ДО ТЕОРІЇ СТРУМОВИХ СТАНІВ У НАДПРОВІДНИХ КОНТАКТАХ

А. Свідзинський, О. Вілігурський, О. Бірук, А. Ракуцький
Волинський державний університет імені Лесі Українки,
кафедра теоретичної і математичної фізики,
проспект Волі, 13, Луцьк, 43000, Україна
(Отримано 8 червня 1999 р.)

Побудовано систему квазікласичних рівнянь для надпровідних контактів розкладом функцій Ґріна за базисом із парних і непарних розв'язків одночастинкового рівняння Шрединґера. Знайдені розв'язки для квазікласичних функцій Ґріна в моделі з кусково–сталим параметром упорядкування мають симетричну асимптотичну поведінку в глибині надпровідника. Обчислено надпровідний струм у точковому та в несиметричному SNINS–контактах.

Ключові слова: надпровідник, тунельний контакт, параметр упорядкування, функція Ґріна.

PACS numbers: 74.50.+r

I. ВСТУП

Для обчислення струму в надпровідних контактах різних типів найчастіше користуються системою рівнянь Горькова для функцій Ґріна. Оскільки точний розв'язок цих рівнянь за наявности просторової неоднорідности неможливий, вдаються до квазікласичних рівнянь [1]. У них нехтується дрібномасштабними змінами на довжинах порядку атомної і залишаються лише великомасштабні зміни на довжинах порядку довжини когерентности ξ_0. Для їх побудови в [1] функції Ґріна розкладали за базисними функціями, розв'язками одночастинкового рівняння Шрединґера, що описують хвилі, які падають на бар'єр зліва і справа, і виконували потрібне усереднення. Розв'язки побудованих таким чином квазікласичних рівнянь для функцій Ґріна мають несиметричні відносно початку координат крайові умови на нескінченності. Щоб отримати симетричні умови, у роботі [2] використано інший базис — плоскі хвилі. Крайові умови на нескінченності при цьому стають стандартними, однак втрачається неперервність функцій Ґріна на бар'єрі. Це пов'язано з тим, що плоскі хвилі не є розв'язками рівняння Шрединґера цієї задачі.

У цій роботі запропоновано побудову рівнянь розкладом функцій Ґріна за базисом з власних функцій одночастинкового рівняння Шрединґера, які є парними або непарними (розділ II).

На основі отриманих рівнянь будується теорія точкового контакту та контакту SNINS (надпровідник — нормальний метал — ізолятор — нормальний метал — надпровідник) (розділи III і IV відповідно).

II. ПОБУДОВА РІВНЯНЬ ДЛЯ ФУНКЦІЙ ҐРІНА ТУНЕЛЬНОГО КОНТАКТУ В СИМЕТРИЧНОМУ БАЗИСІ

Для розрахунку струмових станів у надпровідних тунельних контактах необхідно скласти й розв'язати систему рівнянь для функцій Гріна надпровідника, згладжених по атомних довжинах. У [1] для цього використано модель з δ–функційним потенціяльним бар'єром $U(\mathbf{r}) = U(z) = U_0\delta(z)$ і введено базис із розв'язків одночастинкового рівняння Шрединґера:

$$\psi_{\mathbf{p}}^{(i)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} e^{i\mathbf{p}_\perp \mathbf{r}} \chi_{p_z}^{(i)}(z), \qquad i = 1, 2, \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\chi_{p_z}^{(1)}(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \{\theta(-z)(e^{ip_z z} + C_{p_z}^{(1)} e^{-ip_z z}) \\ &\quad + \theta(z) C_{p_z}^{(2)} e^{ip_z z}\}, \\ \chi_{p_z}^{(2)}(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \{\theta(-z) C_{p_z}^{(2)} e^{-ip_z z} \\ &\quad + \theta(z)(e^{-ip_z z} + C_{p_z}^{(1)} e^{ip_z z})\}.\end{aligned} \tag{2}$$

Тут $C_{p_z}^{(1)} = -\dfrac{iK}{p_z + iK}$, $C_{p_z}^{(2)} = \dfrac{p_z}{p_z + iK}$ — амплітуди хвиль, що відбиваються і проходять відповідно: $D = |C_{p_z}^{(2)}|^2$ — коефіцієнт проходження, $R = |C_{p_z}^{(1)}|^2$ – коефіцієнт відбиття; $K = mU_0$, $D + R = 1$, $p_z \geq 0$. Хвильові функції нормовані в нескінченному об'ємі на δ–функцію.

Матричну функцію Ґріна

$$\hat{G}_{\omega_n}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \begin{pmatrix} G_{\omega_n}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) & -\tilde{F}_{\omega_n}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\ -F_{\omega_n}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) & \tilde{G}_{\omega_n}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \end{pmatrix},$$

що входить у рівняння Горькова

$$\begin{aligned}\{i\omega_n - \sigma_z(\hat{\xi}_1 + U(\mathbf{r}_1)) - \hat{\Delta}(\mathbf{r}_1)\}\hat{G}_{\omega_n}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\ = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2),\end{aligned} \tag{3}$$

де

$$\hat{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta^* & 0 \end{pmatrix},$$

зручно розкласти за цим базисом:

$$\hat{G}_{\omega_n}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{i,k} \int d\mathbf{p_1} d\mathbf{p_2} \hat{G}^{i,k}_{\omega_n}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \psi^{(i)}_{\mathbf{p_1}}(\mathbf{r}_1) \psi^{*(k)}_{\mathbf{p_2}}(\mathbf{r}_2), \quad (4)$$

при цьому

$$\hat{G}^{i,k}_{\omega_n}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \int \hat{G}_{\omega_n}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \psi^{*(i)}_{\mathbf{p_1}}(\mathbf{r}_1) \psi^{(k)}_{\mathbf{p_2}}(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (5)$$

Розв'язки побудованих таким чином квазікласичних рівнянь для функцій $\hat{G}^{i,k}_{\omega_n}$ мають несиметричні відносно початку координат крайові умови на нескінченності [1]. У роботі [2] використано інший базис — плоскі хвилі:

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}_\perp \mathbf{r} + ip_z z} \quad \text{і} \quad \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}_\perp \mathbf{r} - ip_z z}, \quad p_z \geq 0.$$

З огляду на зазначений у вступі розрив на бар'єрі функцій Ґріна, побудованих із використанням такого базису, реалізуємо ще одну можливість і виконаємо розклад функцій Ґріна за базисом із парних і непарних розв'язків одночастинкового рівняння Шредингера:

$$\tilde{\psi}^{(i)}_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} e^{i\mathbf{p}_\perp \mathbf{r}} \tilde{\chi}^{(i)}_{p_z}(z), \qquad i = 1, 2, \quad (6)$$

де

$$\tilde{\chi}^{(1)}_{p_z}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin p_z z, \quad (7)$$

$$\tilde{\chi}^{(2)}_{p_z}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{D} \cos p_z z + \sqrt{R} \operatorname{sign} z \sin p_z z \right).$$

Функції $\tilde{\chi}^{(1)}$ і $\tilde{\chi}^{(2)}$ визначаються з точністю до незалежних від z фазових множників, різних для різних p_z. Будемо покладати ці фазові множники рівними одиниці.

