ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 3, № 3 (1999) с. 377–387

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 3, No. 3 (1999) p. 377–387

ЕЛЕКТРОН–ФОНОННА ВЗАЄМОДІЯ В СКЛАДНИХ НАПІВПРОВІДНИКОВИХ КОАКСІЯЛЬНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ КВАНТОВИХ ДРОТАХ

М. В. Ткач
Чернівецький державний університет,
вул. Коцюбинського, 2, Чернівці, 58012, Україна
(Отримано 5 липня 1999 р.)

На основі моделі діелектричного континууму знайдено спектр фононів та потенціял поля поляризації в складних коаксіяльних напівпровідникових циліндричних квантових дротах. У наближенні ефективних мас отримано повний (дискретний і неперервний) спектр та хвильові функції електрона (дірки). Отримано повний гамільтоніян електрон–фононної системи у зображенні вторинного квантування за всіма змінними.

Ключові слова: електрон, фонон, взаємодія, інтерфейс, наногетеросистема.

PACS numbers: 79.60.Gv

I. ВСТУП

У літературі [1–4] докладно вивчено фононний спектр у простих напівпровідникових квантових дротах, розташованих у зовнішньому масивному середовищі. Установлено наявність просторово–обмежених та інтерфейсних фононів і проаналізовано їхні властивості.

На відміну від сферичних складних наногетеросистем, для яких побудована [5, 6] загальна теорія фононного та електронного спектрів, для складних багатошарових квантових дротів така теорія відсутня. Побудувати загальну теорію електронного й фононного спектрів у наближенні ефективної маси та на основі моделі діелектричного континууму і є метою цієї роботи. Одночасно буде знайдено гамільтоніян взаємодії квазічастинок із фононним полем у зображенні вторинного квантування.

Вивчатимемо фонони в багатошаровій напівпровідниковій наногетеросистемі, яка складається з внутрішнього (0) середовища й довільного числа N шарів (нанорозмірної товщини), що вміщені в зовнішнє $(N+1)$ середовище. Така система є складним квантовим дротом (СКД) безмежної довжини, що розташований у масовому $(N+1)$ середовищі. З урахуванням симетрії, задачу знаходження фононного спектра зручно розв'язувати в циліндричній системі координат із віссю OZ, що розташована вздовж аксіяльної оси системи. Середовище i–го шару має внутрішній радіус ρ_{i-1} та зовнішній ρ_i. Для внутрішнього середовища (0) вважаємо $\rho_0 = 0$, а для зовнішнього $\rho_{N+1} = \infty$. Діелектрична проникливість i–го шару вважається відомою

$$\epsilon_i(\omega) = \epsilon_{i\infty}\frac{\omega^2-\omega_{iL}^2}{\omega^2-\omega_{iT}^2}; \qquad i = 0,1,2,...,N+1, \quad (1)$$

тут $\epsilon_{i\infty}, \omega_{iL}, \omega_{iT}$ — високочастотна діелектрична проникливість та частоти поздовжніх і поперечних фононів у відповідних масивних кристалах.

Фононний спектр та потенціял поляризації системи будемо знаходити в моделі діелектричного континууму так, як це здійснювалось для сферичної наногетеросистеми [5, 6].

Отже, шукаючи фононний спектр СКД, потрібно записати рівняння руху для вектора відносного зміщення $\mathbf{u}$ та пов'язати його з потенціялом поля поляризації $\Phi(\mathbf{r})$. Для цього використовуються ті ж міркування, які були справедливі для сферичної наногетеросистеми [5,6].

У результаті знову отримуємо, що в СКД можуть існувати два типи фононного поля:

а) поляризаційне поле обмежених об'ємних фононів, яке визначається умовами

$$\epsilon(\rho,\omega) = 0, \qquad \Delta\Phi_L(\mathbf{r}) \neq 0; \quad (2)$$

б) поляризаційне поле інтерфейсних фононів, яке визначається умовами

$$\epsilon(\rho,\omega) \neq 0, \qquad \Delta\Phi_I(\mathbf{r}) = 0. \quad (3)$$

II. СПЕКТР, ПОТЕНЦІЯЛ ПОЛЯРИЗАЦІЇ ТА ГАМІЛЬТОНІЯН ОБМЕЖЕНИХ ОБ'ЄМНИХ ФОНОНІВ У ЗОБРАЖЕННІ ЧИСЕЛ ЗАПОВНЕННЯ

Виконання умови (2) еквівалентне системі рівнянь

$$\epsilon_i(\omega) = 0, \quad \text{або} \quad (4)$$

$$\epsilon_i(\omega) = \epsilon_{i\infty}\frac{\omega^2-\omega_{Li}^2}{\omega^2-\omega_{Ti}^2}; \quad i = 0,1,2,...,N+1.$$

Звідси очевидно, що енерґії обмежених фононів (Ω_{Li}), які існують у СКД, визначаються частотами відповідних масивних кристалів

$$\Omega_{Li} = \hbar\omega_{Li}, \tag{5}$$

складові яких утворюють СКД.

Тепер потрібно знайти потенціял поляризації L–фононів ($\Phi_L(\mathbf{r})$). Для цього використовуємо зв'язок $\Phi_L(\mathbf{r})$ з відносним зміщенням $\mathbf{u}_L(\mathbf{r})$, який задається формулою

$$\boldsymbol{\nabla}\Phi_L(\mathbf{r}) = \frac{4\pi ne}{1+2\beta}\mathbf{u}_L(\mathbf{r}). \tag{6}$$

Ураховуючи симетрію, потенціял $\Phi_L(\mathbf{r})$ доцільно шукати у вигляді

$$\Phi_L(\mathbf{r}) = \sum_{i=0}^{N+1}\Phi_{Li}(\mathbf{r})\sigma(\rho-\rho_i), \tag{7}$$

де

$$\sigma(\rho-\rho_i) = \begin{cases} 1, & \rho_{i-1} \le \rho \le \rho_i \\ 0, & \text{інша область} \end{cases}, \tag{8}$$

а складові $\Phi_{Li}(\mathbf{r})$ доцільно шукати у вигляді розкладу за повною системою циліндрично–симетричних функцій

$$\Phi_{Li}(\mathbf{r}) = \sum_{mqk_i}\Phi_{mq}(k_i)e^{iqz+im\varphi}(A_{k_i}N_m(k_i\rho)+B_{k_i}J_m(k_i\rho)), \tag{9}$$

де $J_m(k_1\rho), N_m(k_1\rho)$ — циліндричні функції Бесселя й Неймана.

