ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 3, № 3 (1999) с. 284–290

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 3, No. 3 (1999) p. 284–290

СТАТИСТИЧНА МАТРИЦЯ ГУСТИНИ ТА ФУНКЦІЯ ГАМІЛЬТОНА РЕЛЯТИВІСТСЬКОЇ СИСТЕМИ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК

Л. Ф. Блажиєвський
Львівський національний університет імені Івана Франка, кафедра теоретичної фізики, вул. Драгоманова, 12, Львів, 79005, Україна

(Отримано 10 листопада 1999)

Розглянуто релятивістську систему заряджених частинок у стані статистичної рівноваги. На основі польової теорії знайдено N–частинкову статистичну матрицю густини. У першому наближенні щодо постійної взаємодії вона має вигляд інтеґрала за траєкторіями фазового простору від функціонала $\exp(W)$ з неадитивною дією W. Показано, що в класичному випадку звідси можна отримати розподіл Ґіббса для системи релятивістських частинок з прямою взаємодією. Знайдено наближену функцію Гамільтона релятивістської системи заряджених частинок.

Ключові слова: релятивістська статистична механіка, постньютонівське наближення, запізнювання взаємодії, континуальне інтеґрування.

PACS numbers: 06.20.-y, 03.30.+p

I. ВСТУП

Добре відомо, що застосування канонічної схеми статистичної механіки для дослідження слаборелятивістських (інакше постньютонівських) систем взаємодіючих частинок суттєво ускладнюється нетривіяльністю переходу до гамільтонових змінних. Звичайно для слаборелятивістських систем відома функція Лаґранжа. Наприклад, слаборелятивістську систему заряджених частинок (розглядом якої ми тут обмежимось) описують лаґранжіяном Дарвіна [1]. Цей лаґранжіян, як і інші постньютонівські лаґранжіяни (наприклад, лаґранжіян Айнштайна–Інфельда–Гоффмана системи частинок із ґравітаційною взаємодією або лаґранжіян Кеннеді системи нейтральних частинок), характеризується складною залежністю від швидкостей частинок. Тому перехід від лаґранжевих змінних до канонічних може бути здійснений лише наближено. Якщо в задачах класичної і квантової механіки для цього можна використати метод послідовних наближень (наприклад, за степенями $1/c$, c — швидкість світла у вакуумі), то в статистичній механіці зробити це важко, оскільки потрібно враховувати термодинамічний граничний перехід ($N\to\infty$, $V\to\infty$, N/V=const, де N — число частинок, V — об'єм системи). Нагадаємо у зв'язку з цим зауваження Боголюбова в його монографії "Проблемы динамической теории в статистической физике" [2]: "Заметим, что в любом исследовании объемных свойств реальных газов, жидкостей и других подобных систем, основанном на статистической механике, такой предельный переход всегда совершается, хотя иногда явно не оговаривается." Питання, пов'язані з конструюванням вихідних співвідношень слаборелятивістської статистичної механіки (розподіл Ґіббса, функція Гамільтона, рівняння Ліувілля, рівняння ББҐКІ тощо) на основі звичайних перетворень Лежандра, досліджувало багато авторів. Укажемо лише на праці [3–14]. Зокрема у [13] розглянуто декілька модельних лаґранжіянів, на прикладі яких висвітлена роль термодинамічної границі при введенні канонічних змінних. Наприклад, для далекосяжних взаємодій при переході від лаґранжевих змінних до канонічних необхідно враховувати всі члени ряду теорії збурень за степенями $1/c$.

Інший спосіб побудови основних співвідношень слаборелятивістської статистичної механіки базується на використанні польової теорії. Так, у праці [15] пряма взаємодія заряджених частинок розрахована на основі певного канонічного перетворення гамільтоніяна системи частинок і поля. У [16] слаборелятивістський гамільтоніян заряджених частинок отримано канонічним u–v–перетворенням Боголюбова.

У цій праці ми використаємо польову теорію для знаходження наближеної гамільтонової функції системи релятивістських заряджених частинок, вибираючи за параметр розвинення не відношення швидкости частинок до швидкости світла, а константу взаємодії.