Підставимо в (5) розклад $\hat{G}_{\omega_n}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ за новим базисом:

$$\hat{G}_{\omega_n}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{i',k'} \int d\mathbf{p}'_1 d\mathbf{p}'_2 \hat{\tilde{G}}^{i,k}_{\omega_n}(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2) \tilde{\psi}^{(i')}_{\mathbf{p}'_1}(\mathbf{r}_1) \tilde{\psi}^{*(k')}_{\mathbf{p}'_2}(\mathbf{r}_2).$$

Тоді

$$\hat{G}^{i,k}_{\omega_n}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \sum_{i',k'} \int d\mathbf{p}'_1 d\mathbf{p}'_2 \langle \psi^{(i)}_{\mathbf{p_1}}(\mathbf{r}_1) | \tilde{\psi}^{(i')}_{\mathbf{p}'_1}(\mathbf{r}_1) \rangle \hat{\tilde{G}}^{i',k'}_{\omega_n}(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2) \langle \tilde{\psi}^{(k')}_{\mathbf{p}'_2}(\mathbf{r}_2) | \psi^{(k)}_{\mathbf{p_2}}(\mathbf{r}_2) \rangle, \quad (8)$$

де

$$\langle \psi^{(i)}_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) | \tilde{\psi}^{(i')}_{\mathbf{p}'}(\mathbf{r}) \rangle \equiv \int d\mathbf{r} \psi^{*(i)}_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \tilde{\psi}^{(i')}_{\mathbf{p}'}(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{p}_\perp - \mathbf{p}'_\perp) \int dz \chi^{*(i)}_{p_z}(z) \tilde{\chi}^{(i')}_{p'_z}(z)$$

$$\equiv \delta(\mathbf{p}_\perp - \mathbf{p}'_\perp) \langle \chi^{(i)}_{p_z} | \tilde{\chi}^{(i')}_{p'_z} \rangle.$$

Коефіцієнти переходу $\langle \chi^{(i)}_{p_z} | \tilde{\chi}^{(i')}_{p'_z} \rangle$ легко встановити з рівностей

$$\tilde{\chi}^{(1)}_{p_z}(z) = \frac{i}{\sqrt{2}} (\chi^{(2)}_{p_z}(z) - \chi^{(1)}_{p_z}(z)), \quad (9)$$

$$\tilde{\chi}^{(2)}_{p_z}(z) = \frac{C^{*(2)}_{p_z}}{\sqrt{2D}} (\chi^{(1)}_{p_z}(z) + \chi^{(2)}_{p_z}(z)).$$

Звідси

$$\langle \chi^{(1)}_{p_z} | \tilde{\chi}^{(1)}_{p'_z} \rangle = -\langle \chi^{(2)}_{p_z} | \tilde{\chi}^{(1)}_{p'_z} \rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}} \delta(p_z - p'_z),$$

$$\langle \chi^{(1)}_{p_z} | \tilde{\chi}^{(2)}_{p'_z} \rangle = \langle \chi^{(2)}_{p_z} | \tilde{\chi}^{(2)}_{p'_z} \rangle = \frac{C^{*(2)}_{p_z}}{\sqrt{2D}} \delta(p_z - p'_z).$$

Завдяки наявності δ–функцій усі інтеґрали у (8) знімуться і ми отримаємо:

$$\begin{pmatrix} \hat{G}^{1,1}_{\omega_n}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \\ \hat{G}^{1,2}_{\omega_n}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \\ \hat{G}^{2,1}_{\omega_n}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \\ \hat{G}^{2,2}_{\omega_n}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{R} - i\sqrt{D} & -\sqrt{R} + i\sqrt{D} & 1 \\ -1 & -\sqrt{R} - i\sqrt{D} & \sqrt{R} - i\sqrt{D} & 1 \\ -1 & \sqrt{R} + i\sqrt{D} & -\sqrt{R} + i\sqrt{D} & 1 \\ 1 & \sqrt{R} + i\sqrt{D} & \sqrt{R} - i\sqrt{D} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\tilde{G}}^{1,1}_{\omega_n}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \\ \hat{\tilde{G}}^{1,2}_{\omega_n}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \\ \hat{\tilde{G}}^{2,1}_{\omega_n}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \\ \hat{\tilde{G}}^{2,2}_{\omega_n}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Зрозуміло, що той самий зв'язок матиме місце і між старими та новими функціями Ґріна в t–представленні (див [1], [2]) $\hat{G}^{i,k}_{\omega_n}(t_1, t_2, x)$ і $\hat{\tilde{G}}^{i,k}_{\omega_n}(t_1, t_2, x)$, $t = \dfrac{z}{v_0 x}$, $x = \cos\theta = \dfrac{p_z}{p}$, а також між старими й новими матричними елементами $\hat{\Delta}^{i,k}(t, x)$. Надалі знак "тильда" над новими функціями Ґріна та матричними елементами параметра порядку опускатимемо.

У загальному випадку система квазікласичних рівнянь для функцій Ґріна $\hat{G}^{i,k}_{\omega_n}$ має вигляд:

$$\left(i\omega_n + i\sigma_z \frac{d}{dt} \right) \hat{G}^{i,k}_{\omega_n}(t, t') - \sum_{i'} \Delta^{i,i'}(t) \hat{G}^{i',k}_{\omega_n}(t, t') = \delta_{i,k} \delta(t - t'). \tag{11}$$

Для матричних елементів параметра порядку маємо (опускаючи параметр x)

$$\hat{\Delta}^{1,1}(t) = \hat{\Delta}^{2,2}(t) = \frac{1}{2}(\hat{\Delta}(v_0 x t) + \hat{\Delta}(-v_0 x t)), \tag{12}$$

$$\hat{\Delta}^{1,2}(t) = \frac{1}{2}(i\sqrt{D} + \sqrt{R} \operatorname{sign} t)(\hat{\Delta}(v_0 x t) - \hat{\Delta}(-v_0 x t)),$$

$$\hat{\Delta}^{2,1}(t) = \frac{1}{2}(-i\sqrt{D} + \sqrt{R} \operatorname{sign} t)(\hat{\Delta}(v_0 x t) - \hat{\Delta}(-v_0 x t)).$$

Величина тунельного струму через бар'єр у новому базисі виражається формулою:

$$j(0) = 2\pi i e v_0 N(0) T \sum_{\omega_n} \int_0^1 dx\, x \sqrt{D(x)} (G^{2,1}_{\omega_n}(0,0) - G^{1,2}_{\omega_n}(0,0)). \tag{13}$$

