ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 3, № 3 (1999) с. 252–263

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 3, No. 3 (1999) p. 252–263

МАСИВНЕ ПЕРЕНОРМУВАННЯ ПРИ НЕЦІЛІЙ ВИМІРНОСТІ ПРОСТОРУ

Ю. Головач[1,2]
[1] *Інститут фізики конденсованих систем НАН України*
вул. Свєнціцького, 1, Львів, 79011, Україна
[2] *Львівський національний університет ім. І. Франка, кафедра теоретичної фізики,*
вул. Драгоманова, 12, Львів, 79005, Україна

(Отримано 31 серпня, 1999)

Обговорюється спосіб дослідження критичної поведінки при нецілій вимірності простору d. Обчислення проведено на підставі рівнянь масивної теорії поля (рівнянь Каллена–Симанціка) при фіксованому нецілому d. Зроблено огляд робіт, у яких отримані кількісні характеристики критичної поведінки декількох широко вживаних моделей статистичної фізики.

Ключові слова: ренормалізаційна група, критичні явища, критичний показник, асимптотичний ряд.

PACS number(s): 05.10.Cc, 11.10.Gh, 64.60.–i, 75.10.Hk

I. ВСТУП

Серед наукової спадщини Миколи Боголюбова чільне місце належить працям [1], у яких сформульовано метод ренормалізаційної групи (РГ). Виникнувши в 50–х роках у задачах квантової теорії поля [2,3,1], сьогодні РГ стала потужним загальним методом теоретичної й математичної фізики [4]. Зокрема на РГ підході значною мірою ґрунтується сучасна теорія критичних явищ [5]. Метою цієї статті, присвяченої 90–річчю від дня народження М. М. Боголюбова, є сформулювати узагальнення одного з варіантів методу РГ на випадок нецілої вимірности простору і провести огляд робіт, у яких за допомогою такого підходу досліджували критичну поведінку декількох часто вживаних моделей статистичної фізики.

На сьогодні існують різні формулювання методу РГ стосовно теорії критичних явищ. Важливою рисою, притаманною різним РГ підходам до аналізу критичних явищ, є те, що теорія критичних явищ оперує певним колом понять, спільних для опису зовсім різних систем, своєю чергою, метод РГ дозволяє знайти їхні кількісні характеристики. Це асимптотичні значення критичних показників та відношення амплітуд, що описують поведінку системи в околі критичної точки; рівняння для потоків РГ та ефективні показники, що характеризують наближення до критичної области; нерухомі точки тощо. Визначення цих характеристик та передбачення можливости критичних явищ у різних системах і становить предмет теорії. Причому, тоді як розташування критичних точок, особливості наближення до критичної области, її розмір є специфічними для кожної окремо взятої системи і визначаються її *мікроскопічними* параметрами, поведінка в близькому околі критичної точки є *універсальною*. У ранніх теоріях критичних явищ універсальність трактувалась як однаковість поведінки в околі критичної точки в усіх системах, незалежність її ні від яких параметрів. Сучасне розуміння універсальности передбачає, що поведінка в близькому околі критичної точки залежить від певних *ґлобальних* характеристик систем. Стосовно спільности або відмінности цих характеристик, останні можуть бути поділені на певні *класи універсальности*. До таких характеристик належать вимірність простору, вимірність та симетрія параметра впорядкування. Зокрема предметом аналізу, проведеного в цій статті, будуть декілька моделей, що належать до різних класів універсальности (різна вимірність параметра впорядкування й різна симетрія). Ми розглянемо метод досліджень, що дозволяє отримати кількісні характеристики критичної поведінки цих моделей при довільному (нецілому) значенні вимірности простору, яка є ґлобальною змінною й чинить кардинальний вплив на критичну поведінку.

Стаття побудована так: у наступному розділі ми коротко зупинимося на основних причинах, що викликають зацікавлення в дослідженні критичної поведінки при нецілій вимірности простору d, та сформулюємо умови перенормування масивної теорії поля для нецілого d. Далі ми зробимо огляд робіт, у яких запропонований шлях досліджень реалізовано для декількох популярних моделей статистичної фізики: моделі Ізинґа (розділ III), m–векторної моделі (розділ IV) та невпорядкованої m–векторної моделі із замороженим безладом (розділ V). Загальні висновки та обговорення отриманих результатів наведені в розділі VI.

II. РІВНЯННЯ КАЛЛЕНА–СИМАНЦІКА ДЛЯ ДОВІЛЬНОЇ ВИМІРНОСТИ ПРОСТОРУ

Роботи, результати яких викладені нижче, були викликані недавнім інтересом до вивчення фазових переходів другого роду у випадку, коли вимірність простору d є нецілою. Поняття нецілої вимірности простору вже стало звичним у теорії критичних явищ. Є ціла низка причин для запровадження цієї концепції: з одного боку, розгляд вимірности простору (або її відхилення від якогось фіксованого значення) як неперервної змінної й параметра розкладу теорії збурень дозволяє отримати результати і для цілого значення d. Тут можна згадати не лише знаменитий $\varepsilon = 4 - d$ розклад [6], застосування якого в теорії критичних явищ привело до обчислення надійних значень критичних показників багатьох тривимірних ($d = 3$) моделей [5], але й $\varepsilon = d - 1$ розклад, запропонований для моделі майже плоскої поверхні розділу (near planar interface model) [7–9], моделі краплини (droplet model) [10], $\sqrt{\varepsilon}$–розклад для слабо розведеної моделі Ізинґа [11,12] тощо. З іншого боку, неперервна зміна просторової вимірности шляхом аналітичного продовження гіперкубічних ґраток на нецілі d використовується для того, щоб пов'язати результати, отримані для певного фіксованого d, з точними результатами (якщо вони існують) або з результатами, отриманими іншими методами, і, таким чином, перевірити надійність того чи іншого способу обчислень. Щобільше, у деяких модельних системах спостерігається можливість виникнення нового типу явищ, починаючи з певної (нецілої) вимірности простору, що приводить до потреби визначення цієї марґінальної вимірности. Таким чином, задача дослідження критичної поведінки модельних систем при нецілому d перетворюється у самостійну. Так, наприклад, для моделі Ізинґа такі дослідження проводили за допомогою різноманітних підходів [13–19] (докладніше про це див. у наступному розділі).

У більшості із згаданих вище робіт аналітичне продовження за вимірністю простору d має чисто формальний характер. Свого часу це викликало інтерес до порівняння значень критичних показників, отриманих таким шляхом, із значеннями критичних показників відповідних спінових систем, розташованих у вузлах самоподібних фрактальних ґраток [20], де неціла фрактальна вимірність має безпосередню геометричну інтерпретацію [21]. Проте опис фракталу включає ще декілька характеристик, що можуть змінюватися одна незалежно від іншої. Крім фрактальної вимірности, це: топологічна вимірність, раміфікація, зв'язність, лакунарність [21]. Виявляється, що критичні показники суттєво залежать від цих параметрів [20,22] і лише у границі нульової лакунарности результати для спінових систем на фрактальних ґратках можна інтерполювати за допомогою аналітичного продовження до нецілих d. Питання відповідности критичної поведінки на фрактальних ґратках критичній поведінці на інтерпольованих гіперкубічних ґратках все ще залишається відкритим [23].