Будемо розглядати рівноважну систему з N релятивістських заряджених частинок й електромагнетного поля. Ненормований статистичний оператор $\hat{G}$ такої системи задається формулою $\hat{G}=\exp\{-\beta(\hat{H}_f+\sum_j \hat{H}_j)\}$, де $\hat{H}_f$ — оператор Гамільтона вільного поля, $\hat{H}_j$ — оператор Гамільтона однієї частинки, яка взаємодіє з полем, β^{-1} — статистична температура. Очевидно, що усереднивши $\hat{G}$ за польовими змінними, можна знайти статистичний оператор $\hat{K}$ системи лише самих частинок, які взаємодіють між собою. Тобто $\hat{K}=\langle\hat{G}\rangle_f$. Якщо результат усереднення записати у вигляді $\exp(-\beta\mathcal{H})$, то $\mathcal{H} = -\frac{1}{\beta}\ln\langle\hat{G}\rangle_f$ можна трактувати як деякий ефективний гамільтоніян системи частинок з прямою (безпольовою) взаємодією. Покажемо, що (принаймні у класичному випадку) такий гамільтоніян можна знайти.

II. КОНТИНУАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ СТАТИСТИЧНОЇ МАТРИЦІ ГУСТИНИ

Для проведення конкретних розрахунків використаємо метод континуального інтеґрування. Як відомо, ненормовану статистичну матрицю густини можна отримати інтеґруванням за траєкторіями фазового простору функціонала $\exp(W)$, де W має зміст класичної дії евклідової теорії, тобто теорії з "уявним" часом $\frac{\hbar}{i}\beta$. Зручно за конфіґураційну змінну інтеґрування, замість координати частинки $x(\tau)$ $(0 \leq \tau \leq \beta)$, вибрати її швидкість $u(\tau)$ [18]. Тоді матрицю густини можемо описати формулами

$$K(x, x_0; \beta) \equiv e^{-\beta \hat{H}_x} \delta(x - x_0)$$
$$= C \int DP(\tau) Du(\tau) e^W \qquad (2.1)$$
$$\times \delta\left(x - x_0 - \hbar \int_0^\beta d\tau u(\tau)\right),$$

$$W = \int_0^\beta d\tau \{iP(\tau)u(\tau) - H(P(\tau), u(\tau))\}.$$

Тут $\hat{H}_x$ і $H(P(\tau), u(\tau))$ — оператор Гамільтона і відповідний йому класичний гамільтоніян; $x(\tau) = x - \hbar\int_\tau^\beta d\tau' u(\tau')$ — координата частинки в "момент часу τ"; $Dz(\tau) = \prod\limits_{0 \leq \tau \leq \beta} dz(\tau)$ — елемент об'єму функціонального простору; $-\infty \leq z(\tau) \leq \infty$; $z = (P, u)$; $C = \prod\limits_{0 \leq \tau \leq \beta} \Delta\tau/2\pi$; i — уявна одиниця.

Вираз (2.1) можна записати також у вигляді інтеґрала за траєкторіями конфіґураційного простору. Зокрема, якщо гамільтоніян квадратичний за імпульсами, то отримаємо формулу (випишемо її у вигляді звичайного фейнманівського інтеґрала)

$$K(x, x_0; \beta) = \int_{(x_0)}^{(x)} \delta x(\tau)$$
$$\times \exp\left[\int_0^\beta d\tau L\left(\frac{i}{\hbar}\dot{x}(\tau), x(\tau)\right)\right], \qquad (2.2)$$