Переконаємося, що використання базису стоячих хвиль (7) приводить до функцій Ґріна із симетричними крайовими умовами на нескінченності. Справді, при $t \to \infty$ параметр упорядкування прямує до сталої величини, яка дорівнює $\Delta e^{-i\varphi/2}$ на мінус нескінченності і $\Delta e^{i\varphi/2}$ на плюс нескінченності (надпровідники зліва і справа вважаємо однаковими). Тоді матричні елементи (12) дорівнюватимуть

$$\hat{\Delta}^{1,1} = \hat{\Delta}^{2,2} = \Delta \sigma_x \cos\frac{\varphi}{2}, \tag{14}$$

$$\hat{\Delta}^{2,1} = -\Delta(\sqrt{R} + i\sqrt{D} \operatorname{sign} t) \sigma_y \sin\frac{\varphi}{2} = (\hat{\Delta}^{1,2})^{+}.$$

На нескінченності функції Ґріна залежать від різниці арґументів, і система квазікласичних рівнянь для функцій $\hat{G}^{1,1}_{\omega_n}$ і $\hat{G}^{2,1}_{\omega_n}$ на підставі (11) та (14) має вигляд:

$$\begin{aligned} &\left(i\omega_n + i\sigma_z \frac{d}{dt} - \Delta \sigma_x \cos\frac{\varphi}{2} \right) \hat{G}^{1,1}_{\omega_n}(t - t') \\ &\qquad + \Delta \sigma_y \sin\frac{\varphi}{2} (\sqrt{R} + i\sqrt{D} \operatorname{sign} t) \hat{G}^{2,1}_{\omega_n}(t - t') \\ &\qquad = \delta(t - t'), \\ &\left(i\omega_n + i\sigma_z \frac{d}{dt} - \Delta \sigma_x \cos\frac{\varphi}{2} \right) \hat{G}^{2,1}_{\omega_n}(t - t') \\ &\qquad + \Delta \sigma_y \sin\frac{\varphi}{2} (\sqrt{R} - i\sqrt{D} \operatorname{sign} t) \hat{G}^{1,1}_{\omega_n}(t - t') = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Система (15), а також аналогічна для $\hat{G}^{2,2}_{\omega_n}$ і $\hat{G}^{1,2}_{\omega_n}$, легко розв'язуються квадруванням. Покладаємо

$$\hat{G}^{1,1}_{\omega_n}(t) = \left(i\omega_n - i\sigma_z \frac{d}{dt} + \Delta\sigma_x \cos\frac{\varphi}{2}\right) K_{\omega_n}(t), \qquad (16)$$

$$\hat{G}^{2,1}_{\omega_n}(t) = -\Delta \sin\frac{\varphi}{2}\sigma_y(\sqrt{R} - i\sqrt{D}\,\mathrm{sign}\,t)K_{\omega_n}(t).$$

Тоді друге рівняння з пари (16) задовольняється автоматично, а з першого випливає, що $K_{\omega_n}(t)$ є розв'язком рівняння

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - \tilde{\omega}_n^2\right) K_{\omega_n}(t) = \delta(t), \qquad \tilde{\omega}_n^2 = \omega_n^2 + \Delta^2.$$

Отже,

$$K_{\omega_n}(t) = -\frac{1}{2\tilde{\omega}_n}\exp(-\tilde{\omega}_n|t|).$$

Тому

$$\hat{G}^{1,1}_{\omega_n}(t) = \hat{G}^{2,2}_{\omega_n}(t) = -\frac{1}{2\tilde{\omega}_n}\left(i\omega_n + i\sigma_z\tilde{\omega}_n\,\mathrm{sign}\,t + \Delta\sigma_x\cos\frac{\varphi}{2}\right)e^{-\tilde{\omega}_n|t|}, \qquad (17)$$

$$\hat{G}^{2,1}_{\omega_n}(t) = \frac{\Delta}{2\tilde{\omega}_n}\sigma_y \sin\frac{\varphi}{2}(\sqrt{R} - i\sqrt{D}\,\mathrm{sign}\,t)e^{-\tilde{\omega}_n|t|} = (\hat{G}^{1,2}_{\omega_n}(t))^+. \qquad (18)$$

Таким чином, у розкладі за новим базисом ми справді отримали на нескінченності розв'язки, які переходять один в одний при заміні $t \to -t$.

III. ТОЧКОВИЙ КОНТАКТ

Одержані квазікласичні рівняння в моделі з кусково–сталим параметром упорядкування, яка є точною для точкового контакту, можна розв'язати за довільної прозорости бар'єра.

У цій моделі

$$\Delta(z) = \Delta e^{-i\varphi/2}\theta(-z) + \Delta e^{i\varphi/2}\theta(z),$$

і для матричних елементів $\hat{\Delta}^{i,k}(t)$ маємо:

$$\hat{\Delta}^{1,1}(t) = \hat{\Delta}^{2,2}(t) = \Delta\sigma_x\cos\varphi/2,$$

$$\hat{\Delta}^{1,2}(t) = -\Delta(\sqrt{R} + i\sqrt{D}\,\mathrm{sign}\,t)\sigma_y\sin\varphi/2,$$

$$\hat{\Delta}^{2,1}(t) = -\Delta(\sqrt{R} - i\sqrt{D}\,\mathrm{sign}\,t)\sigma_y\sin\varphi/2.$$

Система рівнянь (11) набуває вигляду

$$\left(i\omega_n + i\sigma_z\frac{d}{dt} - \Delta\sigma_x\cos\varphi/2\right)\hat{G}^{1,1}_{\omega_n}(t,t') + \Delta\left(\sqrt{R} + i\sqrt{D}\,\mathrm{sign}\;t\right)\sigma_y\sin\varphi/2\,\hat{G}^{2,1}_{\omega_n}(t,t') = \delta(t-t'), \qquad (19)$$

$$\Delta\left(\sqrt{R} - i\sqrt{D}\,\mathrm{sign}\;t\right)\sigma_y\sin\varphi/2\,\hat{G}^{1,1}_{\omega_n}(t,t') + \left(i\omega_n + i\sigma_z\frac{d}{dt} - \Delta\sigma_x\cos\varphi/2\right)\hat{G}^{2,1}_{\omega_n}(t,t') = 0,$$

або в символічному записі

$$\hat{K}g(t,t') = \delta(t-t'), \qquad (20)$$

де

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} i\omega_n + i\sigma_z\dfrac{d}{dt} - \Delta\sigma_x\cos\varphi/2 & \Delta(\sqrt{R} + i\sqrt{D}\,\mathrm{sign}\;t)\sigma_y\sin\varphi/2 \\ \Delta(\sqrt{R} - i\sqrt{D}\,\mathrm{sign}\;t)\sigma_y\sin\varphi/2 & i\omega_n + i\sigma_z\dfrac{d}{dt} - \Delta\sigma_x\cos\varphi/2 \end{pmatrix},$$

$$g(t,t') = \begin{pmatrix} \hat{G}^{1,1}_{\omega_n}(t,t') \\ \hat{G}^{2,1}_{\omega_n}(t,t') \end{pmatrix}.$$

При розв'язуванні скористаємось методом, викладеним у [3].

