ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 3, № 2 (1999) с. 147–156

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 3, No. 2 (1999) p. 147–156

ДО РЕЛЯТИВІСТИЧНОЇ ТЕОРІЇ НАДПЛИННОЇ ДВОКОНДЕНСАТНОЇ СИСТЕМИ З УРАХУВАННЯМ “ДРАҐ”–ЕФЕКТУ

С. Й. Вільчинський
Київський університет імені Тараса Шевченка,
фізичний факультет, кафедра квантової теорії поля,
Київ, 252127, Україна

(Отримано 23 липня 1998 р.; в остаточному вигляді — 27 січня 1999 р.)

Дано феноменологічний вивід рівнянь релятивістичної теорії надплинности з двома типами конденсатів з урахуванням ефекту захоплення надплинними рухами один одного (драґ–ефекту), який розглянуто як взаємодію двох квантових скалярних полів. Знайдено термодинамічні тотожності для тиску, густини енерґії та вирази для тензора енерґії–імпульсу, струмів “захоплення”. Побудовано варіяційний принцип, який дозволяє вивести бездисипативні рівняння тришвидкісної релятивістичної гідродинаміки. Ці рівняння сформульовані також на основі формалізму Гамільтона. Розглянуто границю малих швидкостей, а також дисипативні члени в рівняннях гідродинаміки і знайдено рівняння для випадку, коли надплинні рідини обертаються.

Ключові слова: надплинність, релятивізм, конденсат, драґ–ефект.

PACS numbers: 47.75.+f, 67.40.Bz

I. ВСТУП

Вакуумні конденсати є релятивістичним аналогом квантових рідин типу надплинного гелію або “конденсату куперівських пар” у надпровідниках і характеризуються релятивістичною надплинною гідро– та термодинамікою. Основна відмінність цієї динаміки і термодинаміки від нерелятивістичної пов’язана із заміною групи Галілея, яка відіграє важливу роль у теорії надплинности Ландау [1–5], на групу Лоренца. Розвитку релятивістичної теорії надплинности з одним комплексним скалярним параметром порядку присвячені роботи [6–13]. Метою нашої роботи є феноменологічний вивід на основі методу і схеми, розвиненої для релятивістичної одноконденсатної надплинної системи в [6], лоренц–коваріянтних рівнянь, що описують гідродинаміку і термодинаміку релятивістичної надплинної системи, у якій співіснують два конденсати. Нерелятивістичні системи такого типу розглянуто в [9], [14–18]. Феноменологічний вивід рівнянь, які описують двоконденсатні релятивістичні надплинні системи, даний у [19], виконано в наближенні, що не враховує ефекту взаємного захоплення надплинних рухів один одного (драґ–ефект), який для нерелятивістичних двоконденсатних систем уперше відзначено в [16]. У нашій роботі цей ефект буде враховано.

Актуальність цієї задачі зумовлена тим, що, як показують сучасні дослідження у квантовій хромодинаміці, астрофізиці та космології, системи, у яких на певних етапах еволюції можуть співіснувати різнотипні релятивістські надплинні фази, виникають у різних фізичних процесах. Так, наприклад, два вукуумних кіральних конденсати — ліво– і правокіральний — можуть співіснувати у фізичному вакуумі квантової хромодинаміки [20]. Це зумовлено тим, що в КХД лаґранжіян для безмасових u– і d– кварків має ізотопічну $SU(2)$ і кіральну $SU(2)_L \times SU(2)_R$ симетрії. Унаслідок нестійкости початкової симетричної фази вакууму безмасових кваркових полів відносно куперівського спарювання відбувається фазовий перехід у несиметричну фазу зі складовими ліво– і правокіральними конденсатами $\langle 0|\bar{\psi}_L\psi_L|0\rangle$, $\langle 0|\bar{\psi}_R\psi_R|0\rangle$ [21]. Ці конденсати можуть взаємодіяти і характеризуються специфічною внутрішньою релятивістичною динамікою, подібною до динаміки мікроскопічних квантових рідин у надплинному гелії.

Еволюція подвійної зірки може також привести до співіснування і взаємодії двох релятивістичних надплинних фаз із різним параметром порядку. Для ядер нейтронних зірок надійно встановлено, що в них існує надплинна фаза, зумовлена куперівським спарюванням нуклонів [22]. Параметри нейтронних зірок (розмір порядку 10 км, густина внутрішнього рідкого ядра порядку $10^{14} - 10^{15}$ г/см^3) такі, що відношення ґравітаційного радіуса до радіуса зірки стає порядку одиниці, тобто нейтронні зірки мають сильне ґравітаційне поле і при їх розгляді треба враховувати ефекти загальної теорії відносности. Висока густина ядра нейтронної зірки приводить ще й до того, що ферміївська швидкість нуклонів стає порядку швидкости світла c. Перераховані вище факти зумовлюють релятивістичну динаміку надплинної фази нейтронної зірки. Якщо подвійна зірка складається з нейтронних зірок, то за рахунок акреції стає можливим співіснування і взаємодія надплинних фаз складових зірки.

Сучасна космологія також допускає виникнення систем із різними типами релятивістичних надплинних конденсатів. Як показано в [23], при підвищенні температури спонтанно порушені симетрії повинні відновлюватись. З цього виходить, що при охолодженні Всесвіт у перші миттєвості повинен пройти через певні етапи послідовних порушень симетрій. У найпростішій моделі $SU(5)$ це дві стадії

$$SU(5) \to SU(3) \times SU(2) \times U(1) \quad \text{при} \quad 10^{14}\text{ГеВ}$$

і

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1) \to SU(3) \times U(1) \quad \text{при} \quad 10^{2}\text{ГеВ},$$

кожна з виникненням свого хіґсівського конденсату [24]. У різних причинно–незв'язаних областях Всесвіту порушення симетрії відбувається незалежно, і тому в момент фазових перходів у кожній з великого числа причинно–незв'язаних областей фази хіґсівського конденсату фіксуються незалежно в цих областях і є нескорельованими одна з одною. Якщо припустити, що густина Всесвіту є більшою за критичну $\rho_c = 10^{-29}$ г/см^3, то на неминучій при цьому фазі колапсу Всесвіту області з нескорельованими фазами хіґсівських конденсатів будуть перетинатись і виникнуть системи, де співіснують різні релятивістичні надплинні конденсати.

Структура статті є такою. У розділі II надплинні швидкості конденсатів уводимо як ґрадієнти фаз хвильових функцій, що описують надплинні компоненти. Наклавши умову Пуанкаре–інваріянтности, формально запишемо тензор енерґії–імпульсу, 4–вектори струму, а також необхідні в подальшому варіяції для тензора енерґії–імпульсу, густин енерґії та імпульсу. Крім того, формально записуємо так звані "драґ"–струми, що будуть визначені через взаємодію конденсатів, яку розглядаємо як взаємодію скалярних квантових полів. Головною метою розділу III є отримання термодинамічних тотожностей. Уводимо необхідні термодинамічні змінні, а також чотиривимірні швидкості, для чого використовуємо визначені в розділі II тривимірні надплинні швидкості та густини імпульсів. Термодинамічні змінні записуємо як функції чотиривимірних швидкостей. У розділі IV на базі отриманої в розділі III термодинамічної тотожности для тиску варіяційним методом одержано рівняння руху системи, що розглядається. У розділі V показано, що знайдені в розділах III–IV співвідношення та рівняння приводять до законів збереження енерґії–імпульсу, струмів, а також дозволяють побудувати відповідно до формально побудованих у розділі II тензор енерґії–імпульсу, 4–вектори струму, густину 4–потоку ентропії і, крім того, дати фізичну інтерпретацію означеним у розділі II струмам і "драґ"–густинам. У розділі VI, використовуючи гамільтонів формалізм, виведено бездисипативні рівняння гідродинаміки системи, яка розглядається, і показано, що ці рівняння узгоджуються з раніше отриманими. У розділі VII розглянуто рух системи з нерелятивістичними швидкостями, а в розділах VIII та IX отримано рівняння з урахуванням дисипативних та вихрових процесів у системі.