Як тепер добре відомо, дослідження критичних властивостей, що виникають у моделях статистичної фізики в околі точки фазового переходу другого роду, можна проводити в термінах Евклідової теорії поля, лаґранжіян якої певним чином відповідає гамільтоніанові вихідної моделі статистичної фізики [5]. Так, критичну поведінку моделі Ізинґа в околі точки фазового переходу другого роду можна описати Евклідовою теорією поля з лаґранжіяном:

$$\mathcal{L}(\phi) = \int \mathrm{d}^d R \Big\{ \frac{1}{2} \left[|\nabla\phi|^2 + m_0^2\phi^2 \right] + \frac{\lambda_0}{4!}\phi^4 \Big\}, \qquad (1)$$

де m_0^2 — лінійна функція температури, λ_0 — неперенормована (гола) константа взаємодії, $\phi = \phi(R)$ — однокомпонентне поле. Модель можна узагальнити, уводячи в (1) мультиплет m полів, що формує представлення групи $O(m)$. У цьому випадку лаґранжіян (1) набуває форми:

$$\mathcal{L}(\phi) = \int \mathrm{d}^d R \Big\{ \frac{1}{2} \left[|\nabla\vec{\phi}|^2 + m_0^2|\vec{\phi}|^2 \right] + \frac{\lambda_0}{4!}|\vec{\phi}|^4 \Big\}, \qquad (2)$$

де $\vec{\phi} = \vec{\phi}(R)$ — векторне поле $\vec{\phi} = (\phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \ldots, \phi^{(m)})$. Відповідний спіновий гамільтоніян містить скалярний добуток m–компонентних векторів $\mathbf{S_R}$ і є гамільтоніяном m–векторної моделі. Критична поведінка m–векторної моделі із слабким "замороженим" безладом (weakly diluted quenched m–vector model), коли "спіни" $\mathbf{S_R}$ випадково розподілені у вузлах ґратки і зафіксовані в певній конфіґурації, може бути описана в термінах лаґранжіана, що містить дві константи взаємодії [12]:

$$\mathcal{L}(\phi) = \int \mathrm{d}^d R \Big\{ \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{n} \left[|\nabla\vec{\phi}^{(\alpha)}|^2 + m_0^2|\vec{\phi}^{(\alpha)}|^2 \right] + \frac{\lambda_{0,1}}{4!} \left(\sum_{\alpha=1}^{n} |\vec{\phi}^{(\alpha)}|^2 \right)^2 + \frac{\lambda_{0,2}}{4!} \sum_{\alpha=1}^{n} \left(|\vec{\phi}^{(\alpha)}|^2 \right)^2 \Big\}, \qquad (3)$$

у реплічній границі $n \to 0$. Тут $\lambda_{0,1} < 0, \lambda_{0,2} > 0$ — голі константи взаємодії, а кожна компонента $\vec{\phi}^{(\alpha)}$ є вектором $\vec{\phi}^{(\alpha)} = (\phi^{(\alpha,1)}, \phi^{(\alpha,2)}, \ldots, \phi^{(\alpha,m)})$.

Для дослідження особливостей критичної поведінки використаємо метод теоретико–польової РГ, відомий у різних варіантах. Одним із них є ренормалізація одночастинково незвідних вершинних функцій при нульових зовнішніх імпульсах і ненульовій масі, що приводить до рівнянь масивної теорії поля — рівнянь Каллена–Симанціка. Такий шлях дослідження критичної поведінки запропонував Дж. Парізі [24]. При цьому аналізуються безпосередньо дво– або тривимірні теорії ($d = 2$, $d = 3$) і, таким чином, не застосовується ε–розклад. Дотримуючись ідеї Дж. Парізі, ми розглянули [31,32] умови нормування масивної теорії поля теж при фіксованій вимірности простору d. Однак, маючи метою дослідити критичну поведінку модельних систем при довільному нецілому d, ми зберегли залежність від вимірности простору, як від параметра. Одночастинково незвідна (1PI — one particle irreducible) вершинна функція $\Gamma^{(L,N)}(p_1, .., p_L; k_1, .., k_N; m_0^2; \{\lambda_0\}; \Lambda_0; d)$ може бути означена як [33]:

$$\delta(\sum p_i + \sum k_j)\Gamma^{(L,N)}(\{p\};\{k\};m_0^2;\{\lambda_0\};\Lambda_0;d) = \int^{\Lambda_0} e^{i(p_i r_i + k_j R_j)} \tag{4}$$

$$\mathrm{d}^d r_1 \ldots \mathrm{d}^d r_L \mathrm{d}^d R_1 \ldots \mathrm{d}^d R_N \langle \phi^2(r_1)\ldots\phi^2(r_L)\phi(R_1)\ldots\phi(R_N)\rangle^{\mathcal{L}}_{1PI}.$$

У (4) $\{p\}$, $\{k\}$ — сукупність зовнішніх імпульсів, Λ_0 — імпульс обрізання, а усереднення проводиться з відповідним лаґранжіяном (напр., (1)–(3)). В асимптотичній границі $\Lambda_0 \to \infty$ неперенормовані вершинні функції є розбіжними. Перехід від теорії, залежної від голих змінних, до перенормованої теорії можна здійснити за допомогою контрольованого перегрупування рядів для вершинних функцій. Як уже зазначалось вище, таке перенормування можна здійснити за допомогою декількох асимптотично еквівалентних процедур. Ми обираємо умови нормування при нульових зовнішніх імпульсах і відмінній від нуля масі в границі $\Lambda_0 \to \infty$ [5]:

$$\begin{aligned} \Gamma_R^{(0,2)}(k,-k;m^2,\{\lambda\};d)|_{k=0} &= m^2, \\ \frac{d}{dk^2}\Gamma_R^{(0,2)}(k,-k;m^2,\{\lambda\};d)|_{k=0} &= 1, \\ \Gamma_{R,\lambda_j}^{(0,4)}(\{k\};m^2,\{\lambda\};d)|_{\{k\}=0} &= m^{4-d}\lambda_j, \\ \Gamma_R^{(1,2)}(p;k,-k;m^2,\{\lambda\};d)|_{p=k=0} &= 1, \end{aligned} \tag{5}$$

де m і $\{\lambda\}$ [33] — перенормовані маса і константи взаємодії: $m = Z_3 m_1 = Z_3\Gamma^{(0,2)}(0;m_0,\{\lambda_{0,i}\})$, $\lambda_i = m^{d-4}Z_3^2 Z_{1,\lambda_i}^{-1}\lambda_{0,i}$. У (5) і нижче ми явно вказуємо на залежність перенормованих вершинних функцій $\Gamma_R^{L,N}$ від вимірности простору d. З умов 5 можна отримати розклади для констант перенормування поля (Z_3), вершин $\lambda_{0,i}$ (Z_{1,λ_i}) і двоточкової вершинної функції зі вставленим ϕ^2 (Z_2). Асимптотично близько до критичної точки перенормовані вершинні функції $\Gamma_R^{(N,L)}(\{p\};\{k\};m^2,\{\lambda\};d)$ задовольняють однорідне рівняння Каллена–Симанціка [5]:

$$\Big\{m\frac{\partial}{\partial m} + \sum_i \beta_{\lambda_i}(\{\lambda\})\frac{\partial}{\partial\lambda_i} - (\frac{N}{2}-L)\gamma_\phi(\{\lambda\}) + L\bar\gamma_{\phi^2}(\{\lambda\})\Big\}\Gamma_R^{(N,L)}(\{p\};\{k\};m^2,\{\lambda\};d) = 0, \tag{6}$$

із коефіцієнтами:

$$\begin{aligned} \beta_{\lambda_i}(\{\lambda\}) &= \frac{\partial\lambda_i}{\partial\ln m}|_0, \\ \gamma_\phi \equiv \gamma_3 &= \frac{\partial Z_3}{\partial \ln m}|_0, \\ \bar\gamma_{\phi^2} \equiv \gamma_2 &= -\frac{\partial Z_2}{\partial\ln m}|_0, \end{aligned} \tag{7}$$

де індекс 0 означає диференціювання при фіксованих голих параметрах. У стійкій нерухомій точці $\{\lambda^*\}$, координати якої є нулем β–функцій:

$$\beta_{\lambda_i}(\{\lambda^*\}) = 0, \quad i = 1,2,\ldots, \tag{8}$$

функція γ_ϕ визначає величину критичного показника парної кореляційної функції η:

$$\eta = \gamma_\phi(\{\lambda^*\}), \tag{9}$$

а критичний показник кореляційної довжини ν визначається як

$$\bar\gamma_{\phi^2}(\{\lambda^*\}) = 2 - \nu^{-1} - \eta. \tag{10}$$

Дослідження критичної поведінки при нецілій вимірності простору, результати яких викладені у наступних розділах статті, базуються на розгляді рівнянь Каллена–Симанціка (6) (чи умов нормування масивної теорії поля (5)) безпосередньо при довільному нецілому значенні d [31,32].