В областях $t<0$ і $t>0$ недіягональні елементи матриці $\hat{K}$ перестають залежати від t. Наприклад, при $t<0$

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} i\omega_n + i\sigma_z \dfrac{d}{dt} - \Delta\sigma_x \cos\varphi/2 & \Delta\, c^* \sigma_y \sin\varphi/2 \\ \Delta\, c\, \sigma_y \sin\varphi/2 & i\omega_n + i\sigma_z \dfrac{d}{dt} - \Delta\sigma_x \cos\varphi/2 \end{pmatrix},$$

де $c = \sqrt{R} + i\sqrt{D}$, $|c|^2 = 1$. Ця матриця діягоналізується за допомогою матриці унітарного перетворення

$$\widehat{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & c^* \\ -c & 1 \end{pmatrix}.$$

При цьому

$$\hat{\tilde{K}} = \hat{B}\hat{K}\hat{B}^{-1} =$$
$$= \begin{pmatrix} i\omega_n + i\sigma_z \frac{d}{dt} - \Delta(\sigma_x \cos\varphi/2 - \sigma_y \sin\varphi/2) & 0 \\ 0 & i\omega_n + i\sigma_z \frac{d}{dt} - \Delta(\sigma_x \cos\varphi 2 + \sigma_y \sin\varphi/2) \end{pmatrix},$$

а рівняння (20) переходить у

$$\hat{\tilde{K}} \tilde{g}(t,t') = \hat{B}\delta(t-t'), \tag{21}$$

де

$$\tilde{g}(t,t') = \hat{B} g(t,t') = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \hat{G}^{1,1}_{\omega_n}(t,t') + c^* \hat{G}^{2,1}_{\omega_n}(t,t') \\ -c\, \hat{G}^{2,1}_{\omega_n}(t,t') + \hat{G}^{1,1}_{\omega_n}(t,t') \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \hat{L}(t,t') \\ \hat{M}(t,t') \end{pmatrix}. \tag{22}$$

У розгорнутому вигляді (21) записується так:

$$\left(i\omega_n + i\sigma_z \frac{d}{dt} - \Delta\sigma_x \cos\varphi/2 + \Delta\, \sigma_y \sin\varphi/2 \right) \hat{L}(t,t') = \frac{1}{\sqrt{2}} \delta(t-t'),$$

$$\left(i\omega_n + i\sigma_z \frac{d}{dt} - \Delta\sigma_x \cos\varphi/2 - \Delta\, \sigma_y \sin\varphi/2 \right) \hat{M}(t,t') = -\frac{c}{\sqrt{2}} \delta(t-t')$$

або

$$\frac{d\hat{L}(t,t')}{dt} + \hat{A}(\varphi)\hat{L}(t,t') = -\frac{i}{\sqrt{2}} \sigma_z \delta(t-t'), \tag{23}$$

$$\frac{d\hat{M}(t,t')}{dt} + \hat{A}(-\varphi)\hat{M}(t,t') = i\frac{c}{\sqrt{2}} \sigma_z \delta(t-t'). \tag{24}$$

Тут

$$\hat{A}(\varphi) \equiv \omega_n \sigma_z - \Delta\sigma_y \cos\varphi/2 - \Delta\ \sigma_x \sin\varphi/2 = \begin{pmatrix} \omega_n & i\Delta e^{i\varphi/2} \\ -i\Delta e^{-i\varphi/2} & -\omega_n \end{pmatrix},$$

$$\left(\hat{A}\,(\varphi) \right)^2 = \omega_n^2 + \Delta^2 \equiv \tilde{\omega}_n^2.$$

Розв'язок рівняння (23) подамо у вигляді суми загального розв'язку однорідного рівняння й частинного розв'язку неоднорідного:

$$\hat{L}(t,t') = e^{-\hat{A}(\varphi)t}\hat{L}_0(t') - \frac{i}{2\sqrt{2}\tilde{\omega}_n}(\tilde{\omega}_n\sigma_z\,\mathrm{sign}(t-t') + \hat{A}(\varphi)\sigma_z)e^{-\tilde{\omega}_n|t-t'|},$$

де $\hat{L}_0(t')$ – матрична функція від змінної t', яка ще потребує знаходження. Оскільки

$$e^{-\hat{A}(\varphi)t}\hat{L}_0(t') = \frac{e^{\tilde{\omega}_n t}}{2\tilde{\omega}_n}(\tilde{\omega}_n - \hat{A}(\varphi))\hat{L}_0(t') + \frac{e^{-\tilde{\omega}_n t}}{2\tilde{\omega}_n}(\tilde{\omega}_n + \hat{A}(\varphi))\hat{L}_0(t'),$$

то для забезпечення аналітичности функції $\hat{L}(t,t')$ при $t\to-\infty$ матриця $\hat{L}_0(t')$ повинна мати вигляд

$$\hat{L}_0(t') = \begin{pmatrix} \alpha_1(t') & \frac{1}{b}\beta_1(t') \\ b\alpha_1(t') & \beta_1(t') \end{pmatrix},$$

де $\alpha_1(t')$ і $\beta_1(t')$ – невідомі функції від t' і при цьому введено позначення $b = i\dfrac{\tilde{\omega}_n+\omega_n}{\Delta}e^{-i\varphi/2}$. Отже,

$$\hat{L}(t,t') = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \frac{1}{b}\beta_1 \\ b\alpha_1 & \beta_1 \end{pmatrix} e^{\tilde{\omega}_n t} - \frac{i}{2\sqrt{2}\tilde{\omega}_n}(\tilde{\omega}_n\sigma_z\,\mathrm{sign}(t-t') + \hat{A}(\varphi)\sigma_z)e^{-\tilde{\omega}_n|t-t'|} \tag{25}$$

(для компактности ми опускаємо арґумент t' у функціях α_1 і β_1). Так само для $\hat{M}(t,t')$ знаходимо

$$\hat{M}(t,t') = \begin{pmatrix} \alpha_2 & -\frac{1}{b^*}\beta_2 \\ -b^*\alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} e^{\tilde{\omega}_n t} \tag{26}$$

$$+\frac{ic}{2\sqrt{2}\tilde{\omega}_n}(\tilde{\omega}_n\,\mathrm{sign}(t-t') + \hat{A}(-\varphi))\sigma_z e^{-\tilde{\omega}_n|t-t'|}.$$