Коефіцієнти розкладу $\Phi_{mq}(k_i)$ визначаємо оберненим перетворенням

$$\Phi_{mq}(k_i) = \int\int_{V_i}\int d^3\mathbf{r}e^{-iqz+im\varphi}\Phi_{Li}(z,\rho,\varphi)(A_{mk_i}N(k_i\rho)+B_{mk_i}J_m(k_i\rho)), \tag{10}$$

де V_i — об'єм i–го шару.

Фізична вимога зникнення потенціялу на межах між середовищами приводить до системи рівнянь

$$\begin{cases} B_{mk_i}J_m(k_i\rho_{i-1}) + A_{mk_i}N(k_i\rho_{i-1}) = 0, \\ B_{mk_i}J_m(k_i\rho_i) + A_{mk_i}N(k_i\rho_i) = 0, \quad i = 1,...N, \end{cases} \tag{11}$$

з якої знаходимо рівняння для визначення спектра значень k_{s_i} (індекс s нумерує розв'язки при фіксованому i)

$$\begin{cases} J_m(k_i\rho_{i-1})N_m(k_i\rho_i) = J_m(k_i\rho_i)N_m(k_i\rho_{i-1}), \\ J_m(k_0\rho_0) = 0, \quad i = 1,...N+1 \end{cases} \tag{12}$$

та співвідношення між коефіцієнтами

$$A_{ms_i} = -B_{ms_i}\frac{J_m(k_{s_i}\rho_i)}{N_m(k_{s_i}\rho_i)} \quad (i = 1,...,N). \tag{13}$$

Коефіцієнти B_{ms_i} $(i = 1,...,N)$ визначаємо оберненим перетворенням із використанням ортогональности відповідних функцій та властивостей функцій Бесселя. У результаті виявляється

$$B_{ms_i} = \frac{1}{\sqrt{\pi L}}[\rho_i^2 Z_{m+1}^2(k_i\rho_{i-1}) \tag{14}$$
$$- \rho_{i-1}^2 Z_{m+1}^2(k_i\rho_i)]^{-1/2}, \quad i = 1,...,N+1,$$

де

$$Z_l(k_i\rho) = J_l(k_{s_i}\rho) - \frac{J_m(k_{s_i}\rho_i)}{N_m(k_{s_i}\rho_i)}N_m(k_{s_i}\rho), \tag{15}$$

а L — довжина основної області вздовж аксіяльної оси.

Окільки $N_l(0) = \infty$, а $J_l(0) = 0$, то для коефіцієнтів A_{ms_0} та B_{ms_0} отримуємо

$$A_{ms_0} = 0, \mathrm{B}_{ms_0} = \left(\sqrt{\pi L}\rho_0|J_m(k_{s_0}\rho_0)|\right)^{-1}, \tag{16}$$

де значення k_{s_0} визначаємо з умови

$$J_m(k_{s_0}\rho_0) = 0. \tag{17}$$

З урахуванням тотожности

$$J_l^{(x)} N_{l-1}^{(x)} - J_{l-1}(x) N_l(x) = \frac{\pi}{2x} \tag{18}$$

з формули (14) знаходимо компактний вираз для $B_{ms_i} (i = 1, ..., N+1)$

$$B_{ms_i} = \frac{K_{s_i}}{2}\sqrt{\frac{\pi}{L}}\left[\left|\frac{1}{N_m^2(k_i\rho_i)} - \frac{1}{N_m^2(k_i\rho_{i-1})}\right|\right]^{-1/2}. \tag{19}$$

Слід мати на увазі, що при $i = N+1$ $\rho_{N+1} \to \infty$.

Тепер, використовуючи зв'язок $\Phi_L(\mathbf{r})$ з $\mathbf{u}_L(\mathbf{r})$ (6) та встановлений вигляд коефіцієнтів B_{ms_i}, вектор $\mathbf{u}_L(\mathbf{r})$ можна подати у вигляді

$$\mathbf{u}_L = \sum_{i=0}^{N+1} \mathbf{u}_{L_i}\sigma(\rho - \rho_i), \qquad \mathbf{u}_{L_i} = \sum_{mqs_i} \mathbf{u}_{mqs_i}, \tag{20}$$

де

$$\mathbf{u}_{mqs_i} = (\frac{1+2\beta}{4\pi ne})_i \Phi_{mqs_i} B_{ms_i} \boldsymbol{\nabla}(Z_m(k_{s_i}\rho)e^{i(qz+m\varphi)}),$$
$$i = 0, 1, .., N+1. \tag{21}$$

Тут і далі покладено

$$Z_m(k_{s_0}\rho) = J_m(k_{s_0}\rho). \tag{22}$$

Записавши рівняння руху для векторів $\mathbf{u}_{mqs_i}$ в такій формі, щоб у ній фігурували частоти ω_{L_i}, та побудувавши відповідну густину функцій Лаґранжа, отримуємо гамільтоніян (H_L) обмежених оптичних фононів у класичних змінних $\mathbf{u}_{mqs_i}$ та π_{mqs_i}. Здійснивши далі перехід до квантованих операторів $\hat{\mathbf{u}}_{mqs_i}$ та $\hat{\pi}_{mqs_i}$,, а від них до операторів вторинного квантування $\hat{b}_{mqs_i}$, $\hat{b}^+_{mqs_i}$ за співвідношеннями

$$\hat{\mathbf{u}}_{mqs_i} = \sqrt{\frac{\hbar}{2n_i\mu_i\omega_{L_i}}}\frac{B_{ms_i}}{\sqrt{q^2+k_{s_i}^2}}\boldsymbol{\nabla}\left(Z_m(k_{s_i}\rho)e^{i(qz+m\varphi)}\right)\left(\hat{b}_{mqs_i} + \hat{b}^+_{-q-ms_i}\right), \tag{23}$$

$$\hat{\boldsymbol{\pi}}_{mqs_i} = \sqrt{\frac{\hbar n_i\mu_i\omega_{L_i}}{2}}\frac{B_{ms_i}}{\sqrt{q^2+k_{s_i}^2}}\boldsymbol{\nabla}\left(Z_m(k_{s_i}\rho)e^{i(qz+m\varphi)}\right)\left(\hat{b}^+_{mqs_i} - \hat{b}_{-q-ms_i}\right), \tag{24}$$