Застосовуючи умови нормування масивної теорії поля до одночастинково незвідних вершинних функцій $\Gamma^{(L,M)}$, можна отримати вирази для перенормованих вершинних функцій $\Gamma_R^{(L,M)}$ у вигляді рядів теорії збурень за перенормованими константами взаємодії λ_i. Зображаючи члени ряду у вигляді фейнманівських діяграм, легко зауважити, що певному порядку теорії збурень за λ_i відповідає певна кількість петель у діяграмі (рівна кількости інтеґрувань за внутрішніми імпульсами). Числові значення петлевих інтеґралів (loop integrals) залежать лише від вимірности простору і є однаковими для задач різної симетрії. Вони необхідні для отримання величин коефіцієнтів ряду теорії збурень за λ_i. У випадку вимірности простору $d=2$, $d=3$ значення петлевих інтеґралів протабульовані у [28]. Фактично кожна робота, присвячена дослідженню критичної поведінки дво– чи тривимірних систем за допомогою рівнянь масивної теорії поля, містить поклик на результати Бейкера, Мейрона і Нікеля [28]. Застосовуючи техніку фейнманівської параметризації та прямого інтеґрування, ми отримали вирази для дво– та трипетлевих інтеґралів, які залежать від d як від параметра, і протабулювали їхні числові значення [29], що стало основою для дослідження критичної поведінки у просторі нецілої вимірности. Зазначимо, що кратність двопетлевих інтеґралів є $2\times d$, а трипетлевих — $3\times d$ (тобто перша змінюється від 0 до 8, а друга — від 0 до 12, коли d змінюється від 0 до 4). Тоді як у випадку цілої вимірности простору відомі способи, що дають можливість скористатися внутрішньою симетрією інтеґралів [39], у випадку нецілого d не всі вони в принципі є застосовними.

Отримані вирази для петлевих інтеґралів, а також їхні числові значення дозволяють досліджувати критичну поведінку різних модельних систем при довільному значенні вимірности простору. У наступних розділах ми реалізуємо це завдання для моделей (1)–(3). Вихідними для наших досліджень будуть вирази для β– та γ–функцій моделей (1)–(3), отримані у схемі масивного перенормування у трипетлевому наближенні, записані як функції залежних від вимірности простору петлевих інтеґралів. Так, для m–векторної моделі (2) РГ функції є такими [40]:

$$\beta(u) = -(4-d)\left[u - u^2 + \beta^{(2)}u^3 + \beta^{(3)}u^4\right], \qquad (11)$$

$$\gamma_\phi = -(4-d)\frac{2(m+2)}{(m+8)^2}u^2\left[2i_2 + (4i_2 - 3i_8)u\right], \qquad (12)$$

$$\bar{\gamma}_{\phi^2} = (4-d)\frac{m+2}{m+8}u\left[1 + \gamma^{(2)}u + \gamma^{(3)}u^2\right]. \qquad (13)$$

Тут u — перенормована константа взаємодії [34], i_ℓ — залежні від вимірности петлеві інтеґрали (їхні числові значення при різних d наведені в [29]), а індекси $^{(2)}$ і $^{(3)}$ вказують на дво– і трипетлеву частини відповідних функцій:

$$\beta^{(2)} = \frac{8}{(m+8)^2}\left[(m+2)i_2 + (5m+22)(i_1 - 1/2)\right],$$

$$\begin{aligned}\beta^{(3)} = \frac{1}{(m+8)^3}[&(-32m^2 - 488m - 1424) + 4(31m^2 \\ &+ 430m + 1240)i_1 + (m+2)(m+8)(8+3d)i_2 \\ &- 12(m+2)(m+8)i_3 - 48(m^2+20m+60)i_4 \\ &- 24(2m^2+21m+58)i_5 - 6(3m^2+22m+56)i_6 \\ &- 24(5m+22)i_7 - 12(m+2)(m+8)i_8],\end{aligned}$$

$$\gamma^{(2)} = \frac{1}{(m+8)}(1-2i_1),$$

$$\begin{aligned}\gamma^{(3)} = \frac{1}{(m+8)^2}[&10(m+8) - (44m+280)i_1 \\ &+ (8-3d)(m+2)i_2 + +12(m+2)i_3 + 24(m+8)i_4 \\ &+ 6(m+8)i_5 + 18(m+2)i_6].\end{aligned}$$

Ми не будемо наводити тут відповідні вирази для РГ функцій розведеної m–векторної моделі, отримані у дво– [31] та трипетлевому наближеннях [35]. Зауважимо лише, що поряд із явною залежністю від вимірности простору d РГ функції залежать від d через петлеві інтеґрали $i_1 - i_8$. Підставляючи значення інтеґралів у вигляді відповідного ε–розкладу, можна розвинути техніку ε–розкладу для того, щоб дослідити критичну поведінку, ґенеровану лаґранжіянами (1)–(3). У цьому випадку ми відтворимо добре відомі результати. З іншого боку, будучи зацікавленим у дослідженні критичної поведінки при нецілому d, можна скористатися отриманими в [29] значеннями петлевих інтеґралів безпосередньо при довільному d. Як тепер добре відомо (див., наприклад, [30,41,5]), ряди для ренормгрупових функцій є асимптотичними [36], і для того щоб отримати на їх основі надійну інформацію, слід застосувати процедуру пересумовування. Зупинімося на таких обчисленнях докладіше.

III. МОДЕЛЬ ІЗИНҐА

Дослідження особливостей критичної поведінки при нецілій вимірності простору розпочнемо з детального аналізу моделі Ізинґа. На відміну від інших моделей, що будуть розглянуті нижче, модель Ізинґа при довільному значенні d була предметом ґрунтовного аналізу. Тому основне завдання, яке ми ставимо перед собою в цьому розділі, полягає в тому, щоб, застосувавши метод масивної ренормалізації при довільному фіксованому значенні вимірности простору до дослідження моделі Ізинґа, перевірити його надійність і достовірність отриманих результатів. Мабуть, першою роботою, у якій досліджувалась критична поведінка моделі Ізинґа при нецілій вимірності простору, була робота Майкла Фішера [13]. Проте предметом досліджень була критична температура, а не критичні показники. Серед різних підходів, що використовувались для отримання критичних показників моделі Ізинґа при нецілому d, слід назвати ренормалізаційне перетворення Каданова, за допомогою якого були отримані значення температурного й магнетного критичних показників для всіх цілих значень $z=2^d$ між $z=2$ і $z=16$. Це, природно, привело до знаходження значень критичних показників для деяких нецілих d [14]. Пізніше критичні показники моделі Ізинґа при нецілій вимірності простору обчислювали [15] на підставі пересумовування рядів ε–розкладу, записаних із точністю до ε^5. Ренормгруповий підхід у дійсному просторі [20,16] і високотемпературні розклади [17] також застосовували для розгляду цієї задачі. За допомогою варіяційного методу, застосованого до високотемпературних рядів [18], вивчали вільну енерґію d–вимірної моделі Ізинґа. Акуратні значення критичних показників моделі Ізинґа при низьких вимірностях простору $1 \leq d \leq 2$ були отримані [19] на підставі застосування методу скінченномірного скейлінґу (finite size scaling) до даних, отриманих за допомогою методу трансфер–матриці. Причому трансфер–матриця була записана у спосіб, який дозволяв її інтерполяцію до нецілих вимірностей.

Як уже згадувалось, використання рівнянь масивної теорії поля при фіксованих вимірностях простору $d = 2$, $d = 3$, завдяки піонерським роботам Джорджіо Парізі [24], стало одним із стандартних підходів у сучасній теорії критичних явищ. Мабуть, до появи наших робіт це був єдиний із широко вживаних методів аналізу критичної поведінки, якого ще не використовували при нецілому d. Вихідними виразами для аналізу є β– та γ– функції (11)–(13). Причому, цікавлячись критичною поведінкою моделі Ізинґа, ми розглянемо випадок скалярного поля ($m = 1$). Як ми вже зазначали, у зв'язку з асимптотичною природою рядів для ренормгрупових функцій слід застосовувати певну процедуру пересумовування, щоб отриманти достовірну інформацію на їх підставі. Результати, одержані в масивній схемі за допомогою пересумовування методом Паде–Бореля, наведені в [40]. Як зазначалось уже в [40], метод Паде–Бореля добре працює, коли вимірність простору не є дуже низькою. Однією з можливих причин є те, що параметр розкладу — значення константи взаємодії в нерухомій точці — зростає із зменшенням d. Зокрема, отримані в [40] результати потребують поліпшення в ділянці d поблизу нижньої критичної вимірности. Покажемо один із можливих способів, як це можна зробити [40].