Перерозв'язуємо (22) стосовно $\hat{G}^{1,1}_{\omega_n}$ і $\hat{G}^{2,1}_{\omega_n}$:

$$\hat{G}^{1,1}_{\omega_n}(t,t') = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \alpha_1 - c^*\alpha_2 & \frac{1}{b}\beta_1 + \frac{c^*}{b^*}\beta_2 \\ b\alpha_1 + c^*b^*\alpha_2 & \beta_1 - c^*\beta_2 \end{pmatrix} e^{\tilde{\omega}_n t} - \frac{i}{4\tilde{\omega}_n}[2\tilde{\omega}_n\,\mathrm{sign}(t-t') + (\hat{A}(\varphi)+\hat{A}(-\varphi))]\sigma_z e^{-\tilde{\omega}_n|t-t'|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \alpha_1 - c^*\alpha_2 & \frac{1}{b}\beta_1 + \frac{c^*}{b^*}\beta_2 \\ b\alpha_1 + c^*b^*\alpha_2 & \beta_1 - c^*\beta_2 \end{pmatrix} e^{\tilde{\omega}_n t} - \frac{i}{2\tilde{\omega}_n}[\tilde{\omega}_n\sigma_z\,\mathrm{sign}(t-t') + \omega_n - i\Delta\sigma_x\cos\varphi/2]e^{-\tilde{\omega}_n|t-t'|},$$

$$\hat{G}^{2,1}_{\omega_n}(t,t') = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} c\alpha_1 + \alpha_2 & \frac{c}{b}\beta_1 - \frac{1}{b^*}\beta_2 \\ cb\alpha_1 - b^*\alpha_2 & c\beta_1 + \beta_2 \end{pmatrix} e^{\tilde{\omega}_n t} - \frac{ic}{4\tilde{\omega}_n}[A(\varphi) - \hat{A}(-\varphi)]\sigma_y e^{-\tilde{\omega}_n|t-t'|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} c\alpha_1 + \alpha_2 & \frac{c}{b}\beta_1 - \frac{1}{b^*}\beta_2 \\ cb\alpha_1 - b^*\alpha_2 & c\beta_1 + \beta_2 \end{pmatrix} e^{\tilde{\omega}_n t} + \frac{c}{2\tilde{\omega}_n}\Delta\sigma_y\sin\varphi/2e^{-\tilde{\omega}_n|t-t'|}.$$

В області $t>0$ ці функції знаходимо аналогічно, однак тепер матриця $\hat{K}$ діягоналізується за допомогою матриці

$$\widehat{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & c \\ -c^* & 1 \end{pmatrix}$$

й умову аналітичности слід накладати при $t\to+\infty$. У висліді:

$$\hat{G}^{1,1}_{\omega_n}(t,t') = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \gamma_1 - c\gamma_2 & -b^*\delta_1 - cb\delta_2 \\ -\frac{1}{b^*}\gamma_1 - \frac{c}{b}\gamma_2 & \delta_1 - c\delta_2 \end{pmatrix} e^{-\tilde{\omega}_n t} - \frac{i}{2\tilde{\omega}_n}(\tilde{\omega}_n\sigma_z\,\mathrm{sign}(t-t') + \omega_n - i\Delta\sigma_x\cos\varphi/2)e^{-\tilde{\omega}_n|t-t'|},$$

$$\hat{G}^{2,1}_{\omega_n}(t,t') = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} c^*\gamma_1 + \gamma_2 & -c^*b^*\delta_1 + b\delta_2 \\ -\frac{c^*}{b^*}\gamma_1 + \frac{1}{b}\gamma_2 & c^*\delta_1 + \delta_2 \end{pmatrix} e^{-\tilde{\omega}_n t} + \frac{c^*}{2\tilde{\omega}_n}\Delta\sigma_y\sin\varphi/2e^{-\tilde{\omega}_n|t-t'|}.$$

Невідомі функції $\alpha_i(t), \beta_i(t), \gamma_i(t)$ і $\delta_i(t)$ $(i=1,2)$ знаходимо з умови неперервности функцій $\hat{G}^{1,1}_{\omega_n}$ і $\hat{G}^{2,1}_{\omega_n}$ в точці $z=0$. Проте для знаходження струму нам достатньо обчислити $\alpha_1(t')$ і $\alpha_2(t')$. Для них маємо систему лінійних рівнянь:

$$\alpha_1(t) - c^*\alpha_2(t) - \gamma_1(t) + c\gamma_2(t) = 0,$$

$$b\alpha_1(t) + c^* b^*\alpha_2(t) + \frac{1}{b^*}\gamma_1(t) + \frac{c}{b}\gamma_2(t) = 0,$$

$$c\alpha_1(t) + \alpha_2(t) - c^*\gamma_1(t) - \gamma_2(t) = 0,$$

$$cb\alpha_1(t) - b^*\alpha_2(t) + \frac{c^*}{b^*}\gamma_1(t) - \frac{1}{b}\gamma_2(t)$$

$$= -i\frac{c-c^*}{\sqrt{2}\tilde{\omega}_n}\Delta\sin\varphi/2 \cdot e^{-\tilde{\omega}_n|t|}.$$

Система легко розв'язується, і для лівого верхнього елемента матриці $\hat{G}^{2,1}_{\omega_n}$ знаходимо:

$$G^{2,1}_{\omega_n}(t,t') = -\frac{i}{4}\frac{\sqrt{D}\Delta^2\sin\varphi}{\omega_n^2 + \Delta^2(1-D\sin^2\varphi/2)}e^{-\tilde{\omega}_n(|t|+|t'|)}. \quad (27)$$

Окремо шукати функцію $\hat{G}^{1,2}_{\omega_n}(t,t')$, яка входить у вираз для струму, нема потреби, оскільки легко помітити, що її отримуємо з $\hat{G}^{2,1}_{\omega_n}(t,t')$ заміною c на c^*, тобто $\sqrt{D}$ на $-\sqrt{D}$. Таким чином, одержуємо точний за прозорістю бар'єра вираз для струму через SIS–контакт у моделі з кусково–неперервним параметром упорядкування:

$$j(0) = \pi e v_0 N(0)T\sum_{\omega_n}\int_0^1 dx\, x D(x)\frac{\Delta^2\sin\varphi}{\omega_n^2 + \Delta^2(1-D(x)\sin^2\varphi/2)}$$

$$= \frac{\pi}{2}ev_0N(0)\int_0^1 dx\cdot xD(x)\frac{\Delta}{\sqrt{1-D(x)\sin^2\varphi/2}}\,\mathrm{th}\,\frac{\Delta\sqrt{1-D(x)\sin^2\varphi/2}}{2T}\sin\varphi. \quad (28)$$

При малій прозорості бар'єра ця формула переходить у класичний джозефсонівський вираз для струму.

IV. SNINS–КОНТАКТ

Обчислимо струм у SNINS–контакті за довільного положення ізолятора в нормальній області. У ній $\Delta=0$ і в моделі кусково–сталого параметра впорядкування маємо

$$\Delta(z) = \Delta e^{-i\varphi/2}\theta(-z-d_1) + \Delta e^{i\varphi/2}\theta(z-d_2), \quad (29)$$

d_1 і d_2 — відстані від ізолятора $(z=0)$ до лівої і правої NS–межі відповідно. Для визначености будемо вважати, що $d_1 \le d_2$.

Маємо п'ять областей з різними значеннями параметра впорядкування. Розрахунки можна спростити, якщо вдатися до деяких модифікацій методу.