отримуємо гамільтоніян обмежених оптичних фононів циліндричної гетеросистеми в зображенні чисел заповнення

$$\hat{H}_L = \sum_{i=0}^{N+1}\sum_{mqs_i}\Omega_{L_i}\left(\hat{b}^+_{mqs_i}\hat{b}_{mqs_i} + \frac{1}{2}\right), \tag{25}$$

де оператори народження $\hat{b}^+_{mqs_i}$ та знищення $\hat{b}_{mqs_i}$ задовольняють бозонні комутаційні співвідношення

$$[\hat{b}_{mqs_i}, \hat{b}^+_{m'q's'_i}] = \delta_{m,m'}\delta_{q,q'}\delta_{s_i,s'_i}. \tag{26}$$

Гамільтоніян взаємодії електрона з L–фононами знаходимо через потенціял поля поляризації, який, згідно з формулами (6, 21, 23), має вигляд

$$\hat{\Phi}_{L_i} = \left(\frac{4\pi ne}{1+2\beta}\right)_i\sqrt{\frac{\hbar}{2n_i\mu_i\omega_{L_i}}}\frac{B_{ms_i}}{\sqrt{q^2+k_{s_i}^2}}Z_l(k_{s_i}\rho)e^{i(qz+m\varphi)}\left(\hat{b}_{mqs_i} + \hat{b}^+_{-q-ms_i}\right). \tag{27}$$

Після виключення величин n_i, e_i, β_i, μ_i та певних перетворень отримуємо гамільтоніян електрон–L_0 фононної взаємодії у зображенні фононних чисел заповнення

$$\hat{H}_{L_0} = -\sum_{i=0}^{N+1}\sum_{mqs_i}\sqrt{\frac{2\Omega_i e^2}{L}\left(\frac{1}{\epsilon_{\infty i}}-\frac{1}{\epsilon_{0i}}\right)}C_{mi}e^{i(qz+m\varphi)} \tag{28}$$

$$\times\left[N_m(k_{s_i}\rho_i)J_m(k_{s_i}\rho_i)-N_m(k_{s_i}\rho_i)J_m(k_{s_i}\rho_i)\right]\left(\hat{b}_{mqs_i}+\hat{b}^+_{-q-ms_i}\right),$$

де

$$C_{m0} = \left(\rho_0\sqrt{q^2+k_{s_0}^2}N_m(k_{s_0}\rho_0)|J_{m+1}(k_{s_0}\rho_0)|\right)^{-1}, \tag{29}$$

$$C_{mi} = \frac{\pi}{2}\frac{k_{s_i}}{\sqrt{q^2+k_{s_i}^2}}\frac{|N_m(k_i\rho_{i-1})|}{\sqrt{|N_m^2(k_{s_i}\rho_{i-1})-N_m^2(k_{s_i}\rho_i)|}}, \qquad i=1,...,N+1. \tag{30}$$

Таким чином, отримано гамільтоніян обмежених поляризаційних фононів та гамільтоніян взаємодії цих фононів з електроном у зображенні вторинного квантування за польовими змінними.

III. СПЕКТР, ПОТЕНЦІЯЛ ПОЛЯРИЗАЦІЇ ТА ГАМІЛЬТОНІЯН ІНТЕРФЕЙСНИХ ФОНОНІВ У ЗОБРАЖЕННІ ЧИСЕЛ ЗАПОВНЕННЯ

Як вже відзначено, поле поляризації, зумовлене наявністю меж розділу напівпровідникової гетеросистеми, визначається такими умовами:

$$\epsilon(\rho,\omega)\neq 0, \qquad \Delta\Phi_I(\mathbf{r})=0. \tag{31}$$

Поле $\Phi_I(\mathbf{r})$ пов'язане з існуванням відповідної складової $\mathbf{u}_I$ вектора відносного зміщення $\mathbf{u}$, а отже, у системі існують відповідні коливання, які доцільно назвати інтерфейсними. Спектр і потенціял поля інтерфейсних фононів СКД знаходиться цілком аналогічно до того, як це було зроблено для сферичної наногетеросистеми [5, 6]. Тому в подальшому викладі будемо акцентувати основну увагу лише на ті місця, де виникає відмінність від сферичних систем.

Функцію, яка задовольняє рівняння (31), з урахуванням циліндричної симетрії системи доцільно шукати в циліндричній системі координат у вигляді

$$\Phi_I(\rho,\varphi,z) = f(\rho)e^{i(qz+m\varphi)}. \tag{32}$$

Підстановка (32) в рівняння (31) приводить до таких рівнянь для $f(\rho)$:

$$\frac{\partial^2 f_m(\rho)}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f_m(\rho)}{\partial\rho}-(q^2+\frac{m^2}{\rho^2})f_m(\rho)=0. \tag{33}$$

Це модифіковані рівняння Бесселя, лінійно незалежними розв'язками яких є $I_m(q\rho)$ та $K_m(q\rho)$. Отже, загальний розв'язок рівнянь (33) може бути записаний у вигляді

$$f_m(\rho) = AI_m(q\rho)+BK_m(q\rho). \tag{34}$$

Оскільки потенціял поля поляризації Φ_I повинен бути таким, щоб створені ним напруженість та індукція задовольнили крайові умови

$$\mathbf{E}_{\tau_i}(\rho_i)=\mathbf{E}_{\tau_{i+1}}(\rho_i), \qquad \mathbf{D}_{n_i}(\rho_i)=\mathbf{D}_{n_{i+1}}(\rho_i), \tag{35}$$

то функції $f_l(q\rho)$ у різних шарах гетеросистеми повинні мати різні коефіцієнти A_i, B_i. У зв'язку з цим $f_m(q\rho)$ подаємо у вигляді

$$f_m(q\rho)=\sum_{i=0}^{N+1}[A_iI_m(q\rho)+B_iK_m(q\rho)]\sigma(\rho-\rho_i), \tag{36}$$