Як і в [40], оберемо процедуру пересумовування Паде–Бореля. Схема пересумовування є такою. Для функції $f(u)$ (це може бути γ– або β–функція чи їх частина), заданої у вигляді скінченної кількости доданків у розкладі Тейлора:

$$f(u) = \sum_{j=0}^{L} f^{(j)} u^j, \tag{14}$$

записуємо борелівський образ:

$$F(ut) = \sum_{j=0}^{L} \frac{f^{(j)}}{j!} (ut)^j. \tag{15}$$

Тоді (15) екстраполюємо у вигляді Паде–апроксиманти $F^P(ut)$ і пересумовану функцію запишемо у формі:

$$f^R(u) = \int_0^\infty dt e^{-t} F^P(ut). \tag{16}$$

Реалізуймо процедуру, у результаті якої вирази (11)–(13) при $m = 1$ привели б до значень критичних показників, що збігалися б із точними значеннями у випадках, коли вони відомі: тобто при вимірностях простору $d = 1$ ($\nu = \gamma = \infty$, $\eta = 1$) і $d = 2$ ($\nu = 1$, $\gamma = 1.75$, $\eta = 0.25$). Для цього оберемо найвищий (наступний після останнього відомого) член ряду теорії збурень вільним параметром і змінюватимемо його так, щоб отримати необхідний результат. У випадку ε–розкладу таку процедуру було запропоновано в [37]. Зауважимо, однак, суттєву відмінність у застосуванні такої схеми в рамках ε–розкладу і в ренормгруповому підході при фіксованій вимірності простору. Вимірність d, яка входить у параметр розкладу в техніці ε–розкладу, не міститься в коефіцієнтах жодного з рядів. Таким чином, обравши коефіцієнт вищого порядку $f^{(j+1)}$ як вільний параметр у ряді для певної функції $f(\varepsilon)$ (наприклад, для будь–якого критичного показника)

$$f(\varepsilon) \simeq \sum_{j=0}^{L} f^{(j)} \varepsilon^j + f^{(j+1)} \varepsilon^{j+1},$$

можна забезпечити збігання результатів лише для однієї обраної вимірности d (в [37] це $d = 2$). На відміну від цього, у схемі, що базується на застосуванні рівнянь РГ при фіксованій вимірності простору, коефіцієнти рядів за перенормованою константою взаємодії u є залежними від вимірности:

$$f(u) \simeq \sum_{j=0}^{L} f^{(j)}(d) u^j + f^{(j+1)}(d) u^{j+1}.$$

Тоді обраний вираз може містити інформацію про точні результати для декількох значень d (обираючи відповідні значення $f^{(j+1)}(d)$, наприклад, для цілих $d = 1, 2, \ldots$). Для проміжних значень d функцію $f^{(j+1)}(d)$ можна апроксимувати гладкою кривою. Звичайно, що надійність отриманих у такий спосіб результатів значною мірою залежить від того, наскільки гладкою є поведінка функції, яку ми апроксимуємо [38].

Отримані за допомогою описаної процедури пересумовування критичні показники ν, η як функції вимірности d [38] наведені в таблиці I для деяких конкретних значень вимірности простору в порівнянні з даними інших підходів: [15] — із пересумовування ε–розкладу, [18] — за допомогою варіяційного підходу, застосованого до високотемпературних розкладів, [19] — застосуванням методу скінченномірного скейлінґу до даних, отриманих за допомогою методу трасфер–матриці.

			Дані з роботи [15]		Дані з роботи [18]		Дані з роботи [19]	
d	ν	η	ν	η	ν	η	ν	η
1.250	2.593	.728	1.5-4.5	.30-1.00	1.7-3.4	.758-.83	3.6832-3.7750	.7532-.7544
1.375	1.983	.616	1.6-2.6	.30-0.80	1.6-2.9	.635-.679	2.3535-2.3747	.6362-.6398
1.500	1.627	.519	1.45-1.85	.35-0.65	1.49-1.84	.567-.631	1.7547-1.7596	.5312-.5328
1.650	1.353	.420	1.30-1.44	.30-0.50	1.27-1.38	.450-.507	1.3780-1.3795	.4226-.4238
1.750	1.223	.363	1.20-1.26	.30-0.40	1.18-1.26	.396-.425	1.2234-1.2255	.3630-.3634
1.875	1.098	.303	1.09-1.11	.27-0.33	1.11-1.13	.312-.322	1.0902-1.0906	.3006-.3010
2.000	1.000	.250	1.0	.25		.247-.253		

Таблиця I. Критичні показники ν, η, отримані в РГ підході при фіксованій вимірності [38] (стовпчики 2,3), у порівнянні з даними, отриманими за допомогою інших підходів (див. текст).

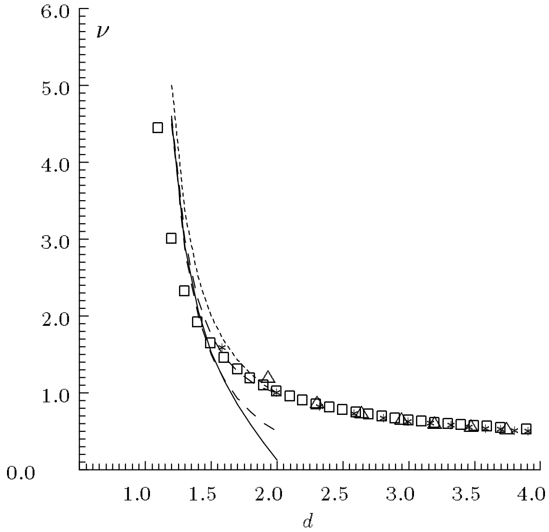

Рис. 1. Критичний показник кореляційної довжини ν як функція вимірности d. Квадратиками показані наші результати, отримані за допомогою РГ підходу при фіксованій вимірності простору з урахуванням точних даних [38], зірочки показують результати [14], трикутники показують дані робіт [26]. Лініями зображені результати $\varepsilon' = d - 1$ розкладу для моделі майже плоскої поверхні розділу. Згори вниз: одно– [7], три– [8], дво– [7] і чотирипетлеве [9] наближення.

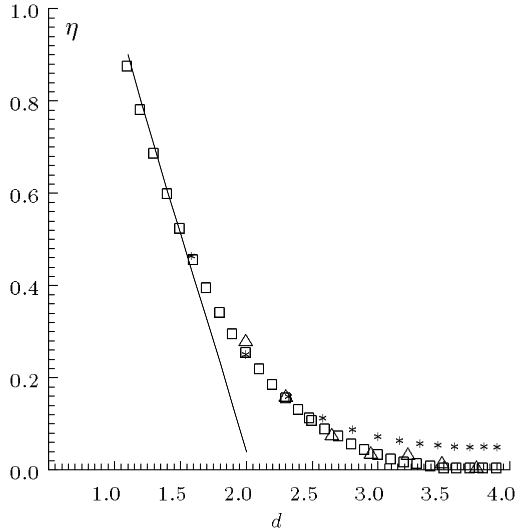

Рис. 2. Критичний показник парної кореляційної функції η як функція вимірности d. Квадратиками показані наші результати, отримані за допомогою РГ підходу при фіксованій вимірности простору з урахуванням точних даних [38], зірочки показують результати [14], трикутники показують дані робіт [26]. Лінія отримана з розв'язку для моделі краплини [10].

На рис. 1 ми порівнюємо наші результати для критичного показника ν із результатами $\varepsilon' = d - 1$ розкладу для моделі майже плоскої поверхні розділу (у ділянці низьких значень d) з даними, отриманими за допомогою перетворення Каданова [14] і за допомогою аналізу фізичної гілки розв'язків точного рівняння РГ [26]. Значення критичного показника ν для моделі майже плоскої поверхні поділу:

$$\nu = (\varepsilon')^{-1} - \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon'}{2} - \frac{7\,(\varepsilon')^2}{8} \qquad (17)$$

показане в першому, другому [7], третьому [8] і четвертому [9] порядках теорії збурень.

Рисунок 2 дає порівняння наших даних для критичного показника η із результатами, отриманими за допомогою перетворення Каданова [14] і за допомогою аналізу фізичної гілки розв'язків точного рівняння РГ [26], а також із значенням η для моделі краплини, що записується як [10]:

$$d + \eta = 8\pi^{-1}(\varepsilon')^{-(2+\varepsilon')/2}[1 + O(\varepsilon')]e^{(-1-2C-2/\varepsilon')}, \quad (18)$$

де $C \simeq 0.577$ — стала Ойлера.