Домножимо систему рівнянь (11) зліва і справа на σ_z. Отримаємо

$$(i\frac{d}{dt} + i\omega_n\sigma_z)\hat{\mathcal{G}}^{i,k}_{\omega_n}(t,t') - \sum_{i'}\hat{\Delta}^{i,i'}(t)\hat{\mathcal{G}}^{i',k}_{\omega_n}(t,t')$$

$$= \delta_{i,k}\delta(t-t'),$$

де $\hat{\Delta}^{i,i'}(t)$ відрізняється від матриці з таким же позначенням із попередніх розділів домноженням зліва на σ_z, тобто

$$\hat{\Delta}^{i,i'}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \Delta^{i,i'}(t) \\ -\overset{*}{\Delta}{}^{i,i'}(t) & 0 \end{pmatrix}$$

і

$$\hat{\mathcal{G}}^{i,k}_{\omega_n}(t,t') = \hat{G}^{i,k}_{\omega_n}(t,t')\sigma_z$$

$$= \begin{pmatrix} G_{\omega_n}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) & \tilde{F}_{\omega_n}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) \\ -F_{\omega_n}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) & -\tilde{G}_{\omega_n}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) \end{pmatrix}.$$

При $t=t'$ функції Ґріна $\hat{\mathcal{G}}^{i,k}_{\omega_n}(t,t')$ переходять в айленберґерівські.

У моделі (29) матричні елементи $\hat{\Delta}^{i,k}(t)$ дорівнюють

$$\hat\Delta^{1,1}(t)=\hat\Delta^{2,2}(t)=\begin{cases} i\Delta\sigma_y\cos\varphi/2, & |t|>a_2,\\ \dfrac{\Delta}{2}\begin{pmatrix}0 & e^{-i\varphi/2}\\ -e^{i\varphi/2} & 0\end{pmatrix}, & a_1<|t|<a_2,\\ 0, & |t|<a_1,\end{cases}$$

$$\hat\Delta^{1,2}(t)=\begin{cases} ic^*\Delta\sigma_x\sin\varphi/2, & t<-a_2,\\ -c^*\dfrac{\Delta}{2}\begin{pmatrix}0 & e^{-i\varphi/2}\\ -e^{i\varphi/2} & 0\end{pmatrix}, & -a_2<t<-a_1,\\ 0, & -a_1<t<a_1,\\ -c\dfrac{\Delta}{2}\begin{pmatrix}0 & e^{-i\varphi/2}\\ -e^{i\varphi/2} & 0\end{pmatrix}, & a_1<t<a_2,\\ ic\Delta\sigma_x\sin\varphi/2, & t>a_2,\end{cases}$$

$$\hat\Delta^{2,1}(t)=\begin{cases} ic\Delta\sigma_x\sin\varphi/2, & t<-a_2,\\ -c\dfrac{\Delta}{2}\begin{pmatrix}0 & e^{-i\varphi/2}\\ -e^{i\varphi/2} & 0\end{pmatrix}, & -a_2<t<-a_1,\\ 0, & -a_1<t<a_1,\\ -c^*\dfrac{\Delta}{2}\begin{pmatrix}0 & e^{-i\varphi/2}\\ -e^{i\varphi/2} & 0\end{pmatrix}, & a_1<t<a_2,\\ ic^*\Delta\sigma_x\sin\varphi/2, & t>a_2,\end{cases}$$

де $a_{1,2}=d_{1,2}/v_0x$.

При обчисленнях ми знову можемо обмежитись функціями $\hat{\mathcal{G}}^{1,1}_{\omega_n}$ і $\hat{\mathcal{G}}^{2,1}_{\omega_n}$.

При $t<-a_2$

$$\hat\Delta^{1,1}(t)=\hat\Delta^{2,2}(t)=i\Delta\sigma_y\cos\varphi/2,$$

$$\hat\Delta^{1,2}(t)=ic^*\Delta\sigma_x\sin\varphi/2,$$

$$\hat\Delta^{2,1}(t)=ic\Delta\sigma_x\sin\varphi/2,$$

отже, ми маємо розв'язати систему

$$(i\frac{d}{dt}+i\omega_n\sigma_z-i\Delta\sigma_y\cos\varphi/2)\hat{\mathcal{G}}^{1,1}_{\omega_n}(t,t') - ic^*\Delta\sigma_x\sin\varphi/2\hat{\mathcal{G}}^{2,1}_{\omega_n}(t,t')=\delta(t-t'),$$

$$(i\frac{d}{dt}+i\omega_n\sigma_z-i\Delta\sigma_y\cos\varphi/2)\hat{\mathcal{G}}^{2,1}_{\omega_n}(t,t') - ic\Delta\sigma_x\sin\varphi/2\hat{\mathcal{G}}^{1,1}_{\omega_n}(t,t')=0.$$

Для лінійних комбінацій

$$\hat L=\hat{\mathcal{G}}^{1,1}_{\omega_n}+c^*\hat{\mathcal{G}}^{2,1}_{\omega_n},\qquad \hat M=\hat{\mathcal{G}}^{1,1}_{\omega_n}-c^*\hat{\mathcal{G}}^{2,1}_{\omega_n},$$

рівняння розчіпляються і набувають вигляду

$$\left\{i\frac{d}{dt}+i\omega_n\sigma_z-\Delta\begin{pmatrix}0 & e^{i\varphi/2}\\ -e^{-i\varphi/2} & 0\end{pmatrix}\right\}\hat L(t,t') =\delta(t-t'),$$

$$\left\{i\frac{d}{dt}+i\omega_n\sigma_z-\Delta\begin{pmatrix}0 & e^{-i\varphi/2}\\ -e^{i\varphi/2} & 0\end{pmatrix}\right\}\hat M(t,t') =\delta(t-t').$$

Як уже зазначалося, при $t=t'$ функції $\hat G^{1,1}_{\omega_n},\hat G^{2,1}_{\omega_n}$, а значить, і $\hat L$ та $\hat M$ набувають айленберґерівського виду. Тому можна припустити, що їхній шпур має дорівнювати нулеві. Крім того, ми можемо для $\hat L_0(t,t')$ і $\hat M_0(t,t')$ — розв'язків відповідних однорідних рівнянь — одразу записати таку ж функціональну залежність від t', як і в попередньому розділі. Таким чином, для $\hat L(t,t')$ і $\hat M(t,t')$ маємо

$$\hat L(t,t')=\frac{1}{2\tilde\omega_n}[-i\tilde\omega_n\,\mathrm{sign}(t-t')-i\omega_n\sigma_z+\Delta\begin{pmatrix}0 & e^{i\varphi/2}\\ -e^{-i\varphi/2} & 0\end{pmatrix}]e^{-\tilde\omega_n|t-t'|}+\alpha\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{b}\\ b & -1\end{pmatrix}e^{\tilde\omega_n(t+t')},$$

$$\hat{M}(t,t') = \frac{1}{2\tilde{\omega}_n}[-i\tilde{\omega}_n \operatorname{sign}(t-t') - i\omega_n\sigma_z + \Delta \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi/2} \\ -e^{i\varphi/2} & 0 \end{pmatrix}]e^{-\tilde{\omega}_n|t-t'|} + \beta \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{b^*} \\ -b^* & -1 \end{pmatrix} e^{\tilde{\omega}_n(t+t')},$$

тут α і β — константи, які потребують знаходження. При записі розв'язків однорідних рівнянь ураховано умову аналітичности при $t \to -\infty$.