II. НАДПЛИННІ ШВИДКОСТІ

Розглядатимемо релятивістичну квантову систему (квантову рідину, квантове поле зі спонтанно порушенною симетрією) у локально рівноважному стані нижче від критичної точки, коли в ній співіснують дві надплинні компоненти (два типи конденсатів) — кожна зі своїм "газом збуджень". "Гази" збуджень мають густини ρ_{n1} і ρ_{n2} відповідно і існують відповідно два струми, що зберігаються. Швидкості "газу" збуджень є однаковими, їх вирівнює в'язкість. Конденсати описуються комплексним параметром порядку кожен – ефективною хвильовою функцією

$$\psi_1(x^\mu) = \eta_1(x^\mu)\exp(i\alpha_1(x^\mu)), \quad (1)$$
$$\psi_2(x^\mu) = \eta_2(x^\mu)\exp(i\alpha_2(x^\mu)).$$

Ми вибираємо $c = 1$, $\hbar = 1$ і лоренц–метрику

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\delta_{ik} \end{pmatrix}.$$

У порівнянні з класичним випадком у системі, яка розглядається, з'являються додаткові змінні — дві надплинні швидкості $\mathbf{v}_{s1}$ і $\mathbf{v}_{s2}$, пов'язані з фазами відповідних хвильових функцій таким чином, що за відсутности вихорів маємо

$$\mathbf{v}_{s1} = \boldsymbol{\nabla}\alpha_1(x), \qquad \mathbf{v}_{s2} = \boldsymbol{\nabla}\alpha_2(x). \quad (2)$$

Необхідно зауважити, що, як і в [6], визначені співвідношенями (2) надплинні швидкості, на відміну від нормальної, не співвідносяться з просторовими компонентами будь–якого одиничного 4–вектора і відповідно можуть бути більшими від швидкости світла c; не може бути більшою від швидкости світла швидкість переносу маси, яка визначається співвідношенням j/ρ, де ρ є густина маси, j — густина потоку маси.

Співіснування двох конденсатів у системі, яка розглядається, приводить до взаємодії між ними типу взаємодії між квантовими скалярними полями. Нехай

$$L\ (\nabla_\mu q_1,\, q_1,\, \nabla_\mu q_2,\, q_2)$$

— Пуанкаре–інваріянтна мікроскопічна густина функції Лаґранжа цієї системи (індексами 1 і 2 позначено динамічні змінні, що належать до її складових), яка залежить від векторних змінних лише через 4–скаляри

$$u_1 \equiv \nabla_\mu q_1 \nabla^\mu q_1, \quad u_2 \equiv \nabla_\mu q_2 \nabla^\mu q_2$$

і, крім цього, унаслідок взаємодії буде також залежати від 4–скаляра

$$\omega \equiv \nabla_\mu q_1 \nabla^\mu q_1,$$

тобто:

$$L = F(q_1,\, q_2,\, u_1,\, u_2,\, \omega).$$

Пуанкаре–інваріянтність лаґранжіяна L (нехай G — відповідний ґенератор групи) згідно з теоремою Нетер веде до існування законів збереження з 4–густиною

$$j^\mu = 2\frac{\partial F}{\partial u_1}\left(\nabla_\mu q_1\right) G\, q_1 + \frac{\partial F}{\partial \omega}\left(\nabla_\mu q_2\right) G\, q_1 + \frac{\partial F}{\partial \omega}\left(\nabla_\mu q_1\right) G\, q_2 + 2\frac{\partial F}{\partial u_2}\left(\nabla_\mu q_2\right) G\, q_2. \qquad (3)$$

Урахування взаємодії між конденсатами приводить до появи у виразі (3) членів, пропорційних до $(\nabla_\mu q_1) G q_2$ і $(\nabla_\mu q_2) G q_1$, тобто j^μ має в загальному випадку таку структуру:

$$j^\mu = j^\mu_{11} + j^\mu_{12} + j^\mu_{21} + j^\mu_{22}, \qquad (4)$$

де

$$j^\mu_{11} = 2\frac{\partial F}{\partial u_1}\left(\nabla_\mu q_1\right) G\, q_1, \qquad j^\mu_{12} = \frac{\partial F}{\partial \omega}\left(\nabla_\mu q_1\right) G\, q_2,$$

$$j^\mu_{21} = \frac{\partial F}{\partial \omega}\left(\nabla_\mu q_2\right) G\, q_1, \qquad j^\mu_{22} = 2\frac{\partial F}{\partial u_2}\left(\nabla_\mu q_2\right) G\, q_2.$$

Інваріянтним відносно G буде і тензор енерґії–імпульсу

$$T_{\mu\nu} = \left(\frac{\partial F}{\partial u_1}\right) \nabla_\mu q_1 \nabla_\nu q_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \omega}\right) \nabla_\mu q_1 \nabla_\nu q_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \omega}\right) \nabla_\mu q_2 \nabla_\nu q_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial u_2}\right) \nabla_\mu q_2 \nabla_\nu q_2 - \delta^\mu_\nu F. \qquad (5)$$

Проведемо тепер локальне перетворення

$$\delta q_1 = \delta\alpha_1(x)\, G\, q_1, \qquad \delta q_2 = \delta\alpha_2(x)\, G\, q_2. \qquad (6)$$

Ураховуючи лінійність лаґранжіяна спінорних полів за ґрадієнтами q, знаходимо з (5)

$$\delta T^\mu_\nu = j^\mu_{11}\, \nabla_\nu\, \delta\alpha_1 + j^\mu_{12}\, \nabla_\nu\, \delta\alpha_2 + j^\mu_{21}\, \nabla_\nu\, \delta\alpha_1 + j^\mu_{22}\, \nabla_\nu\, \delta\alpha_2 - \delta^\mu_\nu \left(j^\sigma_{11}\, \nabla_\sigma\, \delta\alpha_1 + j^\sigma_{12}\, \nabla_\sigma\, \delta\alpha_2 + j^\sigma_{21}\, \nabla_\sigma\, \delta\alpha_1 + j^\sigma_{22}\, \nabla_\sigma\, \delta\alpha_2\right). \qquad (7)$$

Для густини енерґії $E = T^0_0$ і для густини імпульсу $g_i = T^0_i$ співвідношення (7) дає

$$\delta E = \mathbf{j}_{11}\, \boldsymbol{\nabla}\, \delta\alpha_1 + \mathbf{j}_{12}\, \boldsymbol{\nabla}\, \delta\alpha_2 + \mathbf{j}_{21}\, \boldsymbol{\nabla}\, \delta\alpha_1 + \mathbf{j}_{22}\, \boldsymbol{\nabla}\, \delta\alpha_2, \qquad (8)$$

$$\delta \mathbf{g} = \rho_{11}\, \boldsymbol{\nabla}\, \delta\alpha_1 + \rho_{12}\, \boldsymbol{\nabla}\, \delta\alpha_2 + \rho_{21}\, \boldsymbol{\nabla}\, \delta\alpha_1 + \rho_{22}\, \boldsymbol{\nabla}\, \delta\alpha_2.$$

Тут уведено тривимірні позначення $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$.