Як видно з таблиці I, наші результати дуже добре узгоджуються з результатами роботи [15], отриманими на підставі пересумованого ε–розкладу з використанням точної інформації при $d = 2$. Це легко зрозуміти, особливо, якщо взяти до уваги, що таке ж узгодження має місце для цілих вимірностей $d =$

2, $d = 3$ (див., наприклад, [30,41]). У ділянці вимірностей $1 < d < 2$ наші результати можна порівняти із значенням критичного показника ν моделі майже плоскої поверхні розділу [7], порахованим за допомогою $\varepsilon' = d - 1$ розкладу [7–9]. Існує низка арґументів на підтримку твердження про те, що критична точка цієї моделі ідентична критичній точці ізинґівської системи. Тепер уважається, що це твердження справедливе принаймні в сенсі $\varepsilon' = d-1$ розкладу. Як видно з рис. 1, така ідентифікація дійсно може мати місце. Зазначимо, що криві для критичного показника $\nu(d)$ проходять через точне значення $\nu(2) = 1$, якщо ряд (17) розглядається в одно– або в трипетлевому наближенні. Результати РГ підходу при фіксованій вимірності простору узгоджуються з результатами, отриманими для моделі краплини [10] в ділянці низьких значень d, як це видно з рис. 2. Результати, отримані для деяких нецілих d за допомогою перетворення Каданова [14] (відзначені на рис. 1 зірочками), також добре узгоджуються з нашими даними. Ми використали співвідношення скейлінґу для того, щоб отримати показник η із ν і δ, наведених у [14]. Ці значення η також зображені зірочками на рис. 2. Видно, що схема [14] приводить до завищених значень η у ділянці $d > 2.5$. Дані, отримані на основі аналізу фізичної гілки розв'язку точних рівнянь РГ [26], також узгоджуються з нашими результатами. Найліпше узгодження має місце в діляці d поблизу $d = 3$, де, як це було зазначено в [26], такий підхід є ефективнішим.

Акуратні й надійні значення критичних показників для нецілого d отримуємо в ділянці $1 < d < 2$ на підставі застосування методу скінченномірного скейлінґу до даних, одержаних за допомогою методу трансфер–матриці [19] (див. колонки 8,9 таблиці I). У ділянці $d > 1.5$ наші результати добре узгоджуються із цими даними, але для нижчих значень d узгодження гірше. В противагу до цього, у ділянці малих d наші результати узгоджуються з даними, отриманими за допомогою варіяційного підходу до аналізу високотемпературних рядів [18] (колонки 6,7 таблиці 1), і знаходяться поза межами точности цієї роботи для ν при $d > 1.875$, а для η при $d > 1.5$.

Із аналізу, проведеного в цьому розділі, робимо висновок, що запропонований метод перенормування так само, як і процедура пересумовування, є надійним способом дослідження критичної поведінки при нецілому значенні d, і нижче ми застосуємо їх до аналізу реґулярної та структурно невпорядкованої m–векторної моделі.

IV. m–ВЕКТОРНА МОДЕЛЬ

Нагадаймо, що, згідно з теоремою Мерміна–Ваґнера–Гогенберґа [42], для m–векторної моделі нижня критична вимірність $d_c = 2$ при $m \geq 2$. Відповідно до результатів розділу III, з метою вдосконалення процедури пересумовування введемо у вирази для пересумовних функцій вільні параметри, вибираючи їхні значення з умови, щоб ці вирази приводили до відомих точних результатів для критичної поведінки при $d = 2$ ($\nu = \gamma = \infty$).

	$m=2$		$m=3$		$m=4$	
d	ν	γ	ν	γ	ν	γ
2.0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2.1	1.850	3.510	2.149	4.067	2.443	4.624
2.2	1.329	2.540	1.512	2.884	1.687	3.219
2.3	1.103	2.122	1.235	2.372	1.358	2.610
2.4	.971	1.878	1.072	2.072	1.166	2.253
2.5	.881	1.713	.962	1.869	1.036	2.013
2.6	.816	1.593	.882	1.721	.941	1.837
2.7	.765	1.500	.820	1.606	.868	1.701
2.8	.725	1.425	.770	1.513	.810	1.592
2.9	.691	1.363	.729	1.437	.762	1.502
3.0	.662	1.310	.694	1.371	.721	1.426
3.1	.639	1.266	.665	1.317	.687	1.361
3.2	.618	1.226	.638	1.267	.656	1.303
3.3	.598	1.190	.615	1.223	.629	1.251
3.4	.580	1.156	.593	1.182	.604	1.204
3.5	.564	1.124	.574	1.144	.582	1.161
3.6	.549	1.095	.556	1.110	.562	1.123
3.7	.535	1.069	.540	1.079	.544	1.087
3.8	.522	1.044	.525	1.050	.528	1.056
3.9	.511	1.022	.512	1.025	.514	1.027

Таблиця II. Значення критичних показників ν, γ як функції d для $m = 2, 3, 4$ [43].

Вихідними виразами для аналізу є вирази для β– і γ–функцій m–векторної моделі (11)–(13), наведені в розділі II. Так само, як це робилося в розділі III, уведемо в ці вирази доданки вищого порядку як вільні параметри і змінюватимемо їх з метою забезпечення правильної асимптотики при $d = 2$ [42].

Таблиця II містить наші результати для критичного показника кореляційної довжини ν і критичного показника магнетної сприйнятливости γ. Ці результати отримано у трипетлевому наближенні за допомогою пересумовування Паде–Бореля, введенням додаткових параметрів у процедуру пересумовування в ділянці $2 < d < 3$ і без додаткових параметрів для $d > 3$. Наші результати, одержані із залученням додаткової інформації про розташування синґулярности в точці $d = 2$, узгоджуються з ренормгруповим результатом роботи [25], де було виявлено синґулярну поведінку критичних показників.

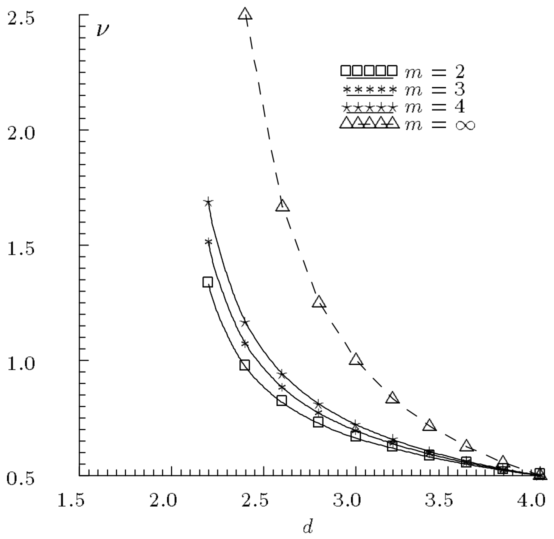

Рис. 3. Критичний показник кореляційної довжини ν як функція вимірности d для $m = 2, 3, 4, \infty$ [43].

На рисну 3 ми відклали значення критичного показника m–векторної моделі ν як функцію d для $m = 2, 3, 4, \infty$ [43]. У випадку $m = \infty$ ми відтворюємо точний результат для сферичної моделі [44] $\nu = (d-2)^{-1}$.

Зазначимо, що, на відміну від моделі Ізинґа, дані про критичну поведінку m–векторної моделі при довільному нецілому значенні вимірности d майже відсутні і результати, представлені в цьому розділі, дають на сьогодні найповніший опис такої задачі.

