic system phase space. The concrete system of the population dynamics with the noise correlation time $\tau_c \to \infty$ is examined. The fractal dimension of that kind of a system is defined as $D = m$, in contrast to the system with a white noise were $D = 0$.