Нехай тепер G — ґенератор групи калібрувальних перетворень, тоді перетворення (6) приводить до зміни фаз конденсатів таким чином, що при відповідному нормуванні

$$\delta\, \mathbf{v}_{s1} = \boldsymbol{\nabla}\, \delta\alpha_1, \qquad \delta\, \mathbf{v}_{s2} = \boldsymbol{\nabla}\, \delta\alpha_2. \qquad (9)$$

Тоді, врахувавши (9), співвідношення (8) запишемо таким чином:

$$\begin{aligned} \delta E &= (\mathbf{j}_{11} + \mathbf{j}_{21})\, \delta\mathbf{v}_{s1} + (\mathbf{j}_{12} + \mathbf{j}_{22})\delta\mathbf{v}_{s2}, \\ \delta\mathbf{g} &= (\rho_{11} + \rho_{12})\delta\mathbf{v}_{s1} + (\rho_{21} + \rho_{22})\delta\mathbf{v}_{s2}. \end{aligned} \qquad (10)$$

Зауважимо, що тут не конкретизується вигляд локального фазового перетворення і калібрувального поля і не записується явно лаґранжіян, а отже, не отримано рівняння Ойлера–Лаґранжа руху системи, що буде зроблено варіяційним методом у розділі IV.

III. ТЕРМОДИНАМІЧНІ ТОТОЖНОСТІ

При отриманні термодинамічних тотожностей будемо виходити з локального розподілу Ґіббса, який задається функцією розподілу

$$\exp\left[\int d^3x\; T^{-1}(-P - E + v_n g + \mu_1\rho_1 + \mu_2\rho_2)\right], \qquad (11)$$

де $P(x)$ є тиск, $T(x)$ — температура, $\mathbf{v}_n(x)$ — нормальна швидкість, $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$ — хемічні потенціяли, $E(x)$ — густина енерґії, $g(x)$ — густина імпульсу, ρ_1, ρ_2 — густини мас складових системи.

Ентропія як мінус середнє логарифма функції розподілу має відповідно до (11) таку густину:

$$S = T^{-1}(P + E - v_n g - \mu_1\rho_1 - \mu_2\rho_2). \qquad (12)$$

Частину показника експоненти $-E + v_n g + \mu_1\rho_1 + \mu_2\rho_2$ у співвідношенні (11) можна записати як нульову компоненту від такого виразу:

$$-\beta^\nu T^\mu_\nu + T^{-1}(\mu_1 j^\mu_1 + \mu_2 j^\mu_2), \qquad (13)$$

де

$$\beta^\mu = (T^{-1}, T^{-1}\mathbf{v}_n),$$
$$j_1^\mu = j_{11}^\mu + j_{21}^\mu,$$
$$j_2^\mu = j_{12}^\mu + j_{22}^\mu.$$

Уважаючи $\mu_1 T^{-1}$, $\mu_2 T^{-1}$ і P скалярами, а β^μ — 4–вектором, ми забезпечимо інваріянтність розподілу Ґіббса. Варіяція умови нормування розподілу (11) за локальними T, v_n, μ_1, μ_2 і за надплинними швидкостями $\mathbf{v}_{s1}$, $\mathbf{v}_{s2}$ з урахуванням умови (12) дає термодинамічну тотожність для тиску P:

$$dP = \rho_1\, d\mu_1 + \rho_2\, d\mu_2 + SdT + \mathbf{g} d\mathbf{v}_n \qquad (14)$$
$$- (\mathbf{j}_1 - \rho_1 \mathbf{v}_n)\, d\mathbf{v}_{s1} - (\mathbf{j}_2 - \rho_2 \mathbf{v}_n)\, d\mathbf{v}_{s2}.$$

Перепишемо тотожність (14) у коваріянтному вигляді, для чого введемо вектор $\mathbf{w}$ згідно з означенням

$$\mathbf{g} = \rho_{11}\mathbf{v}_{s1} + \rho_{22}\mathbf{v}_{s2} + s\mathbf{w} + \rho_{21}\mathbf{v}_{s1} + \rho_{12}\mathbf{v}_{s2} \qquad (15)$$

і сконструюємо величини

$$v_{1\nu} = (\mu_1 + \mathbf{v}_{s1}\cdot\mathbf{v}_n,\ -\mathbf{v}_{s1}),$$
$$v_{2\nu} = (\mu_2 + \mathbf{v}_{s2}\cdot\mathbf{v}_n,\ -\mathbf{v}_{s2}), \qquad (16)$$
$$w_\nu = (T + \mathbf{v}_n\cdot\mathbf{w},\ -\mathbf{w}).$$

Вектор w_ν є релятивістичним аналогом так званого “теплового” вектора

$$\mathbf{A} = \frac{\rho_n}{s\rho}(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s),$$

який увів у теорію надплинного гелію П. Саффман [25] і для якого, як і для вектора надплинної швидкости $\mathbf{v}_s$, виконуються теореми Кельвіна, Лаґранжа і Бернуллі (так зване подвоєння числа гідродинамічних теорем у теорії надплинности) [26]. Тепер (14) можна записати в такому вигляді:

$$dP = j_1^\mu\, dv_{1\mu} + j_2^\mu\, dv_{2\mu} + s^\mu\, dw_\mu, \qquad (17)$$

де $s^\mu = (s,\, s\mathbf{v}_n)$ є густина 4–потоку ентропії.

Уведені в (16) величини є 4–векторами тому, що тиск P є інваріянтом, а величини j_1^μ, j_2^μ і s^μ — 4–векторами. Ураховуючи колінеарність 4–векторів s^μ і β^μ і рівність $\beta^\mu w_\mu = 1$, співвідношення (17) можна переписати таким чином:

$$dP = j_1^\mu\, dv_{1\mu} + j_2^\mu\, dv_{2\mu} - T\, s w_\mu\, d\beta^\mu, \qquad (18)$$

де $T\, s = w^\mu s_\mu$ є інваріянтом, що забезпечує інваріянтність тотожности (18).

Виразивши зі співвідношення (12) густину енергії E, знаходимо в термінах (15)

$$v_{10} = \mu_1 + \mathbf{v}_{s1}\cdot\mathbf{v}_n,$$
$$v_{20} = \mu_2 + \mathbf{v}_{s2}\cdot\mathbf{v}_n$$
$$w_0 = T + \mathbf{w}\cdot\mathbf{v}_n,$$
$$E = \rho_1\cdot v_{10} + \rho_2\cdot v_{20} + s\cdot w_0 - P. \qquad (19)$$

Густина енергії є функцією $E(\rho_1,\, \rho_2,\, v_{s1},\, v_{s2},\, w)$, диференціял якої отримуємо з (17) і (19) у такому вигляді:

$$dE = v_{10}\cdot d\rho_1 + v_{20}\cdot d\rho_2 + w_0\cdot ds \qquad (20)$$
$$- \mathbf{j}_1\cdot d\mathbf{v}_{s1} - \mathbf{j}_2\cdot d\mathbf{v}_{s2} - s\mathbf{v}_n\cdot d\mathbf{w}.$$

IV. ВАРІЯЦІЙНИЙ ПРИНЦИП

Сформулюємо тепер бездисипативні рівняння гідродинаміки релятивістичної двоконденсатної надплинної системи, яку розглядаємо. Будемо виводити їх, виходячи з принципу найменшої дії. Як видно зі структури тензора енергії–імпульсу (5), тиск Р згідно з рівняннями руху повинен збігатися з густиною функції Лаґранжа L.