де з умови скінчености потенціялу Φ_I при $\rho=0$ і $\rho=\infty$ випливає, що

$$B_0=A_{N+1}=0. \tag{37}$$

Крайові умови (35) дають систему $2(N+1)$ однорідних рівнянь

$$A_iI_m(q\rho_i)+B_iK_m(q\rho_i)=A_{i+1}I_m(q\rho_i) \tag{38}$$
$$+B_{i+1}K_m(q\rho_i),$$

$$\epsilon_i\left(A_i\frac{\partial I_m(q\rho)}{\partial\rho}+B_i\frac{\partial K_m(q\rho)}{\partial\rho}\right)\Bigg|_{\rho_i} \tag{39}$$

$$=\epsilon_{i+1}\left(A_{i+1}\frac{\partial I_m(q\rho)}{\partial\rho}+B_{i+1}\frac{\partial K_m(q\rho)}{\partial\rho}\right)\Bigg|_{\rho_i},$$

$$i=0,...,N.$$

Система (38), (39) має нетривіяльні розв'язки при умові рівности нулеві відповідного детермінанта. Вона розв'язується так само, як і у випадку сферичної гетеросистеми [5, 6].

Отже, увівши позначення

$$b_i = \frac{\epsilon_{i+1}}{\epsilon_i}, \quad c_i = \frac{K_m(q\rho_i)}{I_m(q\rho_i)}, \quad d_i = \frac{K'_m(q\rho)}{I'_m(q\rho)}|_{\rho_i}, \quad (40)$$

з (38), (39) отримуємо дисперсійне рівняння для власних частот системи

$$\alpha_N^m(\omega) - \frac{K'_m(q\rho_N)}{I'_m(q\rho_N)} \frac{I_m(q\rho_N)}{K_m(q\rho_N)} \beta_N^m(\omega) = 0, \quad (41)$$

де функції α_N та β_N визначаються рекурентними співвідношеннями

$$\alpha_N^m(\omega) = \alpha_{N-1}^m \left[\frac{K'_m(q\rho_N)}{I'_m(q\rho_N)} + \frac{K_m(q\rho_{N-1})}{I_m(q\rho_{N-1})} \right] \quad (42)$$

$$- \beta_{N-1}^m \left[\frac{K'_m(q\rho_N)}{I'_m(q\rho_N)} + \frac{K_m(q\rho_{N-1})}{I_m(q\rho_{N-1})} \right],$$

$$\beta_N^m(\omega) = \beta_{N-1}^m \left[\frac{K'_m(q\rho_{N-1})}{I'_m(q\rho_{N-1})} - \frac{\epsilon_{N+1} K_m(q\rho_N)}{\epsilon_N I_m(q\rho_N)} \right]$$

$$- \alpha_{N-1}^m \left[\frac{K_m(q\rho_{N-1})}{I_m(q\rho_{N-1})} - \frac{\epsilon_{N+1} K_m(q\rho_N)}{\epsilon_N I_m(q\rho_N)} \right],$$

де

$$\beta_0(\omega) = \epsilon_i(\omega)\epsilon_0(\omega), \quad \alpha_0 = 1.$$

Розв'язки трансцендентного рівняння (41) визначають спектр власних частот $\omega_{sl}(s = 1, 2, ...\tau)$ як функцій від q. Таким чином, при кожному фіксованому значенні m виникає s гілок частот, які визначають спектр інтерфейсних фононів як функцій квазіімпульсу q.

Коефіцієнти A_i, B_i визначаємо із системи рівнянь (38), (39) однозначно, і якщо покласти $A_0 = 1$ (в силу тимчасової довільности нормування), то внаслідок розв'язування отримуємо такі рекурентні співвідношення:

$$B_{N+1} = B_N + \frac{I_m(q\rho_N)}{K_m(q\rho_N)} A_N,$$

$$B_N = \left[\frac{K'_m(q\rho_{N-1})}{I'_m(q\rho_{N-1})} - \frac{K_m(q\rho_{N-1})}{I_m(q\rho_{N-1})} \right]^{-1}$$

$$\times \left[B_{N-1} \left(\frac{K'_m(q\rho_{i-1})}{I'_m(q\rho_{i-1})} \frac{\epsilon_{N-1} K_m(q\rho_{N-1})}{\epsilon_N I_m(q\rho_{N-1})} \right) \right.$$

$$\left. + A_{N-1} \left(\epsilon_{N-1}/\epsilon_N - 1 \right) \right],$$

$$A_N = \left[\frac{K'_m(q\rho_{N-1})}{I'_m(q\rho_{N-1})} - \frac{K_m(q\rho_{N-1})}{I_m(q\rho_{N-1})} \right]^{-1}$$

$$\times \left[A_{N-1} \left(\frac{K'_m(q\rho_{N-1})}{I'_m(q\rho_{N-1})} - \frac{\epsilon_{N-1} K_m(q\rho_{N-1})}{\epsilon_N I_m(q\rho_{N-1})} \right) \right.$$

$$\left. + B_{N-1} \frac{K'_m(q\rho_{N-1}) K_m(q\rho_{N-1})}{I'_m(q\rho_{N-1}) I_m(q\rho_{N-1})} (1 - \epsilon_{N-1}/\epsilon_N) \right],$$

$$B_1 = \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} - 1 \right) \left[\frac{K'_m(q\rho_0)}{I'_m(q\rho_0)} - \frac{K_m(q\rho_0)}{I_m(q\rho_0)} \right]^{-1}, \quad (43)$$

$$A_1 = \left(\frac{K'_m(q\rho_0)}{I'_m(q\rho_0)} - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} \frac{K_m(q\rho_0)}{I_m(q\rho_0)} \right) \left[\frac{K'_m(q\rho_0)}{I'_m(q\rho_0)} \right.$$

$$\left. - \frac{K_m(q\rho_0)}{I_m(q\rho_0)} \right]^{-1}.$$

Тепер очевидно, що всі коефіцієнти A_i та B_i,, а значить і функції i–го середовища $(f^i(q\rho))$, повинні характеризуватися індексами msq. Отже, функції

$$f_{msq}(\rho) = \sum_{i=0}^{N+1} f_{ms}^i(q\rho)\sigma(\rho - \rho_i), \quad (44)$$

де

$$f_{ms}^i(q\rho) = [A_i^{ms}(q) I_m(q\rho) + B_i^{ms}(q) K_m(q\rho)], \quad (45)$$