де функція $L\left(\frac{i}{\hbar}\dot{x}(\tau), x(\tau)\right)$ — класичний лаґранжіян, у якому швидкість частинки замінена величиною $\frac{i}{\hbar}\dot{x}(\tau) \equiv \frac{i}{\hbar}dx/d\tau$. (Зауважимо, що співвідношення (2.2) справджується в загальному випадку, якщо результат інтеґрування певним чином регуляризувати [18]). Поклавши в (2.1), (2.2) $x_0 = x$ і проінтеґрувавши після цього за x, знайдемо статистичну суму. Відзначимо, що з формули (2.1) легко отримати класичну статистичну суму. Для цього у функціоналі W досить покласти $\hbar = 0$, тобто знехтувати залежністю $x(\tau)$ від швидкости $u(\tau)$. Справді, використавши в (2.1) інтеґральне зображення δ–функції, бачимо, що інтеґрал за $u(\tau)$ дорівнюватиме функціональній δ–функції $\prod\limits_\tau \delta(P(\tau) - p)$. Отже, інтеґрування за $P(\tau)$ елементарне. Отримаємо

$$Z = \int \frac{dpdx}{2\pi\hbar} e^{-\beta H(p,x)}. \qquad (2.3)$$

Узагальнення формул (2.1)–(2.3) на випадок багатьох ступенів вільности очевидне.

Розглянемо тепер систему частинок і поля. Функціонал W повинен залежати як від польових, так і від частинкових змінних. Будемо описувати поле лаґранжевими змінними, а частинки — гамільтоновими. Тобто континуальний інтеґрал за змінними частинок будемо записувати у формі (2.1), а за польовими — у формі (2.2). Тоді інтеґрал дії W матиме вигляд

$$W = W_f + W_p,$$

де W_f — дія для вільного поля, а W_p — дія для частинок, які взаємодіють із полем. Очевидно, що

$$W_f = \frac{1}{8\pi}\int_0^\beta d\tau \int d^3r \left\{\left(-\boldsymbol{\nabla}\varphi(\mathbf{r}, \tau) - \frac{i}{\hbar c}\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, \tau)}{\partial \tau}\right)^2 \right.$$
$$\left. - \left(\mathrm{rot}\,\mathbf{A}(\mathbf{r}, \tau)\right)^2\right\}, \qquad (2.4)$$

$$W_p = \int_0^\beta d\tau \sum_{j=1}^N \left\{i\Big(\mathbf{p}_j(\tau)\mathbf{u}_j(\tau)\Big) - H_j\Big(\mathbf{p}_j(\tau), \mathbf{r}_j(\tau)\Big)\right\},$$

$$H_j = \left[m^2c^4 + c^2\left(\mathbf{p}_j(\tau) - \frac{e}{c}\mathbf{A}(r_j(\tau), \tau)\right)^2\right]^{1/2}$$
$$+ e\varphi(\mathbf{r}_j(\tau), \tau) \equiv \mathcal{E}(\boldsymbol{\pi}_j) + e\varphi(\mathbf{r}_j(\tau), \tau). \qquad (2.5)$$

Тут $\mathbf{A}(\mathbf{r}_j(\tau), \tau)$ і $\varphi(\mathbf{r}_j(\tau), \tau)$ — векторний і скалярний потенціяли електромагнетного поля; e і m — заряд і маса частинки; $\boldsymbol{\pi}_j = \mathbf{p}_j(\tau) - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}_j(\tau), \tau)$.

Зручно перейти до зображення Фур'є, покладаючи

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(\tau), \tau) = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(\tau) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(\tau)},$$

$$\varphi(\mathbf{r}(\tau), \tau) = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{k}}(\tau) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(\tau)},$$

і використати кулонівську калібрувальну умову $i(\mathbf{k}\mathbf{A}_k(\tau)) = 0$. Тоді

$$W_f = \int_0^\beta d\tau \sum_k \frac{k^2}{8\pi V}$$
$$\times \left\{ \varphi_{\mathbf{k}}\varphi_{-\mathbf{k}} - (\mathbf{A}_{\mathbf{k}}\mathbf{A}_{-\mathbf{k}}) - \frac{1}{(\hbar ck)^2}(\dot{\mathbf{A}}_k\dot{\mathbf{A}}_{-\mathbf{k}}) \right\}. \quad (2.6)$$

Формула для H_j очевидна, і її не виписуємо.