V. ЗАМОРОЖЕНА СЛАБО РОЗВЕДЕНА m–ВЕКТОРНА МОДЕЛЬ

Перейдемо тепер до аналізу розведеної m–векторної моделі, уведеної в розділі II (див. формулу (3)), при довільній вимірности простору. Ренормгрупові функції цієї моделі, які ми отримали у дво– [31] та трипетлевому наближеннях [35] при довільній вимірності простору, є поліномами за степенями перенормованих констант взаємодії λ_1, λ_2. Через громіздкість відповідних виразів ми не записуватимемо їх тут у явному вигляді. Знову для обчислення значень критичних показників на основі відомих β– і γ–функцій необхідно застосувати процедуру пересумовування. Нижче ми застосуємо процедуру пересумовування функцій двох змінних, що базується на простому узагальненні методу Паде–Бореля для однієї змінної [47]. Таку процедуру застосовували для дослідження різних моделей при цілій вимірності простору. Вихідним виразом є обрізаний степеневий розклад:

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{i,j;i+j \leq L} c_{ij} \lambda_1^i \lambda_2^j. \tag{19}$$

Для такого полінома записуємо борелівський образ:

$$F(\lambda_1 t, \lambda_2 t) = \sum_{i,j;i+j \leq L} \frac{c_{ij}}{(i+j)!} (\lambda_1 t)^i (\lambda_2 t)^j. \tag{20}$$

Тоді борелівський образ $F(x, y)$ екстраполюється раціональною апроксимантою $F^A(x, y)$ і пересумовану функцію $f^R(\lambda_1, \lambda_2)$ записуємо у вигляді інтеґрала:

$$f^R(\lambda_1, \lambda_2) = \int_0^\infty F^A(\lambda_1 t, \lambda_2 t) e^{-t} \mathrm{d}t. \tag{21}$$

Зупинімося на результатах, отриманих за допомогою такого підходу [31,35]. Як уже зазначено вище, критична поведінка розведеної m–векторної моделі задається лаґранжіяном (3) у границі $n \to 0$. У цьому випадку нас цікавить ділянка перенормованих констант взаємодії $\lambda_2 \geq 0$ і $\lambda_1 \leq 0$. Нерухомі точки визначаємо розв'язком системи рівнянь:

$$\begin{aligned} \beta_{\lambda_1}(\lambda_1^*, \lambda_2^*) &= \lambda_1^* f_{\lambda_1}(\lambda_1^*, \lambda_2^*) = 0, \\ \beta_{\lambda_2}(\lambda_1^*, \lambda_2^*) &= \lambda_2^* f_{\lambda_2}(\lambda_1^*, \lambda_2^*) = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Як видно з (22), Ґаусова нерухома точка $\lambda_1^* = \lambda_2^* = 0$ існує завжди. Для виявлення нетривіяльних нерухомих точок, узагалі кажучи, необхідно застосовувати пересумовування. Наведені нижче результати отримані на підставі застосування схеми пересумовування (19)–(21) у дво– [31] та трипетлевому [35] наближеннях.

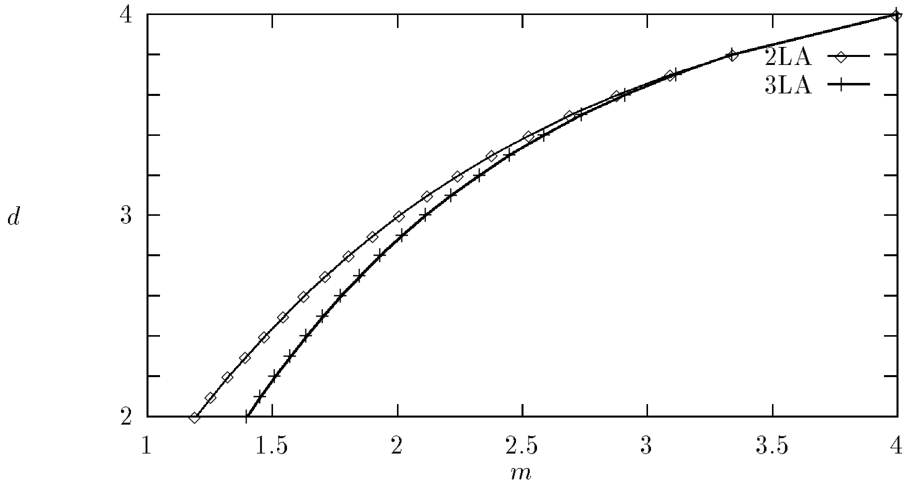

Рис. 4. Значення марґінальної вимірности спіну m_c як функція вимірности простору у дво– [31] (квадратики) і трипетлевому [35] (хрестики) наближеннях.

Нерухома точка є стійкою і визначає критичну поведінку системи, якщо власні значення матриці стійкости $B = \partial\beta_{\lambda_i}(\lambda_1, \lambda_2)/\partial\lambda_j|_{\lambda_1^*,\lambda_2^*}$ мають додатну дійсну частину. Відомо, що для достатньо великих значень m, $m > m_c$, ізотропна нерухома точка ($\lambda_1^* = 0, \lambda_2^* \neq 0$) є стійкою і критична поведінка розведеної системи збігається з критичною поведінкою відповідної чистої системи. Коли кількість компонент параметра впорядкування зменшується, починаючи з марґінального значення m_c, ізотропна нерухома точка стає нестійкою і відбувається перехід (кросовер) до змішаної нерухомої точки ($\lambda_1^* \neq 0, \lambda_2^* \neq 0$). Ця нерухома точка описує нову "випадкову" критичну поведінку. Така картина узгоджується з критерієм Гарріса [45].

У двопетлевому наближенні маємо $m_c \simeq 2.01$ для $d = 3$ і $m_c \simeq 1.19$ для $d = 2$. Обчислення у вищих порядках теорії збурень приводять до результату $m_c < 2$ для $d = 3$. Найкраща теоретична оцінка для m_c у тривимірній теорії $m_c \simeq 1.945 \pm 0.002$ [46]. На рис. 4 ми подаємо результати обчислення значень m_c в ділянці $2 \leq d \leq 4$ у дво– та трипетлевому наближеннях. Для $d = 4$ $m_c = 4$, результат другого порядку ε–розкладу $m_c = 4 - 4\varepsilon$ [12]. Для $d = 3$ і $d = 2$ ми відтворюємо у двопетлевому наближенні результати [47]. Із рис. 4 видно, що в ділянці вимірностей $3 < d < 4$ при розведенні виникає новий тип критичної поведінки і для цілих значень $m = 2$, $m = 3$.

Повернімося до найцікавішого випадку $m = 1$, коли нова критична поведінка спостерігається у всій ділянці $2 < d < 4$. Таблиця III містить значення критичних показників ν, γ та критичного показника питомої теплоємности α d–вимірних випадкових ізинґівських систем, отримані у дво– [31] і трипетлевому [35] наближеннях. Значення критичного показника кореляційної довжини як функція вимірности простору показане на рис. 5 у порівнянні з результатами інших підходів.

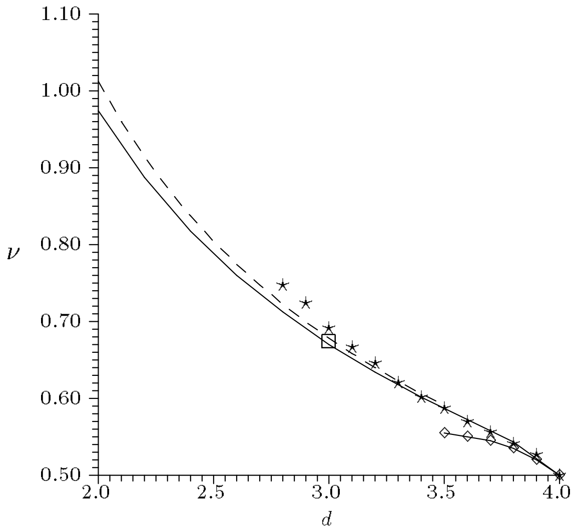

Рис. 5. Значення критичного показника кореляційної довжини слабо розведеної замороженої моделі Ізинґа як функція вимірності простору. Штрихова крива — РГ підхід при фіксованій вимірности простору, пересумоване двопетлеве наближення [31], суцільна крива — РГ підхід при фіксованій вимірности простору, пересумоване трипетлеве наближення [35]. Зірочки — результати, отримані методом масштабних полів [27], ромбики — пересумований [31] $\varepsilon^{1/2}$–розклад [48]. Квадратиком зображений найточніший із відомих аналітичних результатів для тривимірної теорії [49].

Як видно з таблиці, використання двопетлевого наближення приводить до певного обмеження згори на значення d. Для великих значень вимірности простору $d \geq 3.5$ з'являється полюс у раціональних апроксимантах, що входять в інтеґральні представлення β–функцій (21), і відповідні інтеґрали стають розбіжними. Перехід до трипетлевого наближення дозволяє розширити ділянку вимірностей.