Для отримання L з функції $P(v_{1\mu}, v_{2\mu}, w_\mu)$ в останній ми зробимо підстановку (користуємось співвідношеням (17)):

$$v_{1\mu} = -\nabla_\mu \alpha_1, \qquad (21)$$
$$v_{2\mu} = -\nabla_\mu \alpha_2,$$
$$w_\mu = -\nabla_\mu \xi - \phi \nabla_\mu \gamma.$$

Зміст змінних α_1, α_2, ξ, ϕ, γ виясняється з просторових компонент рівняння (21). Для v_{μ_1}, v_{μ_2} ці компоненти збігаються з (2), тобто α_1, α_2 є фазами хвильових функцій відповідних конденсатів, а для w_μ просторова компонента має вигляд

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\nabla}\xi + \phi\boldsymbol{\nabla}\gamma, \qquad (22)$$

тобто змінні ξ, ϕ, γ відповідають трьом незалежним ступеням вільности $\mathbf{w}$, що аналогічно до випадку He–II [27], де для опису трьох ступенів вільности вводили змінні Клебша.

Варіювання P за відповідними змінними дає рівняння руху системи (враховано співвідношення (17) і (22)):

$$\delta P = \frac{\partial P}{\partial v_{1\mu}}\delta v_{1\mu} + \frac{\partial P}{\partial v_{2\mu}}\delta v_{2\mu} + \frac{\partial P}{\partial w_{\mu}}\delta w_{\mu} \tag{23}$$
$$= -j_1^{\mu}\delta\nabla_{\mu}\alpha_1 - j_2^{\mu}\delta\nabla_{\mu}\alpha_2 - s^{\mu}(\delta\nabla_{\mu}\xi + \delta(\phi\boldsymbol{\nabla}\gamma)).$$

З (23) ми можемо отримати

$$\nabla_{\mu}j_1^{\mu} = 0, \quad \nabla_{\mu}j_2^{\mu} = 0, \tag{24}$$

$$\nabla_{\mu}s^{\mu} = 0, \tag{25}$$

$$\nabla_{\mu}(\phi s^{\mu}) = 0, \qquad s^{\mu}\nabla_{\mu}\gamma = 0. \tag{26}$$

Рівняння (24), (25) являють собою закони збереження маси (тобто числа часток) й ентропії, а рівняння для ϕ з урахуванням (25) переписуємо у вигляді

$$s^{\mu}\nabla_{\mu}\phi = 0. \tag{27}$$

З (21), використовуючи (26), (27), отримаємо такі рівняння:

$$\nabla_{\mu}v_{1\nu} - \nabla_{\nu}v_{1\mu} = 0, \qquad \nabla_{\mu}v_{2\nu} - \nabla_{\nu}v_{2\mu} = 0, \tag{28}$$

$$s^{\mu}(\nabla_{\mu}w_{\nu} - \nabla_{\nu}w_{\mu}) = 0. \tag{29}$$

Співвідношення (28) і рівняння для швидкостей $\mathbf{v}_{s1}$, $\mathbf{v}_{s2}$ мають у собі умови $\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_{s1} = 0$, $\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_{s2} = 0$, а співвідношення (29) є рівнянням для величини $\mathbf{w}$, оскільки з чотирьох його компонент тільки три незалежні.

V. ТЕНЗОР ЕНЕРҐІЇ–ІМПУЛЬСУ

Отримані рівняння приводять до законів збереження енерґії–імпульсу

$$\nabla_{\mu}T_{\nu}^{\mu} = 0. \tag{30}$$

Узявши до уваги співвідношення (17) і (21), ми конструюємо тензор енерґії–імпульсу:

$$T_{\nu}^{\mu} = (j_{11}^{\mu} + j_{21}^{\mu})v_{1\nu} + (j_{12}^{\mu} + j_{22}^{\mu})v_{2\nu} + s^{\mu}w_{\nu} - \delta_{\nu}^{\mu}P. \tag{31}$$

Рівняння (30) випливає тепер з (24), (25), (28), (29). Для густини енерґії $E = T_0^0$ отримуємо з (31) вираз, тотожний (19), а для густини імпульсу $g_i = -T_i^0$ — тотожний (15). Компоненти $Q^i = T_0^i$ і $\Pi_k^i = -T_k^i$ тензора (31) дають густину потоку енерґії і тензор натягу відповідно. Помноживши (31) на β^{ν} і враховуючи співвідношення $\beta^{\nu}w_{\nu} = 1$ для густини 4–потоку ентропії, знаходимо

$$S^{\nu} = P\,\beta^{\nu} + \beta^{\mu}T_{\mu}^{\nu} - (j_{11}^{\nu} + j_{21}^{\nu})\beta^{\mu}v_{1\mu} \tag{32}$$
$$- (j_{12}^{\nu} + j_{22}^{\nu})\beta^{\mu}v_{2\mu}.$$

Нульова компонента (32) після перетворень збігається з (12). Далі, диференціюючи (32) і беручи до уваги (18), (31), а також колінеарність β^{ν} і S^{ν}, отримаємо

$$dS^{\mu} = -T^{-1}\mu_1\,dj_1^{\mu} - T^{-1}\mu_2\,dj_2^{\mu} + \beta^{\nu}\,dT_{\nu}^{\mu} \tag{33}$$
$$+ [\beta^{\nu}j_1^{\mu} - \beta^{\mu}j_1^{\nu}]\,dv_{1\nu} + [\beta^{\nu}j_2^{\mu} - \beta^{\mu}j_2^{\nu}]\,dv_{2\nu}.$$

Співвідношення (32), (33) є прямим узагальненням на випадок двоконденсатної надплиної системи виразів для класичних аналогів [16–18]. Для нерелятивістичних надплинних систем типу He^3–He^4 в (33) останні складові відсутні; члени $[\beta^{\nu}j_{21}^{\mu} - \beta^{\mu}j_{21}^{\nu}]dv_{1\nu}$ і $[\beta^{\nu}j_{12}^{\mu} - \beta^{\mu}j_{12}^{\nu}]dv_{2\nu}$ описують ефект захоплення кожним із надплинних рухів іншого (драґ–ефект), характерний для багатоконденсатних систем.

З огляду на інваріянтність тиску P він є такою функцією:

$$P = \Psi(I_1,\, I_2,\, I_3,\, I_4,\, I_5,\, I_6), \tag{34}$$

де

$$I_1 = 1/2\,g^{\mu\nu}v_{1\mu}v_{1\nu}, \quad I_2 = 1/2\,g^{\mu\nu}v_{2\mu}v_{2\nu},$$
$$I_3 = g^{\mu\nu}v_{1\mu}v_{2\nu}, \qquad I_4 = g^{\mu\nu}v_{1\mu}w_{\nu},$$
$$I_5 = g^{\mu\nu}v_{2\mu}w_{\nu}, \qquad I_6 = 1/2\,g^{\mu\nu}w_{\mu}w_{\nu}.$$

Обчислюючи тепер відповідно з (17) похідні від (34), ми отримаємо

$$j_1^{\mu} = j_{11}^{\mu} + j_{21}^{\mu} \tag{35}$$
$$= \left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_1}\right)v_1^{\mu} + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_3}\right)v_2^{\mu} + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_4}\right)w^{\mu},$$

$$j_2^{\mu} = j_{12}^{\mu} + j_{22}^{\mu} \tag{36}$$
$$= \left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_2}\right)v_2^{\mu} + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_3}\right)v_1^{\mu} + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_5}\right)w^{\mu},$$

$$S^{\mu} = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_4}\right)v_1^{\mu} + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_5}\right)v_2^{\mu} + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_6}\right)w^{\mu}. \tag{37}$$