З огляду на все сказане статистичну матрицю густини системи заряди+поле можна означити таким континуальним інтеґралом:

$$G = \text{const} \int_{\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(0),\varphi_{\mathbf{k}}(0)}^{\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(\beta),\varphi_{\mathbf{k}}(\beta)} \left\{ \prod_{\mathbf{k}} \prod_{o<\tau<\beta} d\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(\tau) d\varphi_{\mathbf{k}}(\tau) \right\} C^{3N} \int \left\{ \prod_j D\mathbf{p}_j(\tau) D\mathbf{u}_j(\tau) \right\}$$
$$\times e^{W_f + W_p} \left\{ \prod_k \prod_\tau \delta(i(\mathbf{k}\mathbf{A}_k(\tau))) \right\} \prod_j \delta\left(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_j^0 - \hbar \int_0^\beta d\tau \mathbf{u}_j(\tau) \right), \quad (2.7)$$

де W_p і W_f виражаються формулами (2.4)–(2.6). Наявність у підінтеґральному виразі функціональної δ–функції зумовлена калібрувальним характером електромагнетного поля. (Як відомо [19], квантування калібрувальних теорій здійснюють континуальним інтеґруванням функціонала $\Phi \exp$ [дія], де Φ є безмежним добутком δ–функцій, арґументи яких визначають вигляд калібрувальної умови).

III. РЕЛЯТИВІСТСЬКА N–ЧАСТИНКОВА СТАТИСТИЧНА МАТРИЦЯ ГУСТИНИ

Знайдемо тепер статистичну матрицю густини лише самих частинок. Для усереднення, про яке йшлося у вступі, потрібно в (2.7) покласти $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(0) = \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(\beta)$, $\varphi_{\mathbf{k}}(0) = \varphi_{\mathbf{k}}(\beta)$, увести додаткові інтеґрування за $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(\beta)$, $\varphi_{\mathbf{k}}(\beta)$ і обчислити інтеґрал. Оскільки підінтеґральний вираз містить функціональну δ–функцію, то незалежних польових координат із заданими значеннями $\mathbf{k}$ і τ є лише три. Тому доцільно замість $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(\tau)$, $\varphi_{\mathbf{k}}(\tau)$ ввести нову векторну польову змінну [20]

$$\mathbf{R}_k(\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi V}}\Big([\mathbf{k}\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(\tau)] + i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k}}(\tau) \Big).$$

Звідси

$$\mathbf{A}_k = -\frac{\sqrt{4\pi V}}{k^2}[\mathbf{k}\mathbf{R}_{\mathbf{k}}],$$
$$\varphi_{\mathbf{k}} = -i\frac{\sqrt{4\pi V}}{k^2}(\mathbf{k}\mathbf{R}_{\mathbf{k}}). \quad (3.1)$$

Неважко переконатись, що після цього для N–частинкової статистичної матриці густини K_N отримуємо таку формулу:

$$K_N = B \int D\mathbf{R}_{\mathbf{k}}(\tau) C^{3N} \int D^N\mathbf{p}(\tau) D^N\mathbf{u}(\tau) \quad (3.2)$$
$$\times \exp(W_f[R] + W_p]) \prod_j \delta\Big(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_j^0 - \hbar \int_0^\beta d\tau \mathbf{u}_j(\tau) \Big),$$

де

$$W_f[R] = \int_0^\beta d\tau \frac{1}{2} \sum \Big\{ (\mathbf{R}_{\mathbf{k}}\mathbf{R}_{-\mathbf{k}}) + \frac{1}{(\hbar ck)^2}$$
$$\times \Big[(\dot{\mathbf{R}}_{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{R}}_{-\mathbf{k}}) - (\mathbf{k}\dot{\mathbf{R}}_k)(\mathbf{k}\dot{\mathbf{R}}_{-\mathbf{k}})/k^2 \Big] \Big\}, \quad (3.3)$$