Результати, отримані в ділянці $2.8 < d < 4$ методом масштабних полів [27], зображені зірочками на рис. 5. Обмеження зліва на значення вимірностей простору викликане тим, що обрізана система рівнянь для масштабних полів [27] не працює для вимірностей простору, менших від $d = 2.8$. На рисунку також показаний найточніший на сьогодні результат тривимірної теорії в чотирипетлевому наближенні [49]. Слід зазначити, що у випадку розведеної моделі Ізинґа не можна отримати надійних числових значень критичних показників для $d < 4$ за допомогою ε–розкладу. Виродженість рівнянь РГ на однопетлевому рівні зумовлює те, що параметром розкладу в цьому випадку стає $\sqrt{\varepsilon}$ [11,12]. Ряд $\sqrt{\varepsilon}$–розкладу відомий для критичних показників у п'ятипетлевому наближенні [51,52]. Асимптотичні властивості ряду $\sqrt{\varepsilon}$–розкладу невідомі, і це не дозволяє використовувати його для отримання надійних числових значень критичних показників достатньо далеко від $d = 4$ [52,53]. Однак ми спробували обчислити значення критичного показника ν на підставі пересумованого за Паде–Борелем $\sqrt{\varepsilon}$–розкладу [31,53]. Результати зображені на рис. 5 ромбиками. Видно, що вони мають сенс лише поблизу $d = 4$.

d	ν	η	α	ν	η	α
2.0	1.012	.198	-0.024	0.966	0.097	0.067
2.1	0.960	.167	-0.016	0.923	0.084	0.062
2.2	0.914	.141	-0.011	0.884	0.073	0.056
2.3	0.873	.119	-0.007	0.848	0.064	0.049
2.4	0.837	.100	-0.009	0.816	0.055	0.041
2.5	0.804	.083	-0.010	0.787	0.047	0.033
2.6	0.774	.069	-0.012	0.760	0.040	0.025
2.7	0.747	.057	-0.017	0.735	0.034	0.016
2.8	0.722	.047	-0.022	0.712	0.028	0.007
2.9	0.699	.038	-0.027	0.691	0.023	-0.002
3.0	0.678	.031	-0.034	0.671	0.019	-0.012
3.1	0.658	.024	-0.040	0.652	0.015	-0.021
3.2	0.640	.019	-0.048	0.634	0.012	-0.030
3.3	0.622	.014	-0.053	0.618	0.009	-0.038
3.4	0.606	.010	-0.060	0.602	0.006	-0.046
3.5				0.587	0.004	-0.054
3.6				0.572	0.002	-0.061
3.7				0.558	0.001	-0.066
3.8				0.544	0.000	-0.066

Таблиця III. Значення критичних показників ν, η, α як функції d для слабо розведеної замороженої моделі Ізинґа. Двопетлеве (колонки 2,3,4) [31] і трипетлеве (колонки 5,6,7) [35] наближення.

Згідно з критерієм Гарріса [45] двовимірна розведена модель Ізинґа характеризується тим самим набором критичних показників, що й чиста модель. Справедливість такого твердження для критичних показників доведена наявними точними результатами та результатами симуляцій Монте–Карло (див., наприклад, огляд [50]). Наші результати у дво– і трипетлевому наближеннях для двовимірної теорії $\nu = 1.012$ і $\nu = 0.966$ різняться від онзагерівського розв'язку $\nu = 1$ на величини порядку кількох процентів. У тривимірній теорії найточніше значення критичного показника ν, отримане з пересумованого чотирипетлевого наближення $\nu = 0.6701$ [49], добре узгоджується з даними таблиці III у дво– і трипетлевому наближеннях: $\nu = 0.678$, $\nu = 0.671$. Відносна точність визначення критичного показника парної кореляційної функції η нижча (порівн. дані таблиці III при $d = 2$ із онзагерівським $\eta(d = 2) = 1/4$ і при $d = 3$ із чотирипетлевим результатом $\eta(d = 3) = 0.0343$).

Із наведених даних видно, що точність одержаних результатів залежить від d і у випадку критичного показника кореляційної довжини зростає від величини порядку кількох процентів при $d = 2$ до долей процента при $d = 3$. Така ситуація (подібно, як і у теорях з однією константою взаємодії, розглянутих вище) зумовлена різницею у значеннях чисельних коефіцієнтів, що входять у ряди теорії збурень. Це у свою чергу викликає зростання параметра розкладу — координати нерухомої точки. Та все одно наші значення критичних показників розведеної моделі Ізинґа при довільному d є на сьогодні найточнішими в порівнянні з даними, отриманими за допомогою інших підходів.

VI. ВИСНОВКИ

У цій статті ми розглянули застосування методу теоретико–польової ренормалізаційної групи для дослідження критичної поведінки при нецілій вимірності простору. Наведені в роботі результати об'єднує спільний спосіб обчислень: масивне перенормування при нецілій вимірності простору [31,32]. Основною технічною трудністю, що виникає при реалізації програми обчислень при фіксованому d, є необхідність визначення числових значень петлевих інтеґралів. При $d = 2$ і $d = 3$ ці значення знайшли Б. Нікель, Д. Мейрон і Ґ. Бейкер (мол.) [28], при нецілих значеннях $0 \leq d \leq 4$ дво– та трипетлеві інтеґрали отримані в [29]. У розділах III і IV подані обчислені в такій схемі значення критичних показників моделі Ізинґа [38] та m–векторної моделі [43] при значеннях d між верхньою та нижньою критичними вимірностями. При цьому β– та γ–функції моделей отримані в трипетлевому наближенні для довільної вимірности простору [40]. Разом із одержаними в [29] числовими значеннями петлевих інтеґралів ці вирази дозволяють провести аналіз критичної поведінки згаданих моделей при довільній вимірності простору. Для отримання надійних значень критичних показників у ділянці d поблизу нижньої критичної вимірности необхідно вдосконалити процедуру пересумовування асимптотичних рядів для РГ функцій. Тут з цією метою ми доповнили процедуру пересумовування трипетлевого ряду за Паде–Борелем пересумуванням чотирипетлевого ряду, обираючи чотирипетлевий член за вільний параметр [38,43]. Цей вільний параметр визначається з відомих точних результатів для характеристик критичної поведінки моделей, що нас цікавлять. Однією з переваг нашого підходу є те, що він дозволяє розглянути всю ділянку вимірностей $1 \leq d \leq 4$ для моделі Ізинґа і $2 \leq d \leq 4$ для m–векторної моделі.

Більшість із робіт про дослідження критичної поведінки при довільному нецілому значенні d базується на аналітичному продовженні за d, що має формальний характер (це не стосується, звичайно, критичної поведінки на фрактальних ґратках). Зокрема, наш підхід, так само, як техніка ε–розкладу, базується на аналітичному продовженні петлевих інтеґралів $\int \mathrm{d}\vec{k} \sim \int k^{d-1}\mathrm{d}k$. У роботі [54] навіть піддавався сумніву той факт, що, виконуючи таке аналітичне продовження, можна описати феромагнетне впорядкування для нецілих d. Таким чином, добрий збіг наших даних для моделі Ізинґа з даними, отриманими іншими методами (у ділянках d, де ці методи застосовні), є ще одним непрямим свідченням взаємної відповідности між "просторовими вимірностями", що виникають у різних схемах.

Слід також зазначити, що тоді як для моделі Ізинґа і m–векторної моделі наш метод дослідження є одним із можливих способів аналізу критичної поведінки, у випадку розведеної моделі Ізинґа перенормування при фіксованому d є єдиним у теоретико–польовій РГ схемі, що дозволяє отримати надійні значення критичних показників при довільній вимірності простору.

На закінчення хочу подякувати моїм колегам: Миколі Шпотові, Тарасові Крохмальському, Тарасові Одушкіну, Тарасові Яворському та Андрієві Стосикові за співпрацю у виконанні різних етапів поданих тут досліджень.

---

[1] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, Докл. Акад. Наук СССР **103**, 203 (1955); *ibid* **103**, 391 (1955); Nuovo Cimento **3**, 845 (1956).

[2] E. C. G. Stueckelberg, A. Petermann, Helv. Phys. Acta **25**, 499 (1953).

[3] M. Gell–Mann, F. E. Low, Phys. Rev. **95**, 1300 (1954).

[4] Див., наприклад, D. V. Shirkov, in: *Renormalization Group*, edited by D. Shirkov, D. Kazakov, A. Vladimirov (World Scientific, Singapore, 1988), p. 1; D. V. Shirkov, in: *Renormalization Group'91*, edited by D. V. Shirkov, V. B. Priezzhev (World Scientific, Singapore, 1992), p. 1.