З (35), (36) виходить, що в тришвидкісній релятивістичній гідродинаміці, замість густин надплинних частин, з'являються три незалежні величини ρ_{11}, ρ_{22}, $\rho_{12} = \rho_{21}$:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial I_1} = \rho_{11}, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} = \rho_{22},$$

$$\rho_{12} = \rho_{21} = \frac{\partial \Psi}{\partial I_3},$$

причому останні описують "драґ–ефект". Величини

$$\frac{\partial \Psi}{\partial I_4} = \rho_1 - \rho_{11} - \rho_{21} = \rho_{n1},$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial I_5} = \rho_2 - \rho_{22} - \rho_{12} = \rho_{n2}$$

визначають "газ збуджень" складових системи, а величина

$$\frac{\partial \Psi}{\partial I_6} = s$$

визначає густину ентропії. Просторові компоненти (35)–(37) дають вирази для $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{j}_2$ і $s\mathbf{v}_n$ через $\mathbf{v}_{s1}$, $\mathbf{v}_{s2}$, $\mathbf{w}$. Враховуючи співвідношення (15), усі векторні величини можна виразити через три незалежні величини $\mathbf{v}_{s1}$, $\mathbf{v}_{s2}$, $\mathbf{w}$. Підставивши (35)–(37) у (31) і піднявши індекс μ, отримаємо

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} = &\frac{\partial \Psi}{\partial I_1} v_1^\mu v_1^\nu + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} v_2^\mu v_2^\nu + \frac{\partial \Psi}{\partial I_3}(v_1^\mu v_2^\nu + v_1^\nu v_2^\mu) \\ &+ \frac{\partial \Psi}{\partial I_4}(v_1^\mu w^\nu + v_1^\nu w^\mu) + \frac{\partial \Psi}{\partial I_5}(v_2^\mu w^\nu + v_2^\nu w^\mu) \\ &+ \frac{\partial \Psi}{\partial I_6} w^\mu w^\nu - g^{\mu\nu} P. \end{aligned} \tag{38}$$

Таким чином, побудований тензор енергії–імпульсу симетричний. Усі співвідношення в цій частині справедливі при наявності ґравітаційного поля, але при цьому похідна ∇_μ є коваріянтною, а для самозамкнення системи рівнянь при наявності ґравітаційного поля необхідно додати рівняння Айнштайна, у яких $T^{\mu\nu}$ визначається (38).

VI. ГАМІЛЬТОНІВ ФОРМАЛІЗМ

Сформулюємо тепер знайдені бездисипативні рівняннння гідродинаміки двоконденсатної системи, яку розглядаємо, використовуючи гамільтонів формалізм. Як і в [6], дамо формулювання рівнянь при наявності ґравітаційного поля, у якому гідродинамічна дія має вигляд

$$\int d^4x \sqrt{-g}\; L(\nabla_\mu \alpha_1, \nabla_\mu \alpha_2, \nabla_\mu \xi, \nabla_\mu \gamma), \tag{39}$$

де $g = \det g_{\mu\nu}$ — визначник лоренц–метрики. Узагальненими координатами для цієї системи є α_1, α_2, ξ, γ, а відповідними узагальненими імпульсами з урахуванням (17), (21), (39) є

$$p_{\alpha_1} = \frac{\partial \sqrt{-g}\, L}{\partial \dot{\alpha}_1} = -\sqrt{-g}\,\rho_1, \tag{40}$$

$$p_{\alpha_2} = \frac{\partial \sqrt{-g}\, L}{\partial \dot{\alpha}_2} = -\sqrt{-g}\,\rho_2, \tag{41}$$

$$p_{\xi} = \frac{\partial \sqrt{-g}\, L}{\partial \dot{\xi}} = -\sqrt{-g}\, s, \tag{42}$$

$$p_{\gamma} = \frac{\partial \sqrt{-g}\, L}{\partial \dot{\gamma}} = -\sqrt{-g}\, s\phi. \tag{43}$$

Густина функції Гамільтона дорівнює

$$H = p_{\alpha_1}\dot{\alpha}_1 + p_{\alpha_2}\dot{\alpha}_2 + p_\gamma \dot{\gamma} + p_\xi \dot{\xi} - \sqrt{-g}\, L. \tag{44}$$

Гамільтонові рівняння для пар канонічно спряжених змінних (p_{α_1}, α_1), (p_{α_2}, α_2), (p_ξ, ξ), (p_γ, γ) мають з урахуванням тотожности (17) такий вигляд:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta p_\gamma} = -\mathbf{v}_n \boldsymbol{\nabla}\gamma, \tag{45}$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta p_{\alpha_1}} = -v_{10} = -\mu_1 - \mathbf{v}_n \boldsymbol{\nabla}\alpha_1, \tag{46}$$

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta p_{\alpha_2}} = -v_{20} = -\mu_2 - \mathbf{v}_n \boldsymbol{\nabla}\alpha_2, \tag{47}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta p_\xi} = -w_0 + \phi \mathbf{v}_n \boldsymbol{\nabla}\gamma = -T - \mathbf{v}_n \boldsymbol{\nabla}\gamma, \tag{48}$$

$$\frac{\partial \sqrt{-g}\, s\phi}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \gamma} = -\vec{\nabla}(\sqrt{-g}\, s\phi\, \mathbf{v}_n), \tag{49}$$

$$\frac{\partial \sqrt{-g}\,\rho_1}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \alpha_1} = -\boldsymbol{\nabla}(\sqrt{-g}\,\mathbf{j}_1), \tag{50}$$

$$\frac{\partial\sqrt{-g}\,\rho_2}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\alpha_2} = -\boldsymbol{\nabla}(\sqrt{-g}\,\mathbf{j}_2),$$

$$\frac{\partial\sqrt{-g}\,s}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\xi} = -\boldsymbol{\nabla}(\sqrt{-g}s\mathbf{v}_n). \qquad (51)$$

Отримані рівняння (45), (49) еквівалентні рівнянню (26); рівняння (46), (47), (48) — нульовій компоненті співвідношення (21); рівняння (50), (51) — рівнянням (24), (25) відповідно. Гамільтонів формалізм дозволяє сформулювати рівняння руху в термінах векторів $\mathbf{v}_{s1}$, $\mathbf{v}_{s2}$, $\mathbf{w}$. Для надплинних швидкостей з урахуванням співвідношень (2), (46), (47) маємо

$$\frac{\partial\mathbf{v}_{s1}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}(\mu_1 + \mathbf{v}_{s1}\mathbf{v}_n), \qquad (52)$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}_{s2}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}(\mu_2 + \mathbf{v}_{s2}\mathbf{v}_n),$$

Ці рівняння еквівалентні нульовій компоненті рівняння (28). Узявши до уваги (22), (45), (48), ми знаходимо для вектора $\mathbf{w}$

$$\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}(T + \mathbf{w}\mathbf{v}_n) + [\mathbf{v}_n, [\boldsymbol{\nabla}, \mathbf{w}]]. \qquad (53)$$

Це рівняння еквівалентне нульовій компоненті рівняння (29). Система (50), (51), (52), (53) повністю описує релятивістичну двоконденсатну надплинну систему, яку розглядаємо, тому що її макроскопічний стан у певний момент часу може бути охарактеризований заданням просторового розподілу ρ_1, ρ_2, s, $\mathbf{v}_{s1}$, $\mathbf{v}_{s2}$, $\mathbf{w}$. Праві частини згаданих співвідношень виражаються через похідні від функції $E(\rho_1, \rho_2, s, \mathbf{v}_{s1}, \mathbf{v}_{s2}, \mathbf{w})$ відповідно до співвідношення (20). Таким чином, задання цієї функції є достатнім, щоб виразити похідні від $\rho_1, \rho_2, s, \mathbf{v}_{s1}, \mathbf{v}_{s2}, \mathbf{w}$ через ці ж величини.

Гамільтонів формалізм, який тут використано, ідентичний формалізмові, розробленому в [27].