а W_p описуємо формулами (2.5), замінюючи в них $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$, φ_k на $\mathbf{R}_{\mathbf{k}}$ згідно з (3.1). Постійну B вибираємо так, щоб за відсутности частинок інтеґрал (3.2) дорівнював одиниці. Звернемо увагу, що величина $\mathbf{R}_k(\tau)$ комплексна: $\mathbf{R}_{\mathbf{k}} = \pm\mathbf{R}_{\mathbf{k}}^c + i\mathbf{R}_{\mathbf{k}}^s$. Тобто в (3.3)

$$\frac{1}{2}\sum_k (\mathbf{R}_{\mathbf{k}}\mathbf{R}_{-\mathbf{k}}) = -\frac{1}{2}\sum_k |\mathbf{R}_{\mathbf{k}}|^2$$
$$= -\frac{1}{2}\mathbf{R}_0^2 - \sum_{k>0} \Big[(\mathbf{R}_{\mathbf{k}}^c)^2 + \mathbf{R}_{\mathbf{k}}^s)^2 \Big],$$

а елемент об'єму $D\mathbf{R}_{\mathbf{k}}(\tau)$ потрібно розуміти як скорочений запис виразу

$$\prod_\tau \Big\{ d\mathbf{R}_0(\tau) \prod_{k>0} d\mathbf{R}_{\mathbf{k}}^c(\tau) d\mathbf{R}_{\mathbf{k}}^s(\tau) \Big\}.$$

Обчислимо тепер інтеґрал за $\mathbf{R}_{\mathbf{k}}(\tau)$. Це можна зробити лише наближено. Розкладемо для цього у функціоналі (2.5) $\mathcal{E}(\boldsymbol{\pi})$ в ряд Тейлора за степенями e, зберігши лише члени, пропорційні e^0, e, e^2. Тоді інтеґрал за $\mathbf{R_k}$ набуде ґаусового вигляду. Однак він усе ще складний для розрахунку, оскільки доданки, які пропорційні $\mathbf{A}^2(\mathbf{r},\tau)$, після переходу до зображення Фур'є міститимуть недіягональні члени. Для спрощення використаємо наближення хаотичних фаз, у якому, як відомо, враховують лише взаємодії з однаковим переданим імпульсом. Тоді $\mathbf{A}^2(\mathbf{r}) \simeq \sum_k(\mathbf{A_k}A_{-\mathbf{k}})/V^2$. У таких наближеннях одночастинковий гамільтоніян матиме вигляд

$$\mathcal{E}(\mathbf{p}) - \frac{ec}{V\mathcal{E}(\mathbf{p})}\sum_k e^{i\mathbf{kr}}(\mathbf{pA}_k) + \frac{e}{V}\sum_k e^{i\mathbf{kr}}\varphi_k + \frac{e^2}{2V\mathcal{E}(\mathbf{p})}\sum_k\left(\delta_{\mu\nu} - c^2\frac{p_\mu p_\nu}{\mathcal{E}^2(p)}\right)A^\mu_{\mathbf{k}}A^\nu_{-\mathbf{k}}, \qquad (3.4)$$

де $\mathcal{E}(\mathbf{p}) = (m^2c^4 + c^2p^2)^{1/2}$, $\delta_{\mu\nu}$ — символ Кронекера. Повторення грецьких індексів означає підсумовування від 1 до 3. Урахувавши в (3.4) співвідношення (3.1), знайдемо

$$H_j = \mathcal{E}(\mathbf{p}_j) - i\sum_{\mathbf{k}}\nu_k e^{i\mathbf{kr}_j}(\mathbf{F_k}(p_j)\mathbf{R}_k) - \frac{1}{2}\alpha_j\sum_k \nu_k^2 e^{\perp}_{\mu\nu}R^\mu_{\mathbf{k}}R^\nu_{-\mathbf{k}}, \qquad (3.5)$$

де введені позначення:

$$\mathbf{F_k}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{k}}{k} - i\frac{c}{\mathcal{E}(\mathbf{p})}\left[\frac{\mathbf{k}}{k}\mathbf{p}\right],$$
$$\alpha = \frac{1}{\mathcal{E}(\mathbf{p})}\left(1 - \frac{c^2p^2}{3\mathcal{E}(\mathbf{p})}\right),$$
$$\nu_k^2 = \frac{4\pi e^2}{Vk^2}, \qquad (3.6)$$
$$e^{\perp}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}.$$