цілком визначені. Тому потенціял поля поляризації інтерфейсних коливань можна подати у вигляді однозначного розкладу за системою функцій, яка задовольняє необхідні крайові умови і є повною

$$\Phi_I(\mathbf{r}) = \sum_{msq} \Phi_{msq} f_{ms}^{(q\rho)} e^{i(qz + m\varphi)}. \quad (46)$$

Використовуючи зв'язок потенціялу $\Phi_I(\mathbf{r})$ з вектором відносного зміщення $\mathbf{u}_I$ та виконавши всі перетворення так, як це робилося у випадку сферичної гетеросистеми [5,6], отримуємо гамільтоніян інтерфейсних коливань у координатному зображенні

$$H_I = \frac{1}{2} \sum_{msq} \left(\frac{\boldsymbol{\pi}_{msq}^* \boldsymbol{\pi}_{msq}}{n\mu} + n\mu\omega_{sq}^2 \mathbf{u}_{msq}^* \mathbf{u}_{msq} \right). \quad (47)$$

Увівши оператори зміщень та імпульсів

$$\hat{\mathbf{u}}_{msq} = \left[\frac{\hbar}{2n\mu\omega_{sq}\rho_0 X_{sq}}\right]^{1/2} \boldsymbol{\nabla}\left(f_{ms}(\rho)e^{i(qz+m\varphi)}\right)\left(\hat{b}_{msq} + \hat{b}^{+}_{-ms-q}\right), \tag{48}$$

$$\hat{\boldsymbol{\pi}}_{msq} = i\left[\frac{\hbar n\mu\omega_{sq}}{2\rho_0 X_{sq}}\right]^{1/2} \boldsymbol{\nabla}\left(f_{ms}(\rho)e^{i(qz+m\varphi)}\right)\left(\hat{b}^{+}_{msq} - \hat{b}_{-ms-q}\right), \tag{49}$$

які пов'язані з операторами народження $\hat{b}^{+}_{msq}$ та зниження $\hat{b}_{msq}$ відповідних станів інтерфейсних фононів і задовольняють бозонні комутаційні співвідношення

$$[\hat{b}_{mqs}, \hat{b}^{+}_{m'q's'}] = \delta_{m,m'}\delta_{q,q'}\delta_{s_i,s'}, \tag{50}$$

та вимагаючи діягональности гамільтоніяна інтерфейсних фононів, отримуємо

$$\hat{H}_I = \sum_{msq} \Omega_{msq}\left(\hat{b}^{+}_{mqs}\hat{b}_{mqs} + \frac{1}{2}\right). \tag{51}$$

При цьому визначаємо аналітичний вираз величини X_{msq}

$$X_{msq} = 2\pi Lq \sum_{i=0}^{N+1}\left[\rho_i f^{i}_{ms}(q\rho_i) f'^{i}_{ms}(q\rho_i) - \rho_{i-1} f^{i-1}_{ms}(q\rho_{i-1}) f'^{i-1}_{ms}(q\rho_{i-1})\right], \tag{52}$$

де L — довжина основної області.

Аналітичний розрахунок гамільтоніяна електрон–фононної взаємодії в зображенні вторинного квантування здійснюємо аналогічно до того, як це було зроблено для сферичної гетеросистеми [5, 6]. У результаті отримуємо шуканий гамільтоніян у вигляді

$$\hat{H}_{e-I} = -\sum_{imsq}\sqrt{\frac{2\pi e^2\Omega_{msq}}{X_{msq}}\left(\frac{1}{\epsilon_{\infty i}} - \frac{1}{\epsilon_{0i}}\right)}\frac{\epsilon_{0i}\Omega^2_{msq} - \epsilon_{\infty i}\Omega^2_{L_i}}{\Omega_{msq}\Omega_{L_i}(\epsilon_{0i} - \epsilon_{\infty i})} f^{i}_{ms}(q\rho)e^{i(qz-m\varphi)}\left(\hat{b}_{msq} + \hat{b}^{+}_{-ms-q}\right). \tag{53}$$

Таким чином, знайдено спектр, гамільтоніян фононів та гамільтоніян електрон–фононної взаємодії в зображенні чисел заповнення за польовими змінними і в координатному за електронними змінними для циліндричної наногетеросистеми.

IV. СПЕКТР ХВИЛЬОВИХ ФУНКЦІЙ ЕЛЕКТРОНІВ ТА ДІРОК У СКЛАДНИХ КОАКСІЯЛЬНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ КВАНТОВИХ ДРОТАХ

У цьому розділі розглянуто багатошарову напівпровідникову гетеросистему, яка складається з внутрішнього циліндричного середовища (0) і довільної кількости (N) коаксіяльних шарів нанорозмірної товщини, що вміщені в зовнішнє (N+1) середовище. Середовище i–го шару має внутрішній радіус ρ_{i-1} і зовнішній ρ_i. Воно характеризується ефективними масами електрона (μ^e_l) та дірки (μ^h_i), а також потенціяльною енерґією електрона стосовно вакууму або іншого зовнішнього середовища $(-U_i)$ та ширною забороненої зони (E_{gi}). Усі фізичні величини вважаємо такими, що характеризують відповідні масивні аналоги нанокристалів.

Вивчаючи спектр і хвильові функції електрона й дірки в описаній гетеросистемі, зауважимо, що оскільки математичні викладки для обох цих часток цілком аналогічні, то вони будуть виконуватись лише для електрона, отже індекс e біля ефективної маси й потенціяльної енерґії електрона будемо опускати. Увівши для зручности розрахунків одиничну функцію

$$\sigma(\rho - \rho_i) = \begin{cases} 1 & \rho_{i-1} \le \rho \le \rho_i \\ 0 & \text{інша область,} \end{cases} \tag{54}$$

ефективну масу електрона в гетеросистемі та його потенціяльну енерґію стосовно вакууму можна записати у вигляді

$$\mu(\rho) = \sum_{i=0}^{N+1} \mu_i \sigma(\rho - \rho_i), \tag{55}$$

$$U(\rho) = -\sum_{i=0}^{N+1} U_i \sigma(\rho - \rho_i), \qquad (U_{N+1} = 0). \tag{56}$$