VII. НЕРЕЛЯТИВІСТИЧНІ ШВИДКОСТІ

Розглянемо рух системи з нерелятивістичними швидкостями $\mathbf{v}_{s1}$, $\mathbf{v}_{s2}$, $\mathbf{w}$. Будемо розглядати тиск як функцію інваріантів

$$P = \Psi(\mu_{01},\, \mu_{02},\, T_0,\, I_{01},\, I_{02},\, I_{03}). \qquad (54)$$

Тут μ_{01}, μ_{02} — інваріянтні хемічні потенціяли, T_0 є інваріянтна температура, I_{01}, I_{02}, I_{03} — інваріянтні квадрати відносних швидкостей. При умові v_{s1}, v_{s2}, $w \ll c$ і відсутності ґравітаційного поля

$$\begin{aligned}
&\mu_{01} \simeq \mu_1 + \mathbf{v}_{s1}\cdot\mathbf{v}_n - \frac{c^2}{2}\frac{v_{s1}^2}{\mu_1},\\
&\mu_{02} \simeq \mu_2 + \mathbf{v}_{s2}\cdot\mathbf{v}_n - \frac{c^2}{2}\frac{v_{s2}^2}{\mu_2},\\
&T_0 \simeq T,\\
&I_{01} \simeq \frac{\mu_1}{2c^2}\left(\mathbf{v}_n - \frac{c^2}{\mu_1}\mathbf{v}_{s1}\right)^2,\\
&I_{02} \simeq \frac{\mu_2}{2c^2}\left(\mathbf{v}_n - \frac{c^2}{\mu_2}\mathbf{v}_{s2}\right)^2,\\
&I_{03} \simeq c^{-2}\left(\frac{c^2\mathbf{v}_{s1}}{\mu_1} - \frac{c^2\mathbf{v}_{s2}}{\mu_2}\right)^2.
\end{aligned} \qquad (55)$$

Беручи до уваги (14), (54), (55) і вважаючи $\mu \sim c^2$, ми отримаємо в першому наближенні за $(v/c)^2$

$$\rho_1 = \frac{\partial\Psi}{\partial\mu_{01}}, \qquad \rho_2 = \frac{\partial\Psi}{\partial\mu_{02}}, \qquad s = \frac{\partial\Psi}{\partial T_0}, \qquad (56)$$

$$\mathbf{g}_1 = \rho_1\mathbf{v}_{s1} + \mathbf{g}_{n1} + \mathbf{g}_{21}, \qquad (57)$$

$$\mathbf{g}_2 = \rho_2\mathbf{v}_{s2} + \mathbf{g}_{n2} + \mathbf{g}_{12},$$

де

$$\mathbf{g}_{n1} \equiv \frac{\partial\Psi}{\partial I_{01}}\left(\frac{\mu_1\mathbf{v}_n}{c^2} - \mathbf{v}_{s1}\right),$$

$$\mathbf{g}_{n2} \equiv \frac{\partial\Psi}{\partial I_{02}}\left(\frac{\mu_2\mathbf{v}_n}{c^2} - \mathbf{v}_{s2}\right)$$

— густини відповідних нормальних імпульсів,

$$\mathbf{g}_{12} = -\mathbf{g}_{21} \equiv \frac{\partial\Psi}{\partial I_{03}}(\mathbf{v}_{s1} - \mathbf{v}_{s2})$$

— густина імпульсу "захоплення". Використовуючи (19), (56), (57), ми отримуємо

$$E = \mu_{01}\rho_1 + \mu_{02}\rho_2 + \mathbf{g}_{n1}\left(\mathbf{v}_n - \frac{c^2}{\mu_1}\mathbf{v}_{s1}\right) + \mathbf{g}_{n2}\left(\mathbf{v}_n - \frac{c^2}{\mu_2}\mathbf{v}_{s2}\right) + \mathbf{g}_{12}\left(\frac{c^2}{\mu_1}\mathbf{v}_{s1} - \frac{c^2}{\mu_2}\mathbf{v}_{s2}\right). \qquad (58)$$

Необхідно на завершення зауважити, що вирази (55)–(58) при відповідному переозначенні узгоджуються зі співвідношеннями, отриманими в [16], де розглянуто аналогічну нерелятивістичну систему.

VIII. ДИСИПАТИВНІ ПРОЦЕСИ

Розглядатимемо слабконерівноважний стан системи, близький до стану, що задається неоднорідним розподілом Гіббса, так, що гідродинамічний стан системи характеризується локальною температурою T і нормальною швидкістю β^μ, а також величинами $v_{1\mu}$, $v_{2\mu}$, які пов'язані з похідними від фаз α_1 α_2 співвідношеннями (2). Рівняння гідродинаміки з урахуванням дисипативних процесів мають вигляд законів збереження енергії–імпульсу (30) і маси (24), але в тензорі енергії–імпульсу і густинах 4–потоку маси, крім бездисипативних складових (які ми позначимо індексом "n"), з'являться дисипативні додатки (позначаються індексом "d"):

$$T^\mu_\nu = T^\mu_{n\nu} + T^\mu_{d\nu}, \tag{59}$$

$$j^\mu_1 = j^\mu_{1n} + j^\mu_{1d},$$

$$j^\mu_2 = j^\mu_{2n} + j^\mu_{2d}.$$

Бездисипативні величини виражаються через величини β^μ, $\boldsymbol{\nabla}\alpha_1(x)$, $\boldsymbol{\nabla}\alpha_2(x)$, а дисипативні члени виражаються через похідні від них. Для отримання шуканих виразів, урахувавши співвідношення (17), запишемо бездисипативну частину тензора енергії–імпульсу в такому вигляді:

$$T^\mu_\nu = j^\mu_1 v_{1\nu} + j^\mu_2 v_{2\nu} + +s^\mu w_\nu - \delta^\mu_\nu P \tag{60}$$

і вичислимо тепер величину $\nabla_\mu s^\mu_d$ відповідно до тотожности (33), у якій необхідно врахувати (2). Закони збереження мають місце для сумарних величин (59), тому ми отримаємо:

$$\nabla_\mu \left\{ s^\mu_d - \left(\frac{\mu_1}{T}\right) j^\mu_1 - \left(\frac{\mu_2}{T}\right) j^\mu_2 + \beta^\nu T^\mu_\nu \right\} = -T^\mu_\nu \nabla_\mu \beta^\nu$$

$$-j^\mu_{1d} \nabla_\mu \left(\frac{\mu_1}{T}\right) - j^\mu_{2d} \nabla_\mu \left(\frac{\mu_2}{T}\right) \tag{61}$$

Друга, третя і четверта складові в лівій частині (61) дають дисипативну густину 4–потоку ентропії, а права частина (61) — вираз для виробництва ентропії, тобто повинна бути додатно визначеною.