Як бачимо, $\sum_j H_j$ містить квадратичний за $\mathbf{R_k}$ доданок. Його можна об'єднати з аналогічним доданком у W_f. Таким чином, континуальний інтеґрал за змінними $\mathbf{R_k}(\tau)$ у формулі (3.2) набуває вигляду

$$B\int D\mathbf{R_k}(\tau)\exp\left[\int_0^\beta d\tau\frac{1}{2}\sum_k\left(\gamma_k^{\mu\nu}R^\mu_{\mathbf{k}}R^\nu_{-\mathbf{k}} + \frac{e^{\perp}_{\mu\nu}}{(\hbar ck)^2}\dot{\mathbf{R}}^\mu_{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{R}}^\nu_{-\mathbf{k}}\right)\right]\exp\int_0^\beta d\tau i\sum_{\mathbf{k}}\nu_k\sum_j e^{i\mathbf{kr}_j(\tau)}(\mathbf{F_k}(p_j)\mathbf{R_k}) = I, \qquad (3.7)$$

$$\gamma_k^{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + e^{\perp}_{\mu\nu}(\sum_j\alpha_j)\nu_k^2 \equiv \delta_{\mu\nu} + e^{\perp}_{\mu\nu}\frac{æ^2}{k^2}. \qquad (3.8)$$

Інтеґрал I є ґаусовий. Подібні інтеґрали обчислені у праці [20]. Схема розрахунку така. Проведемо заміну змінних інтеґрування $R^\mu_{\mathbf{k}} \to a^{\mu\nu}_{\mathbf{k}}R^\nu_{\mathbf{k}}$, визначивши матрицю $[a_{\mathbf{k}}]$ з умови $[a_{\mathbf{k}}][\gamma_{\mathbf{k}}][a_{\mathbf{k}}] = [I]$ ($[I]$ — одинична матриця). Оскільки функція $R_{\mathbf{k}}(\tau)$ періодична ($\mathbf{R_k}(0) = \mathbf{R_k}(\beta)$), то її можна зобразити рядом Фур'є

$$\mathbf{R_k}(\tau)(= \frac{1}{\beta}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathbf{R}_{\mathbf{k},n}\exp\left(i\tau\frac{2\pi}{\beta}n\right).$$

Після цього континуальний інтеґрал I набуває вигляду безмежного добутку звичайних інтеґралів за змінними $\mathbf{R}_{\mathbf{k},n}$. Лінійний за $\mathbf{R}_{\mathbf{k},n}$ доданок виключаємо перетворенням трансляції. Провівши ці розрахунки, знайдемо

$$I = I_0e^S. \qquad (3.9)$$

Функціонал S визначається формулами:

$$S = -\int_0^\beta d\tau\frac{1}{2}\sum_k\nu_k^2\sum_{j,l}\exp i\Big[(\mathbf{kr}_j(\tau)) - (\mathbf{kr}_l(\tau))\Big] - \int_0^\beta d\tau\int_0^\beta d\tau'\frac{1}{2}\sum_k\tilde{\nu}_k^2D_k(\tau-\tau')\sum_{jl}c^2\frac{p_j^\mu}{\mathcal{E}(p_i)}\frac{p_l^\nu}{\mathcal{E}(p_l)}e^{\perp}_{\mu\nu}\exp i\Big[(\mathbf{kr}_j(\tau)) - (\mathbf{kr}_l(\tau))\Big], \qquad (3.10)$$

$$D_k(\tau-\tau^{'}) = \frac{1}{2}\hbar c\tilde{k} \text{ ch } \left[\hbar c\tilde{k}\left(\frac{\beta}{2}-|\tau-\tau^{'}|\right)\right] \Big/ \text{sh}\left(\frac{1}{2}\beta\hbar c\tilde{k}\right), \tag{3.11}$$

$$\tilde{k}^2 = k^2 + æ^2, \quad \tilde{\nu}_k^2 = \nu_k^2 \Big/ \left(1+\frac{æ^2}{k^2}\right). \tag{3.12}$$