Оскільки система має аксіяльну симетрію, то рівняння Шрединґера доцільно розв'язувати в циліндричній системі координат, вісь OZ якої збігається з аксіяльною віссю системи. Тепер гамільтоніян системи буде мати вигляд

$$\hat{H}(\rho, \varphi, z) = -\frac{\hbar^2}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}_{\rho\varphi}\frac{1}{\mu(\rho)}\boldsymbol{\nabla}_{\rho\varphi} + \frac{1}{\mu(\rho)}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) - \sum_{i=0}^{N+1} U_i \sigma(\rho - \rho_i), \tag{57}$$

і розв'язок рівняння Шрединґера

$$\hat{H}\Psi(\rho, \varphi, z) = E\Psi(\rho, \varphi, z) \tag{58}$$

доцільно шукати в нормованому на δ–символи вигляді

$$\Psi(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\frac{e^{i(kz+m\varphi)}}{\sqrt{2\pi L}}. \tag{59}$$

З (58) отримаємо рівняння для радіяльної функції:

$$\left(\frac{\hbar^2}{2}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\rho}{\mu(\rho)}\frac{\partial}{\partial\rho}\right) - \frac{m^2}{\rho^2\mu(\rho)} - \frac{k^2}{\mu(\rho)}\right] + E + \sum_{i=0}^{N+1} U_i \sigma(\rho - \rho_i)\right)R(\rho) = 0. \tag{60}$$

Унаслідок того, що μ є функцією від ρ, рівняння (60) далі можна розв'язувати двома способами: точним і наближеним.

1. Точний спосіб полягає в тому, щоб доданок $\frac{k^2}{\mu(\rho)}$ зберігати у всіх областях змінної ρ, унаслідок чого радіяльна функція буде залежати (від m_{ik}), як від параметрів. При цьому у випадку великої кількости шарів (N) виникатимуть досить громіздкі математичні умови через неперервність хвильових функцій і потоків густин імовірностей на межах наногетеросистеми. Тому такий підхід доцільно реалізувати при малих N.

2. Наближені способи можуть бути різні, але суть їх у тому, щоб замість $\mu(\rho)$ ввести деяку оптимальну "скорельовану" ефективну масу електрона μ, не залежну від ρ у складовій $\frac{k^2}{\mu(\rho)}$. Це зразу ж дозволяє відділити поздовжній рух електрона, подавши повну енерґію E у вигляді

$$E = E_\perp + \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} \tag{61}$$

і для функції $R(\rho)$ отримати простіше рівняння

$$\left(\frac{\hbar^2}{2}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\rho}{\mu(\rho)}\frac{\partial}{\partial\rho}\right) - \frac{m^2}{\rho^2\mu(\rho)}\right] + E_\perp + \sum_{i=0}^{N+1} U_i \sigma(\rho - \rho_i)\right)R(\rho) = 0. \tag{62}$$

Тут $E_\perp$ можна трактувати як енерґію руху електрона в напрямку, перпендикулярному до аксіяльної оси системи. Що ж до вибору величини μ, то один із способів полягає в тому, щоб її записати у вигляді

$$\frac{1}{\mu} = \sum_{i=0}^{N+1} \mu_i^{-1} P_i, \tag{63}$$

де P_i — імовірність перебування електрона в i–му шарі. Оскільки ймовірність P_i може бути знайдена при відомій функції $R_m(\rho)$, то величину μ можна знайти за допомогою ітераційної процедури, а саме, поклавши

$$\frac{1}{\mu^0} = \frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N+1} \mu_i^{-1}, \tag{64}$$

розв'язати рявняння (62), знайти $R_{m0}(\rho)$, за яким знайти P_i^0, підставити P_i^0 в (62), звідки знайти μ^1 і.т.д. Такі розрахунки здійснюємо доти, поки не досягаємо бажаної точности за шуканою величиною енерґії $E_\perp$ чи масою μ. Повертаючись до розв'язування рівняння (62), будемо шукати функцію $R_m(\rho)$ у вигляді

$$R_m(\rho) = \sum_{i=0}^{N+1} R_m^i(\rho)\sigma(\rho - \rho_i), \tag{65}$$

тоді, ураховуючи, що $\mu(\rho)$ задається формулою (64), з (62) отримаємо систему рівнянь

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}(U_i + E_\perp)\right] R_m^i(\rho) = 0, \quad i = 0, ..., N+1 \tag{66}$$

стосовно власних значень $E_\perp$ та функцій R_m^i. Розв'язки системи (66) залежать від области енерґії $E_\perp$.

1. В області від'ємних енерґій $E_\perp = - \mid E_\perp \mid = -\mathcal{E} < 0$ розв'язками (66) є лінійні комбінації функцій Бесселя й Неймана при $U_i \geq \mathcal{E}$ або модифіковані функції Бесселя при $U_i \leq \mathcal{E}$, тобто

$$R_m^i(K_m^i\rho) = A_m^i\mathcal{I}_m^i(K_m^i\rho) + B_m^i\mathcal{N}_m^i(K_m^i\rho), \tag{67}$$

де

$$\mathcal{I}_m^i(K_m^i\rho) = \begin{cases} J_m^i(k_m^i\rho), & U_i \geq \mathcal{E} \\ I_m^i(\kappa_m^i\rho), & U_i \leq \mathcal{E} \end{cases},$$

$$\mathcal{N}_m^i(K_m^i\rho) = \begin{cases} N_m^i(k_m^i\rho), & U_i \geq \mathcal{E} \\ K_m^i(\kappa_m^i\rho), & U_i \leq \mathcal{E} \end{cases}, \tag{68}$$

$$\begin{cases} k_m^i = \hbar^{-1}\sqrt{2\mu_i(U_i - \mathcal{E})}, & U_i \geq \mathcal{E} \\ \kappa_m^i = \hbar^{-1}\sqrt{2\mu_i(\mathcal{E} - U_i)}, & U_i \leq \mathcal{E} \end{cases}. \tag{69}$$

З умов неперервности густини ймовірности та її потоку через усі межі наносистеми випливають рівняння

$$\begin{cases} R_m^i(\rho_i) = R_m^{i+1}(\rho_i), \\ \dfrac{1}{\mu_i}\dfrac{\partial R_m^i(\rho_i)}{\partial\rho}\Bigg|_{\rho=\rho_i} = \dfrac{1}{\mu_{i+1}}\dfrac{\partial R_m^{i+1}(\rho_i)}{\partial\rho}\Bigg|_{\rho=\rho_i} \end{cases} \quad i = 0, ..., N, \tag{70}$$