У лінійному наближенні будемо мати

$$\begin{pmatrix} j^\mu_{1d} \\ j^\mu_{2d} \\ T^\mu_{d\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^{\mu\lambda}_{11} & \xi^{\mu\lambda}_{12} & \xi^{\mu\lambda}_{1\kappa} \\ \xi^{\mu\lambda}_{21} & \xi^{\mu\lambda}_{22} & \xi^{\mu\lambda}_{2\kappa} \\ \xi^{\mu\lambda}_{1\nu} & \xi^{\mu\lambda}_{2\nu} & \xi^{\mu\lambda}_{\nu\kappa} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\nabla_\lambda \left(\frac{\mu_1}{T}\right) \\ -\nabla_\lambda \left(\frac{\mu_2}{T}\right) \\ \nabla_\lambda \beta^\kappa \end{pmatrix}$$

Тут ξ — матриця кінетичних коефіцієнтів, яка внаслідок симетрії Онзаґера є симетричною, тобто:

$$\xi^{\mu\lambda}_{ij} = \xi^{\lambda\mu}_{ij}, \quad \xi^{\mu\lambda}_{i\nu} = \xi^{\lambda\mu}_{i\nu}, \quad \xi^{\mu\lambda}_{\nu\kappa} = \xi^{\lambda\mu}_{\kappa\nu},$$

де $(i,j) = 1, 2$, а внаслідок симетрії тензора енерґії–імпульсу повинні мати місце співвідношення

$$\xi^{\mu\lambda}_{i\nu} = g^{\mu\tau} \xi^{\kappa\lambda}_{i\tau} g_{\nu\kappa}, \quad \xi^{\mu\lambda}_{\nu\rho} = g^{\mu\tau} \xi^{\kappa\lambda}_{\tau\rho} g_{\kappa\nu}.$$

Крім того, квадратична форма, побудована на матриці ξ, повинна бути додатно визначеною.

IX. ВИХРОВІ ЧЛЕНИ

Як відомо, при наявності обертання в системі значну роль у надплинних фазах відіграватимуть квантовані вихори. На серцевині вихорів будуть порушуватись умови потенціяльности (28) надплинних швидкостей. Наявність неперервно розподілених вихорів приводить до залежности тиску P від величин

$$\nabla_\mu v_{1\nu} - \nabla_\nu v_{1\mu}, \qquad \nabla_\mu v_{2\nu} - \nabla_\nu v_{2\mu}.$$

Фактично тиск P залежатиме від чотиривекторів $\omega^\nu_{1,2}$, які є релятивістичним узагальненням $\operatorname{rot} \mathbf{v}_{s1}$, $\operatorname{rot} \mathbf{v}_{s2}$:

$$\omega^\mu_1 = \frac{\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} v_{1\nu} \nabla_\lambda v_{1\rho}}{c^2\sqrt{-g}}, \qquad \omega^\mu_2 = \frac{\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} v_{2\nu} \nabla_\lambda v_\rho}{c^2\sqrt{-g}}. \tag{62}$$

Таким чином, тиск у випадку наявности в системі вихорів P стає функцією ще трьох інваріянтів

$$I_7 = 1/2\, g^{\mu\nu} \omega_{1\mu} \omega_{1\nu},$$

$$I_8 = 1/2\, g^{\mu\nu} \omega_{2\mu} \omega_{2\nu},$$

$$I_9 = g^{\mu\nu} \omega_{1\mu} \omega_{2\nu}.$$

У цьому випадку рівняння (24), (30) зберігають свій вигляд, але у виразах для векторів струму і тензора енерґії–імпульсу з'являються додаткові члени, зумовлені наявністю в системі вихрових збуджень. Так, струми тепер визначаються таким чином:

$$j^\mu_1 = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_1}\right) v^\mu_1 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_3}\right) v^\mu_2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_4}\right) w^\mu + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_7}\right) \omega^\mu_1 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_9}\right) \omega^\mu_2, \tag{63}$$

$$j_2^\mu = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_2}\right) v_2^\mu + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_3}\right) v_1^\mu + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_5}\right) w^\mu + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_8}\right) \omega_2^\mu + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_9}\right) \omega_1^\mu. \tag{64}$$

Два останні члени в отриманих виразах зумовлені наявністю вихрових збуджень у системі, причому останній член, пропорційний до $\frac{\partial\Psi}{\partial I_9}$, зумовлений ефектом взаємного захоплення компонентами одна одної. Тензор енерґії–імпульсу матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \frac{\partial\Psi}{\partial I_1} v_1^\mu v_1^\nu + \frac{\partial\Psi}{\partial I_2} v_2^\mu v_2^\nu + \frac{\partial\Psi}{\partial I_3}(v_1^\mu v_2^\nu + v_1^\nu v_2^\mu) + \frac{\partial\Psi}{\partial I_4}(v_1^\mu w^\nu + v_1^\nu w^\mu) + \frac{\partial\Psi}{\partial I_5}(v_2^\mu w^\nu + v_2^\nu w^\mu) + \frac{\partial\Psi}{\partial I_6} w^\mu w^\nu \\ &+ \frac{\partial\Psi}{\partial I_7}\omega_1^\mu\omega_1^\nu + \frac{\partial\Psi}{\partial I_8}\omega_2^\mu\omega_2^\nu + \frac{\partial\Psi}{\partial I_9}\left(\omega_1^\mu\omega_2^\nu + \omega_2^\mu\omega_1^\nu\right) - g^{\mu\nu}P \end{aligned} \tag{65}$$

Тут останні члени описують вклад вихрових збуджень у системі, при цьому останній член, пропорційний до $\frac{\partial\Psi}{\partial I_9}$, зумовлений “драґ”–ефектом. Тензор енерґії–імпульсу можна записати і таким чином:

$$T_\nu^\mu = \frac{\partial\Psi}{\partial v_{1\mu}} v_{\nu 1} + \frac{\partial\Psi}{\partial v_{2\mu}} v_{\nu 2} + \frac{\partial\Psi}{\partial v_{1\mu}} v_{\nu 2} + \frac{\partial\Psi}{\partial v_{2\mu}} v_{\nu 1} + 2\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial\Psi}{\partial\left(\nabla_\mu v_{\lambda i} - \nabla_\lambda v_{\mu i}\right)}\left(\nabla_\nu v_{\lambda i} - \nabla_\lambda v_{\nu i}\right) - g^{\mu\nu}P. \tag{66}$$

Рівняння для надплинних швидкостей (28) і ентропії (25) матимуть тепер такий вигляд:

$$\rho_{11} v_1^\mu \nabla_\mu v_{1\nu} = \left(\nabla_\nu v_{1\mu} - \nabla_\mu v_{1\nu}\right)\left\{\rho_{12} v_2^\mu + \rho_{n1} w^\mu + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_7}\right)\omega_1^\mu + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_9}\right)\omega_2^\mu\right\} \tag{67}$$

$$\rho_{22} v_2^\mu \nabla_\mu v_{2\nu} = \left(\nabla_\nu v_{2\mu} - \nabla_\mu v_{2\nu}\right)\left\{\rho_{21} v_1^\mu + \rho_{n2} w^\mu + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_8}\right)\omega_2^\mu + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_9}\right)\omega_1^\mu\right\} \tag{68}$$

$$\nabla_{nu} S^\nu = w_\mu \left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_7}\omega_1^\mu\omega_1^\nu + \frac{\partial\Psi}{\partial I_8}\omega_2^\mu\omega_2^\nu + \frac{\partial\Psi}{\partial I_9}\left(\omega_1^\mu\omega_2^\nu + \omega_2^\mu\omega_1^\nu\right)\right). \tag{69}$$

У цих рівняннях з’явились ненульові праві частини, зумовлені наявністю вихрових збуджень, причому останній член у кожному з рівнянь зумовлений “драґ”–ефектом. У правих частинах рівнянь для надплинних швидкостей члени, що пропорційні до ρ_{12} та ρ_{n_i}, визначають сили, що виникають в результаті взаємодії між сукупностями прямих вихрових збуджень різних типів та прямих вихрових збуджень кожного типу з “газом збуджень”; члени, пропорційні до $\frac{\partial\Psi}{\partial I_9}$, є повздовжною силою взаємного тертя між надплинними вихорами, викликаною “драґ–ефектом”; нарешті члени, пропорційні до

$$\left(\nabla_\nu v_{i\mu} - \nabla_\mu v_{i\nu}\right)\omega_i^\mu,$$

можна інтерпретувати як натяг відповідного вихору. Рівняння для надплинних швидкостей містять тільки три незалежні компоненти, оскільки при домноженні на відповідний добуток струмів $j_i^\mu j_i^\nu$ вони перетворюються в тотожність.