Як бачимо, перший доданок у (3.10) (після виключення членів самодії) збігається з інтеґралом дії для частинок з кулонівською взаємодією. Другий доданок описує релятивістську взаємодію. Вона є запізнюючою. При $c \to \infty$ фотонна функція Ґріна $D_k(\tau-\tau^{'}) \to \delta(\tau-\tau^{'})$, і це запізнення зникає. Окрім цього, релятивістська взаємодія, як це видно з (3.12), екранується. Причому радіус екранування залежить від імпульсів (див. (3.8), (3.6)). У найпростішому наближенні замінимо величини α_j їхніми середніми значеннями, вважаючи частинки невзаємодіючими. Тоді $\tilde{k}$, æ будуть деякими числами. Звернемо увагу, що екрануючий співмножник $\left(1+\frac{æ^2}{k^2}\right)^{-1}$ появляється внаслідок того, що в наближених співвідношеннях (3.4), (3.5) ми враховуємо члени $\sim e^2$. Нарешті, у доданку з подвійним інтеґралом треба перенормувати масу. Подібно до слаборелятивістського випадку [13,16], для цього потрібно вилучити лише ті члени самодії (тобто члени з $j=l$), які не залежать від параметра æ (тобто не залежать від числа частинок у системі). Доданок, залежний від æ, потрібно залишити. Він має вигляд

$$\begin{aligned} &-\sum_j \int_0^\beta d\tau \int_0^\beta d\tau^{'} \frac{1}{2}\sum_k \nu_k^2 \frac{æ^2 c^2}{k^2+æ^2} D_k(\tau-\tau^{'}) \\ &\times e_{\mu\nu}^{\perp} \frac{p_j^\mu(\tau) p_j^\nu(\tau^{'})}{\mathcal{E}(\mathbf{p}_j(\tau))\mathcal{E}(\mathbf{p}_j(\tau^{'}))} \\ &\times \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r}_j(\tau) - \mathbf{k}\mathbf{r}_j(\tau^{'}))] = S_c. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Множник I_0 в (3.9) — це інтеґрал (3.7) при $\mathbf{F}_k(p_j)=0$. Він пропорційний до статистичної суми вільного електромагнетного поля Z_f з перенормованою енерґією фотонів $\hbar c\tilde{k}$. Як і екранування поперечних взаємодій, перенормування енерґетичного спектра фотонів зумовлене внесками членів порядку e^2 з одночастинкового гамільтоніяна. Узявши до уваги значення постійної B у формулі (3.7), можна показати, що $I_0 = J\tilde{Z}_f/Z_f$, де

$$\tilde{Z}_f = \exp\left\{-\beta\sum_{\mathbf{k}} \hbar c\tilde{k} - 2\sum_{\mathbf{k}} \ln(1-e^{-\beta\hbar c\tilde{k}})\right\},$$

$Z_f = \tilde{Z}_f(\tilde{k}=k)$. J — якобіян перетворення заміни змінних $R_{\mathbf{k}}^\mu \to a_{\mathbf{k}}^{\mu\nu} R_{\mathbf{k}}^\nu$. $J = \prod_\tau \prod_{\mathbf{k}} \det|a_{\mathbf{k}}^{\mu\nu}|$. При $\beta \to \infty$, $\tilde{Z}_f/Z_f = \exp\left[-\beta\hbar c\sum_{\mathbf{k}}(\tilde{k}-k)\right]$. Очевидно, що $\sum_{\mathbf{k}} \hbar c(\tilde{k}-k)$ описує зміну енерґії нульових коливань поля, зумовлену наявністю частинок. Ця величина є розбіжною. Однак вона не впливає на термодинамічні характеристики системи. Зауважимо, що у слаборелятивістському наближенні її можна позбутись перенормуванням [16]. Так само можна не брати до уваги і співмножник J. При розрахунку середніх значень фізичних величин за допомогою статистичної матриці густини він буде фігурувати як у чисельнику, так і в знаменнику відповідних формул. Тобто в (3.9) можна I_0 замінити одиницею.