[5] Див., наприклад, E. Brezin, J. C. Le Guillou, J. Zinn–Justin, in *Phase Transitions and Critical Phenomena* **6**, edited by C. Domb, M. S. Green (Academic Press, New York, 1976), p. 125; D. J. Amit, *Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena* (World Scientific, Singapore, 1984); J. Zinn-Justin, *Quantum field theory and critical phenomena* (Oxford University Press, Oxford, 1989).

[6] K. G. Wilson, M. E. Fisher, Phys. Rev. Lett. **28**, 240 (1972).

[7] D. J. Wallace, R. K. P. Zia, Phys. Rev. Lett. **43**, 808 (1979).

[8] D. Forster, A. Gabriunas, Phys. Rev. A. **23**, 2627 (1981).

[9] D. Forster, A. Gabriunas, Phys. Rev. A. **24**, 598 (1981).

[10] A. D. Bruce A.D., D. J. Wallace, Phys. Rev. Lett. **47**, 1743 (1981).

[11] Д. Е. Хмельницкий, Журн. эксп. теор. физ. **68**, 1960 (1975).

[12] G. Grinstein, A. Luther, Phys. Rev. B **13**, 1329 (1976).

[13] M. E. Fisher, D. S. Gaunt, Phys. Rev. **133**, A224 (1964).

[14] S. L. Katz, M. Droz, J. D. Gunton, Phys. Rev. B **15**, 1597 (1977).

[15] J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, J. Phys. (Paris) **48**, 19 (1987).

[16] B. Bonnier, Y. Leroyer, C. Meyers, Phys. Rev. B **37**, 5205 (1988).

[17] B. Bonnier, Y. Leroyer, C. Meyers, Phys. Rev. B **40**, 8961 (1989).

[18] B. Bonnier, M. Hontebeyrie, J. Phys. (Paris) **I1**, 5205 (1991).

[19] M. A. Novotny, Europhys. Lett. **17**, 297 (1992); M. A. Novotny, Phys. Rev. B **46**, 2939 (1992).

[20] Y. Gefen, B. Mandelbrot, A. Aharony, Phys. Rev. Lett. **45**, 855 (1980).

[21] B. B. Mandelbrot, *Fractals: form, chance, and dimension* (W. H. Freeman and Co, New York, 1977); *The fractal geometry of nature* (W. H. Freeman and Co, New York,

1983).
[22] Y. Wu, B. Hu, Phys. Rev. A **35**, 1404 (1987).
[23] B. Hu, Phys. Rev. B **33**, 6503 (1986).
[24] G. Parisi G. in: *Proceedings of the Cargrése Summer School*, 1973; J. Stat. Phys. **23**, 49 (1980).
[25] J. L. Cardy, H. W. Hamber, Phys. Rev. Lett. **45**, 499 (1980).
[26] А. Э. Филиппов, А. В. Радиевский, Журн. эксп. теор. физ. **102**, 1899 (1992); S. A. Breus, A. E. Filippov, Physica A **192**, 486 (1992).
[27] K. E. Newman, E. K. Riedel, Phys. Rev. B **25**, 264 (1982).
[28] B. G. Nickel, D. I. Meiron, G. A. Baker, Jr., *Univ.of Guelph Report* (Guelph, 1977).
[29] Yu. Holovatch, T. Krokhmal's'kii, J. Math. Phys. **35**, 3866 (1994).
[30] J. C. Le Guillou, J. Zinn–Justin, Phys. Rev. B **21**, 3976 (1980); R. Guida, J. Zinn–Justin, J. Phys. A **31**, 8103 (1998).
[31] Yu. Holovatch, M. Shpot, J. Stat. Phys. **66**, 867 (1992); Вопр. ат. науки и техн. **24**, 48 1992; in *Renormalization Group'91*, edited by D. V. Shirkov, V. B. Priezzhev (World Scientific, Singapore, 1992), p. 45.
[32] Yu. Holovatch, in: *Lecture Notes in Physics* **477** (Springer Verlag, Berlin, 1996) p.224; Cond. Matt. Phys. (Lviv) **3**, 33 (1994).
[33] Тут і нижче $\{\lambda_0\}$, $\{\lambda\}$ означає весь набір констант взаємодії, що входять у лаґранжіан. Так, для лаґранжіана (1) $\{\lambda_0\} = \lambda_0$ а для лаґранжіана (3) $\{\lambda_0\} = \lambda_{0,1}, \lambda_{0,2}$. $\Gamma^{(4)}_{\lambda_i}$ означає частину чотиричастинкової функції, що відповідає своєю симетрією константі λ_i.
[34] Тут ми перейшли до нової перенормованої змінної u і β-фукції β_u щоб ввести зручний чисельний масштаб, у якому перші два коефіцієнти фукції β_u рівні -1 і 1.
[35] Yu. Holovatch, T. Yavors'kii, Cond. Matt. Phys. (Lviv) **11**, 87 (1997); J. Stat. Phys., **92**, 785 (1998); in *Proc. 11th Sem. Phase Transitions and Crit. Phenomena* (W.Trzebiatowski Inst. of Low Temp. and Struct. Research, Wroclaw, 1998), p. 146.
[36] G. H. Hardy, *Divergent Series* (Oxford University, Oxford, 1948).
[37] L. Schäfer, C. von Ferber, U. Lehr, B. Duplantier, Nucl. Phys. B. **374**, 473 (1992).
[38] Yu. Holovatch, Теор. мат. физ. **96**, 482 (1993).
[39] B. G. Nickel, J. Math. Phys. **19**, 542 (1977).
[40] Yu. Holovatch, Int. J. Mod. Phys. A. **8**, 5329 (1993); Saclay preprint SphT/92–123.
[41] G. A. Baker, Jr., B. G. Nickel, D. I. Meiron, Phys. Rev. B **17**, 1365 (1978).
[42] N. D. Mermin, P. Wagner, Phys. Rev. Lett. **17**, 1133 (1966); P. Hohenberg, Phys. Rev. **158**, 383 (1967).
[43] Yu. Holovatch, Ferroelectrics **192**, 55 (1997).
[44] M. Kac, T. N. Berlin, Phys. Rev. **86**, 821 (1952).
[45] A. B. Harris, J. Phys. C **7**, 1671 (1974).
[46] C. Bervillier, Phys. Rev. B **34**, 8141 (1986).
[47] G. Jug, Phys. Rev. B **27**, 609 (1983).
[48] C. Jayaprakash, H. J. Katz, Phys. Rev. B **16**, 3987 (1977); Б. Н. Шалаев, Журн. эксп. теор. физ. **73**, 2301 (1977).
[49] I. O. Mayer, A. I. Sokolov, B. N. Shalaev, Ferroelectrics **95**, 93 (1989); I. O. Mayer, J. Phys. A **22**, 2815 (1989).
[50] B. N. Shalaev, Phys. Rep. **237**, 129 (1994).
[51] B. N. Shalaev, S. A. Antonenko, A. I. Sokolov, Phys. Lett. A **230**, 105 (1997)
[52] R. Folk, Yu. Holovatch, T. Yavors'kii, Письма журн. эксп. теор. физ. **69**, 698 (1999); [JETP Lett. **69**, 747 (1999)].
[53] R. Folk, Yu. Holovatch, T. Yavors'kii, Журн. фіз. досл. **2**, 213 (1998).
[54] G. A. Baker Jr., L. P. Benofy, J. Stat. Phys. **29**, 699 (1982).

MASSIVE RENORMALIZATION IN NON-INTEGER DIMENSIONS

Yu. Holovatch[1,2]
[1] *Institute for Condensed Matter Physics, Ukrainian Acad. Sci.,*
1 Svientsitskii Str., Lviv, UA–79011, Ukraine
[2] *The Ivan Franko National University of Lviv, Chair for Theoretical Physics*
12 Drahomanov Str., Lviv, UA–79005, Ukraine
E–mail: hol@icmp.lviv.ua

A method to study critical behaviour in the non–integer space dimension d is discussed. Calculations are performed on the base of the massive field theory equations (Callan–Symanzik equations) at fixed non–integer d. Quantitative characteristics of the critical behaviour of several popular models of statistical physics are reviewed.