В області $-a_2 < t < -a_1$ маємо

$$\hat{\Delta}^{1,1}(t) = \hat{\Delta}^{2,2}(t) = \frac{\Delta}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi/2} \\ -e^{i\varphi/2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\Delta}^{1,2}(t) = -\frac{\Delta}{2}c^* \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi/2} \\ -e^{i\varphi/2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\Delta}^{2,1}(t) = -\frac{\Delta}{2}c \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi/2} \\ -e^{i\varphi/2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Для таких самих лінійних комбінацій $\hat{L}$ і $\hat{M}$ отримуємо

$$\{i\frac{d}{dt} + i\omega_n\sigma_z\}\hat{L}(t,t') = \delta(t-t'), \tag{30}$$

$$\left\{i\frac{d}{dt} + i\omega_n\sigma_z - \Delta \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi/2} \\ -e^{i\varphi/2} & 0 \end{pmatrix}\right\}\hat{M}(t,t') = \delta(t-t'). \tag{31}$$

Рівняння для $\hat{L}(t,t')$ має вигляд рівняння функцій Ґріна нормального прошарку. Його розв'язок при $t = t'$ з точністю до поки що невизначених констант добре відомий:

$$\hat{L}(t,t') = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 e^{-2\omega_n t} \\ \alpha_2 e^{2\omega_n t} & -\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Рівняння для $\hat{M}$ не змінилось, отже, при $t = t'$ маємо

$$\hat{M}(t,t') = \frac{1}{2\tilde{\omega}_n}\left[-i\omega_n\sigma_z + \Delta \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi/2} \\ -e^{i\varphi/2} & 0 \end{pmatrix}\right] + \beta \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{b^*} \\ -b^* & -1 \end{pmatrix} e^{2\tilde{\omega}_n t}.$$

В області $-a_1 < t < a_1$, $\hat{\Delta}^{1,1}(t) = \hat{\Delta}^{1,2}(t) = \hat{\Delta}^{2,1}(t) = \hat{\Delta}^{2,2}(t) = 0$. Тому тут

$$\{i\frac{d}{dt} + i\omega_n\sigma_z\}\hat{\mathcal{G}}^{1,1}(t,t') = \delta(t-t'),$$

$$\{i\frac{d}{dt} + i\omega_n\sigma_z\}\hat{\mathcal{G}}^{2,1}(t,t') = 0.$$

Для $\hat{L}$ і $\hat{M}$ отримаємо рівняння виду (30) і відповідно їх розв'язки

$$\hat{L}(t,t') = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 e^{-2\omega_n t} \\ \alpha_2 e^{2\omega_n t} & -\alpha_1 \end{pmatrix},$$
$$\hat{M}(t,t') = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_3 e^{-2\omega_n t} \\ \beta_2 e^{2\omega_n t} & -\beta_1 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Завдяки симетрії матричних елементів $\Delta^{i,k}(t)$ відносно початку координат (із точністю до заміни $c \leftrightarrow c^*$) розв'язки в областях $a_1 < t < a_2$ і $t > a_2$ виписуються автоматично. Тут рівняння розчіпляються для лінійних комбінацій

$$\hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{G}}^{1,1} + c\,\hat{\mathcal{G}}^{2,1}, \qquad \hat{\mathcal{M}} = \hat{\mathcal{G}}^{1,1} - c\,\hat{\mathcal{G}}^{2,1}.$$

При $t > a_2$

$$\hat{\mathcal{L}}(t,t') = \frac{1}{2\tilde{\omega}_n}\left[-i\omega_n\sigma_z + \Delta \begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi/2} \\ -e^{-i\varphi/2} & 0 \end{pmatrix}\right] + \gamma \begin{pmatrix} 1 & b^* \\ -\frac{1}{b^*} & -1 \end{pmatrix} e^{-2\tilde{\omega}_n t},$$

$$\hat{\mathcal{M}}(t,t') = \frac{1}{2\tilde{\omega}_n}\left[-i\omega_n\sigma_z + \Delta \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi/2} \\ -e^{i\varphi/2} & 0 \end{pmatrix}\right] + \delta \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{b^*} \\ -b^* & -1 \end{pmatrix} e^{-2\tilde{\omega}_n t}.$$

При $a_1 < t < a_2$ $\hat{\mathcal{M}}(t,t')$ таке ж саме, а $\hat{\mathcal{L}}(t,t')$ має вигляд:

$$\hat{\mathcal{L}}(t,t') = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_3 e^{-2\omega_n t} \\ \gamma_2 e^{2\omega_n t} & -\gamma_1 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Вона залишається такою ж і при $-a_1 < t < a_1$, а $\hat{\mathcal{M}}$ тут дорівнює

$$\hat{\mathcal{M}}(t,t') = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_3 e^{-2\omega_n t} \\ \delta_2 e^{2\omega_n t} & -\delta_1 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Для знаходження струму нам достатньо знати $G^{2,1}(0,0)$, тому ми можемо не цікавитись коефіцієнтами $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ і δ_3. З умов неперервности функцій $\hat{L}(t,t')$, $\hat{M}(t,t')$ і $\hat{\mathcal{L}}(t,t')$, $\hat{\mathcal{M}}(t,t')$ у точках $\pm a_1$ і $\pm a_2$ знаходимо:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = -i\frac{\omega_n}{2\tilde{\omega}_n} + \alpha e^{-2\tilde{\omega}_n a_2}, && \gamma_1 = -i\frac{\omega_n}{2\tilde{\omega}_n} + \gamma e^{-2\tilde{\omega}_n a_2},\\
&\alpha_2 = -\frac{\Delta}{2\tilde{\omega}_n} e^{-i\varphi/2} e^{2\omega_n a_2} + \alpha b e^{-2(\tilde{\omega}_n - \omega_n)a_2}, && \gamma_2 = -\frac{\Delta}{2\tilde{\omega}_n} e^{-i\varphi/2} e^{-2\omega_n a_2} - \gamma \frac{1}{b} e^{-2(\tilde{\omega}_n + \omega_n)a_2},\\
&\beta_1 = -i\frac{\omega_n}{2\tilde{\omega}_n} + \beta e^{-2\tilde{\omega}_n a_1}, && \delta_1 = -i\frac{\omega_n}{2\tilde{\omega}_n} + \delta e^{-2\tilde{\omega}_n a_1},\\
&\beta_2 = -\frac{\Delta}{2\tilde{\omega}_n} e^{i\varphi/2} e^{2\omega_n a_1} - \beta b^* e^{-2(\tilde{\omega}_n - \omega_n)a_1}, && \delta_2 = -\frac{\Delta}{2\tilde{\omega}_n} e^{i\varphi/2} e^{-2\omega_n a_1} + \delta \frac{1}{b} e^{-2(\tilde{\omega}_n + \omega_n)a_1}.
\end{aligned} \tag{35}$$

В області $-a_1 < t < a_1$

$$\mathcal{G}^{1,1}_{\omega_n} = \frac{1}{2}(L + M) = \frac{1}{2}(\mathcal{L} + \mathcal{M}),$$

$$\mathcal{G}^{2,1}_{\omega_n} = \frac{c}{2}(L - M) = \frac{c^*}{2}(\mathcal{L} - \mathcal{M}).$$