Термодинамічна тотожність (17) зберігає свій вигляд, але струми тут визначаються (63) і (64).

Таким чином, система лоренц–коваріянтних рівнянь, які описують релятивістичну двоконденсатну надплинну систему з урахуванням наявности в ній вихорів та дисипацій, включає рівняння для надплинних швидкостей (67), (68); рівняння збереження потоку маси (25), де $j_i^\mu = j_{in}^\mu + j_{id}^\mu$ і j_{in}^μ визначаються співвідношеннями (63), (64), а j_{id}^μ є:

$$j_{id}^\mu = -\xi_{i1}^{\mu\lambda}\nabla_\lambda\left(\frac{\mu_1}{T}\right) - \xi_{i2}^{\mu\lambda}\nabla_\lambda\left(\frac{\mu_2}{T}\right) + \xi_{i\kappa}^{\mu\lambda}\nabla_\lambda\beta^\kappa$$
$$i = 1,\ 2;$$

рівняння збереження енерґії–імпульсу (30), де $T^{\mu\nu} = T_n^{\mu\nu} + T_d^{\mu\nu}$ і $T_n^{\mu\nu}$ визначається (65), а $T_d^{\mu\nu}$ є:

$$T^{\mu}_{d\nu} = -\xi^{\mu\lambda}_{1\nu}\nabla_\lambda\left(\frac{\mu_1}{T}\right) - \xi^{\mu\lambda}_{2\nu}\nabla_\lambda\left(\frac{\mu_2}{T}\right) + \xi^{\mu\lambda}_{\nu\kappa}\nabla_\lambda\beta^\kappa;$$

рівняння для ентропії

$$\nabla_\mu\left\{s^\mu - \left(\frac{\mu_1}{T}\right)j^\mu_{1n} - \left(\frac{\mu_2}{T}\right)j^\mu_{2n} + \beta^\nu T^\mu_{n\nu}\right\} =$$
$$-T^\mu_{d\nu}\nabla_\mu\beta^\nu - j^\mu_{1d}\nabla_\mu\left(\frac{\mu_1}{T}\right) - j^\mu_{2d}\nabla_\mu\left(\frac{\mu_2}{T}\right)$$
$$+w_\mu\left(\frac{\partial\Psi}{\partial I_7}\omega^\mu_1\omega^\nu_1 + \frac{\partial\Psi}{\partial I_8}\omega^\mu_2\omega^\nu_2\right.$$
$$\left. + \frac{\partial\Psi}{\partial I_9}\left(\omega^\mu_1\omega^\nu_2 + \omega^\mu_2\omega^\nu_1\right)\right) \qquad (70)$$

і термодинамічну тотожність

$$dP = j^\mu_1\, dv_{1\mu} + j^\mu_2\, dv_{2\mu} + s^{'\mu}\, dw_\mu, \qquad (71)$$

де

$$j^\mu_i = j^\mu_{in} + j^\mu_{id},$$
$$s^{'\mu} = s^\mu - \left(\frac{\mu_1}{T}\right)j^\mu_{1n} - \left(\frac{\mu_2}{T}\right)j^\mu_{2n} + \beta^\nu T^\mu_{n\nu}.$$

На завершення зауважимо, що у границі, коли одна з надплиннних компонент є нульовою, отримані рівняння збігаються з відповідними рівняннями, отриманими в [6] для одноконденсатної системи.

Автор висловлює подяку П. І. Фоміну, Л. А. Булавіну та Е. В. Горбарові за цінні вказівки та корисне обговоренння результатів роботи.

---

[1] Л. Д. Ландау, Журн. эксп. теор. физ. **11**, 592 (1941).
[2] N. N. Bogolubov, Izv. Akad. Nauk., Ser. Fiz. **11**, 77 (1947).
[3] V. L. Ginzburg, L. P. Pitaevskii, Sov. Phys. JETP **34**, 64 (1964).
[4] I. M. Khalatnikov, *Introduction to the Theory of Superfluidity*, (Benjamin, New York, 1965).
[5] S. J. Putterman, *Superfluid Hydrodynamics* (North–Holland, 1974).
[6] V. V. Lebedev, I. M. Khalatnikov, Sov. Phys. JETP **56**, 923 (1982).
[7] I. M. Khalatnikov, V. V. Lebedev, Phys. Lett. A **91**, 70 (1982).
[8] П. И. Фомин, В. Н. Шадура, Докл. акад. наук, сер. А No. 6, 55 (1985).
[9] N. N. Bogolubov (jr.), M. Y. Kovalevskii, A. M. Kurbatov, S. V. Peletminskii, A. N. Tarasov, Sov. Phys. Usp. **34**, 1041 (1989).
[10] W. Israel, Phys. Lett. A **86**, 79 (1981).
[11] А. В. Прозоркевич, С. А. Смолянский, В. А. Самородов, Теор. мат. физ. **52**, 463 (1982).
[12] B. Carter, I. M. Khalatnikov, Phys. Rev. D **45**, 4536 (1992).
[13] B. Carter, D. Langlois, Phys. Rev. D **51**, 5855 (1995).
[14] I. M. Khalatnikov, Sov. Phys. JETP **5**, 542 (1957).
[15] V. P. Mineev, Sov. Phys. JETP **40**, 338 (1975).
[16] A. F. Andreev, E. P. Bashkin, Sov. Phys. JETP **42**, 164 (1975).
[17] M. Y. Kovalevskii, N. M. Lavrinenko, S. V. Peletminskii, Sov. J. Low Temp. Phys. **8**, 169 (1982).
[18] Г. Е. Воловиц, Журн. эксп. теор. физ. **67**, 143 (1978).
[19] S. I. Vilchinskii, P. I. Fomin, Sov. J. Low Temp. Phys. **21**, 7 (1995).
[20] Y. Nambu, G. Jona–Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961).
[21] P. I. Fomin, V. A. Miranskiy, Sov. J. Nucl. Phys. **35**, 1563 (1982).
[22] G. Baym, C. Pethick, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **17**, 415, (1979).
[23] D. A. Kirzhnits, A. D. Linde, Phys. Lett. B **42**, 471, (1972).
[24] D. A. Kirzhnits, A. D. Linde, Ann. Phys. (N. Y.) **101**, 195, (1976).
[25] P. G. Saffman, Phys. Fluids, **11**, 2505, (1968).
[26] S. J. Putterman, *Superfluid Hydrodynamics* (Amer. Elsevier Publish. Comp., Ins.–New York, 1974).
[27] В. Л. Покровский, И. М. Халатников, Письма журн. эксп. теор. физ. **23**, 310 (1976); Журн. эксп. теор. физ. **74**, 1974 (1976).

THE RELATIVISTIC THEORY OF SUPERFLUIDITY FOR A SYSTEM WITH TWO TYPES OF CONDENSATES TAKING INTO ACCOUNT THE EFFECT OF MUTUAL DRAG

S. Vilchynskyy
Faculty of Physics, Taras Shevchenko Kyiv University,
Kyiv, 252172, Ukraine
E–mail: sivil@ap3.bitp.kiev.ua

The phenomenological derivation of equations of relativistic superfluidity theory for systems with two types of condensates is given. The effect of mutual dragging of superfluid components is considered as a consequence of interaction of condensates treated as quantum scalar fields. Thermodynamics identities for the pressure, energy and expression for the energy–momentum tensor are found. The limit of low velocities is considered. Dissipative terms in the hydrodynamics equations and proper vibrations of the vortex lattice are considered.