які разом з умовами скінчености хвильової функції при $\rho \to 0$ і $\rho \to \infty$ визначають дискретний спектр енерґій стаціонарних станів $\mathcal{E}_{nm}$, а при врахуванні умови нормування

$$\int_0^\infty R_{mn'}^*(\rho)R_{mn}(\rho)\rho d\rho = \delta_{nm'} \tag{71}$$

однозначно визначають усі коефіцієнти A_m^i та B_m^i, а отже, і радіяльні функції $R_{mn}(\rho)$. Конкретна процедура розрахунку спектра і хвильових функцій повністю аналогічна до тієї, яку виконували для сферичної наногетеросистеми, тому, не проробляючи її, зразу ж наведемо енерґетичний спектр тієї области енерґії, яка відповідає зв'язаним станам, що характеризують рух електрона поперек аксіяльної оси й одночасно неперервний рух уздовж цієї оси.

Отже, хвильові функції системи в станах при $E_\perp < 0$ є такими:

$$\mathbf{\Psi}_{mnk}(\mathbf{r}) = R_{mn}(\rho)e^{i(kz+m\varphi)}. \tag{72}$$

Пізніше ця система функцій разом з функціями, які описують неперервний спектр електрона в системі, буде використана для знаходження електрон–фононної взаємодії.

2. В області додатних енерґій $E_\perp > 0$ рівняння (66) розпадається на систему рівнянь

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} + k_{\perp i}^2\right] R_m^i(k_{\perp i}\rho) = 0, \quad i = 0, ..., N+1, \tag{73}$$

де

$$k_{\perp i}^2 = \frac{2m_i}{\hbar^2}(E_\perp + U_i). \tag{74}$$

Кожне рівняння з системи (73) має своїми лінійно незалежними розв'язками функції Ганкеля H_m^+ та H_m^-.

Умова скінчености хвильової функції при $\rho \to 0$ вимагає для центрального середовища розв'язку виду

$$R_m^0(k_{\perp 0}\rho) = iA_m^0 H_m^-(k_{\perp 0}\rho) - H_m^+(k_{\perp 0}\rho) = iA_m^0 \mathcal{I}_m(k_{\perp 0}\rho). \tag{75}$$

Для всіх інших середовищ розв'язки можна подати у вигляді

$$R_m^i(k_{\perp 0}\rho) = iA_m^0(H_m^-(k_{\perp 0}\rho) - S_m^i H_m^+(k_{\perp 0}\rho)), \quad i = 1, 2, ..., N+1. \tag{76}$$

Коефіцієнти A_m^i та S_m^i визначаємо з умов неперервности хвильової функції й потоку густини ймовірности на всіх межах. З урахуванням того, що

$$K_{\perp N+1} = k_\perp = \frac{\sqrt{2\mu_{N+1}E_\perp}}{\hbar}, \tag{77}$$

$$S_m^{N+1} = S_m = e^{2i\delta_m}, \qquad A_m^{N+1} = A_m,$$

для S_m^i отримуємо рекурентні співвідношення

$$S_m^{i+1} = \frac{\Phi_m'^i(k_{i+1}r_i)H_m^-(k_{i+1}r_i) - \Phi_m^i(k_{i+1}r_i)H_m'^+(k_{i+1}r_i)}{\Phi_m'^i(k_i r_i)H_m^+(k_{i+1}r_i) - \Phi_m^i(k_i r_i)H_m'^-(k_{i+1}r_i)}, \tag{78}$$

де

$$\Phi_m^i(k_i r_i) = H_m^-(k_i r_i) - S_m^i H_m^+(k_i r_i), \tag{79}$$

$$\Phi_m'^i(k_i r_i) = [H_m'^-(k_i r) - S_m^i H_m'^+(k_i r)]_{r_i},$$

а для коефіцієнтів A_m^i отримуємо такий зв'язок з A_m:

$$A_m^i = A_m \frac{k}{k_i}\prod_{p=i}^{N}\frac{\Phi_m^p(k_{p+1}r_p)}{\Phi_m^p(k_p r_p)}. \tag{80}$$

Коефіцієнт A_m визначаємо з умови нормування радіяльної частини хвильової функції

$$\int\limits_0^\infty R_m(k_\perp\rho)R_m^*(k'_\perp\rho)\rho d\rho = \delta(k_\perp - k'_\perp). \tag{81}$$

Оскільки функції $R_m(k_\perp\rho)$ задовольняють рівняння Бесселя на всіх проміжках змінної ρ, то, розглядаючи близькі значення k і k' та користуючись рівняннями для функцій $R_m(k\rho)$ і $R_m^*(k'\rho)$, отримуємо

$$\int\limits_0^\infty \rho R_m(k_\perp\rho)R_m^*(k'_\perp\rho)d\rho = \frac{1}{k'^2_\perp - k_\perp^2}\lim_{\rho_{N+1}\to\infty}\left(\sqrt{\rho}R_m^*(k'_\perp\rho)\frac{\partial(\sqrt{\rho}R_m(k_\perp\rho))}{\partial\rho} - \sqrt{\rho}R_m(k_\perp\rho)\frac{\partial(\sqrt{\rho}R_m^*(k'_\perp\rho))}{\partial\rho}\right)\Bigg|_0^{\rho_{N+1}}. \tag{82}$$

Ураховуючи, що при $\rho \to 0$ вираз у правій частині (82) дорівнює нулеві, а при $\rho \to \infty$ справедлива асимптотика

$$\lim_{\rho_{N+1}\to\infty} R_m(k_\perp \rho_{n+1}) = \lim_{\rho_{N+1}\to\infty} 2A_m \sqrt{\frac{2}{\pi k_\perp \rho_{N+1}}} e^{i\delta} \sin\left[k_\perp \rho_{N+1} - \frac{\pi}{2}\left(m + \frac{1}{2}\right) + \delta\right], \tag{83}$$

з рівности (82) отримаємо

$$\int_0^\infty \rho R_m(k_\perp \rho) R_m^*(k'_\perp \rho) d\rho = \frac{4A_m^2}{k}\delta(k_\perp - k'_\perp). \tag{84}$$

Порівнюючи вирази (81) і (84), знаходимо величину коефіцієнта A при нормуванні на δ–функцію

$$A_m = \frac{\sqrt{k}}{2} \tag{85}$$

Таким чином, визначили хвильові функції

$$\Psi_{mk_\perp k}(\mathbf{r}) = R_m(k_\perp \rho) e^{i(kz + m\varphi)}, \tag{86}$$

які описують стани електрона в цій наногетеросистемі при $E_\perp > 0$. Згідно з загальною теорією, система функцій (86) є ортогональною до системи (62), і разом вони створюють повну ортонормовану систему, за якою можна здійснити перехід до зображення вторинного квантування за електронними змінними.