Це дає рівняння

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + \beta_1 &= \gamma_1 + \delta_1,\\
\alpha_2 + \beta_2 &= \gamma_2 + \delta_2,\\
c\,(\alpha_1 - \beta_1) &= c^*(\gamma_1 - \delta_1),\\
c\,(\alpha_2 - \beta_2) &= c^*(\gamma_2 - \delta_2).
\end{aligned} \tag{36}$$

Підставивши сюди вирази (35), отримаємо чотири лінійних рівняння на константи α, β, γ, і δ. Опускаючи викладки, випишемо кінцевий результат — вираз для струму SNINS–контакту:

$$\begin{aligned}
j &= 2\pi e v_0 N(0) T \sum_{\omega_n} \int_0^1 dx \cdot x \cdot D(x) \Delta^2 \sin\varphi/2\\
&\times \frac{1}{(\tilde{\omega}_n^2 + \omega_n^2)\,\mathrm{ch}\,2\omega_n(a_1 + a_2) + 2\tilde{\omega}_n\omega_n\,\mathrm{sh}\,2\omega_n(a_1 + a_2) + D\Delta^2\cos\varphi + R\Delta^2\,\mathrm{ch}\,2\omega_n(a_1 - a_2)}.
\end{aligned} \tag{37}$$

Ця формула була вперше отримана в роботі [3]. При цьому було використано два методи: квазікласичні рівняння, побудовані в статті [2] для розривних на бар'єрі функцій Ґріна зі збіжними арґументами (розклад за плоскими хвилями), а також квазікласичні рівняння для функцій Ґріна з незбіжними арґументами і з несиметричними крайовими умовами (розклад за власними функціями одночастинкового рівняння Шредінґера у формі хвиль, що падають на бар'єр зліва і справа). При цьому була з'ясована залежність струму від положення тунельного бар'єра всередині нормального прошарку. На відміну від цих підходів тут застосовано метод, у якому розклад провадиться за власними функціями одночастинкового рівняння Шредінґера, які є водночас власними функціями оператора парности. Це дає дещо зручніший опис, а вживання функцій Ґріна при незбіжних арґументах дозволяє використати їхні аналітичні властивості за різницею арґументів.

Остаточна відповідь в усіх методах виявляється однаковою. Зауважимо, що вперше результат такого типу був отриманий у монографії одного з авторів [1] для контакту типу SINS. Його одержуємо з (37), якщо покласти $a_1 = 0$, $a_2 = a$, тобто розмістити ізолятор на одній із меж розділу надпровідника й нормального металу.

Розглянемо інші частинні випадки.

1. Контакт зі звуженням.

Покладаємо $a_1 = a_2 = 0$, а $D(x) \cong D(1) \equiv D$. Тоді підсумовування за мацубарівськими частотами легко виконується за формулою

$$T\sum_{\omega_n}\frac{1}{\omega_n^2+\alpha^2}=\frac{1}{2\alpha}\,\mathrm{th}\,\frac{\alpha}{2T}$$

і ми одержуємо

$$j=\frac{\pi}{4}ev_0N(0)\frac{D\Delta\sin\varphi}{\sqrt{1-D\sin^2\varphi/2}}$$

$$\times\,\mathrm{th}\,\frac{\Delta\sqrt{1-D\sin^2\varphi/2}}{2T}. \qquad (38)$$

Зокрема при $D=1$ отримуємо результат Кулика й Омелянчука [4]

$$j=\frac{\pi}{2}ev_0N(0)\Delta\sin\varphi/2\,\mathrm{th}\left(\frac{\Delta}{2T}\cos\varphi/2\right). \qquad (39)$$

2. SIS–контакт.

Формула (37) містить, звичайно, результат Джозефсона для стаціонарного струму в SIS–контакті. Покладаючи $a_1=a_2=0$ і $D\ll 1$, отримуємо

$$j=\frac{\pi}{2}ev_0N(0)\Delta\sin\varphi\int\limits_0^1 dx\,xD(x)\,\mathrm{th}\,\frac{\Delta}{2T}. \qquad (40)$$

3. SNS–контакт.

Формула (37) також описує SNS–контакт без відбиття. Покладімо $a_1=a_2=\frac{a}{2}=\frac{d}{2v_0x}$, а також $D=1$. Маємо

$$j=2\pi ev_0N(0)\Delta^2\sin\varphi\int\limits_0^1 dx\,xT\sum_{\omega_n}\frac{1}{(\tilde\omega_n^2+\omega_n^2)\,\mathrm{ch}\,\frac{2\omega_nd}{v_0x}+2\tilde\omega_n\omega_n\,\mathrm{sh}\,\frac{2\omega_nd}{v_0x}+\Delta^2\cos\varphi}. \qquad (41)$$

Формула (41) дещо відрізняється від класичного результату для SNS–контакту (пор. [1], ф-ла (35.5))

$$j=2\pi ev_0N(0)\int\limits_0^1 dx\,x\,\mathrm{Im}\,T\sum_{\omega_n}\frac{\omega_n\,\mathrm{ch}\left(\frac{\omega_nd}{v_0x}+\frac{i\varphi}{2}\right)+\tilde\omega_n\,\mathrm{sh}\left(\frac{\omega_nd}{v_0x}+\frac{i\varphi}{2}\right)}{\tilde\omega_n\,\mathrm{ch}\left(\frac{\omega_nd}{v_0x}+\frac{i\varphi}{2}\right)+\omega_n\,\mathrm{sh}\left(\frac{\omega_nd}{v_0x}+\frac{i\varphi}{2}\right)},$$

однак легко переконатися, що обчислення уявної частини від дробу в останній формулі приводить її до вигляду (41).

Таким чином, формула (37) містить у собі як частинні випадки цілу низку результатів теорії надпровідних контактів.

[1] А. В. Свидзинский, *Пространственно–неоднородные задачи теории сверхпроводимости* (Наука, Москва, 1982).

[2] Б. П. Лесков, А. И. Макеев, А. В. Свидзинский, Теор. мат. физ. **74**, 448 (1988).

[3] Л. Н. Ахрамович, Ю. А. Раков, А. В. Свидзинский, Теор. мат. физ. **77**, 450 (1988).

[4] И. О. Кулик, А. Н. Омельянчук, Физ. низк. темп. **4**, 296 (1978).

ON THE THEORY OF THE CURRENT STATES IN THE SUPERCONDUCTING JUNCTIONS

A. Svidzynsky, O. Viligursky, O. Biruk, A. Rakutsky

Lesya Ukrainka Volyn State University,

Department of Theoretical and Mathematical Physics,

13 Voli Avenue, Lutsk, UA–263000, Ukraine

The set of the quasiclassical equations for the superconducting junctions has been built by the expansion of the Green's functions on the basis of the even and odd solutions of the one-particle Schrödinger equation. Obtained solutions for the quasiclassical Green's functions have a symmetric asymptotic behaviour in the depth of the superconductor. Superconducting current in the point– and in the asymmetric SNINS–junctions is calculated.