Для цього вводимо квантовану хвильову функцію

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \sum_{mkp} \Psi_{mkp}(\mathbf{r}) \hat{a}_{mkp}, \tag{87}$$

де $\hat{a}_{mkp}$ — фермієвський оператор знищення електронного стану (mkp), причому індекс p набуває дискретну й неперервну сукупність значень залежно від того, у яку область енерґій потрапляють відповідні стани

$$p = \begin{cases} n & E_\perp < 0 \\ k_\perp & E_\perp > 0 \end{cases}. \tag{88}$$

Здійснивши перехід до зображення вторинного квантування в операторі Гамільтона, для електрона в цій наногетеросистемі отримуємо

$$\hat{H}_e = \int \hat{\Psi}^+(\mathbf{r}) H_e \Psi(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \sum_{mpk} E_{mpk} \hat{a}^+_{mkp} \hat{a}_{mkp}, \tag{89}$$

де слід узяти до уваги, що при $E_\perp > 0$ $p = k_\perp$, і тому суму за $k_\perp$ у цьому разі потрібно розглядати як відповідний інтеґрал; індекс k також приймає неперервну сукупність значень, а отже, і відповідну суму також слід розглядати як інтеґрал. За допомогою квантованої функції (87) і гамільтоніянів (28, 53) знаходимо і гамільтоніяни взаємодії електрона в зображенні вторинного квантування за всіма змінними з обмеженими фононами

$$\hat{H}_{e-L} = \sum_{i=0}^{N+1} \sum_{s,q,m,p,p_2,m,m_2,k} \mathcal{F}^{p_2 m_2}_{L p_1 m_1}(s_i q m) \hat{a}^+_{p_1 m_1 k+q} \hat{a}_{p_2 m_2 k}\left(\hat{b}_{mqs_i} + \hat{b}^+_{m-qs_i}\right), \tag{90}$$

де

$$\mathcal{F}^{p_2 m_2}_{L p_1 m_1}(s_i q m) = \sqrt{\frac{2e^2\Omega_{Li}}{L}\left(\frac{1}{\epsilon_{\infty i}} - \frac{1}{\epsilon_{0i}}\right)} 2\pi \delta_{m_1, m_2+m} \tag{91}$$

$$\times \int_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} \rho R^{*i}_{m_1 p_1}(\rho) R^i_{m_2 p_2}(\rho) \Big[N_m(k_{s_i}\rho_i) J_m(k_{s_i}\rho) - J_m(k_{s_i}\rho_i) N_m(k_{s_i}\rho)\Big] d\rho,$$

та з інтерфейсними фононами

$$\hat{H}_{e-I} = \sum_{i,s,k,q,m,p,p_2,m_1,m_2} \mathcal{F}^{p_2 m_2}_{I p_1 m_1}(isqm) \hat{a}^+_{p_1 m_1 k+q} \hat{a}_{p_2 m_2 k}\left(\hat{b}_{msq} + \hat{b}^+_{ms-q}\right), \tag{92}$$

де

$$\mathcal{F}_{Ip_1m_1}^{p_2m_2}(isqm) = \sqrt{\frac{2e^2\Omega_{msq}}{X_{msq}}\left(\frac{1}{\epsilon_{\infty i}} - \frac{1}{\epsilon_{0i}}\right)} 2\pi\delta_{m_1,m_2+m} \quad (93)$$

$$\times \frac{\epsilon_{0i}\Omega_{msq}^2 - \epsilon_{\infty i}\Omega_{li}^2}{\Omega_{msq}\Omega_{Li}(E_{0i} - E_{\infty i})} \int\limits_{\rho_{i-1}}^{\rho_i} \rho R_{m_1p_1}^{*i}(\rho) R_{m_2p_2}^i(\rho) f_m^i(qs) d\rho.$$

Таким чином, із перших принципів (без довільних параметрів) у межах моделі діелектричного континууму фононів та в наближенні ефективної маси для електрона отримано повний гамільтоніян

$$\hat{H} = \hat{H}_e + \hat{H}_{PH} + \hat{H}_{e-L} + \hat{H}_{e-I} \quad (94)$$

електрон–фононної системи в складній наногетеросистемі коаксіяльних циліндричних дротів (квантових ям).

[1] G. Q. Hai, F. M. Peeters, J. T. Devrecse, L. Wendler, Phys. Rev. B **48**, 12016 (1993).

[2] X. F. Wang, X. L. Lei, Phys. Rev. B **49**, 4780 (1994).

[3] K. Guven, B. Tanatar, Phys. Rev. B **51**, 1784 (1995).

[4] B. Tanatar, K. Guven, C. R. Bennett, N. C. Constantinov, Phys. Rev. B **53**, 1784 (1995).

[5] Н. В. Ткач, Физ. тверд. тела **39**, 1109 (1997).

[6] M. Tcach, V. Holovatsky, O. Voitsekhivska, M. Michalyova, Phys. Status Solidi B **203**, 373 (1997).

ELECTRON–PHONON INTERACTION IN COMPLICATED SEMICONDUCTOR COAXIAL CYLINDRICAL QUANTUM WIRES

M. V. Tkach

Chernivtsi State University,

2 Kotsiubynskyi Str., Chernivitsi, UA–58012, Ukraine

Phonon spectrum and polarisation field potential within complicated coaxial semiconductor cylindrical quantum wires are obtained in the framework of the dielectric continuum model. The total spectrum (discrete and continuous) and electron and hole wave functions are found in the effective mass approximation. The Hamiltonian of electron–phonon system in a representation of the second quantization over all the variables is established.