Підсумовуючи отримані результати, бачимо, що N–частинкову статистичну матрицю густини релятивістських заряджених частинок можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} K_N(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'}) &= C^{3N}\int D^N\mathbf{p}(\tau) D^N\mathbf{u}(\tau) \\ &\times \exp\Big[\int_0^\beta d\tau\ i\sum_j (\mathbf{p}_j(\tau)\mathbf{u}_j(\tau))\Big] \\ &\times e^{S_0+S_c+S^{'}} \prod_j \delta\Big(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_j^{'} - \hbar\int_0^\beta d\tau \mathbf{u}_j(\tau)\Big), \end{aligned} \tag{3.14}$$

де S_c визначається формулою (3.13), а $S^{'}$ — формулою (3.10), якщо в ній урахувати лише члени з $j \neq l$,

$$S_0 = -\int_0^\beta d\tau \mathcal{E}(p_j(\tau)). \tag{3.15}$$

IV. КЛАСИЧНИЙ ГАМІЛЬТОНІЯН

Розглянемо окремо класичну систему. Як уже було зазначено в другому розділі, у цьому випадку можна знехтувати функціональною залежністю координат від швидкостей, тобто можна покласти $\mathbf{r}_j(\tau) = \mathbf{r}_j$. Тоді для діягонального матричного елемента $K_N(\mathbf{r},\mathbf{r})$ континуальний інтеґрал за $\mathbf{u}(\tau)$ набуває вигляду

$$C^{3N}\int D^N\mathbf{u}(\tau)\prod_j \delta\left(-\hbar\int_0^\beta d\tau \mathbf{u}_j(\tau)\right)$$

$$\times \exp\left[i\int_0^\beta d\tau \sum_j \Big(\mathbf{p}_j(\tau)\mathbf{u}_j(\tau)\Big)\right].$$

Неважко переконатись, що результат інтеґрування можна описати формулою

$$\int \frac{d^N\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^{3N}} \prod_j \prod_\tau \delta(\mathbf{p}_j(\tau)-\mathbf{p}_j). \tag{4.1}$$

Використавши (4.1), легко обчислимо в (3.14) інтеґрали за $\mathbf{p}_j(\tau)$. Після цього, проінтеґрувавши діягональні елементи матриці K_N за координатами, знайдемо статистичну суму

$$Z_N = \int \frac{d^N\mathbf{r} d^N\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^{3N}} \exp(S_o + S_c + S^{'}), \tag{4.2}$$

де $S_o, S_c, S^{'}$ потрібно визначити формулами (3.10), (3.13), (3.15), замінюючи в них $\mathbf{p}_j(\tau)$, $\mathbf{r}_j(\tau)$ на $\mathbf{p}_j$, $\mathbf{r}_j$. Урахуємо, що, як це видно з (3.11), при $\hbar = 0$ $D_k(\tau-\tau^{'}) = 1/\beta$. Тоді показник експоненти у формулі (4.2) набуває вигляду $(-\beta H)$, причому

$$H = \sum_j H_j^* + \frac{1}{2}\sum_{j\neq l} H_{jl}, \tag{4.3}$$

де

$$H_j^* = \mathcal{E}(\mathbf{p}_j) + \frac{1}{3}æ e^2 \frac{c^2 p_j^2}{\mathcal{E}^2(p_j)}, \tag{4.4}$$

$$H_{jl} = \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_{jl}} \frac{4\pi e^2}{Vk^2}\left\{ 1 - \left(1+\frac{æ^2}{k^2}\right)^{-1} \right.$$

$$\left. \times \frac{c^2}{\mathcal{E}(\mathbf{p}_j)\mathcal{E}(\mathbf{p}_l)}\Big[(\mathbf{p}_j\mathbf{p}_l) - (\mathbf{k}\mathbf{p}_j)(\mathbf{k}\mathbf{p}_l)/k^2\Big]\right\}. \tag{4.5}$$

Обчисливши в (4.5) суму за $\mathbf{k}$, знайдемо

$$H_{jl} = \frac{e^2}{r_{jl}}\left(1 - \frac{c^2}{\mathcal{E}_(\mathbf{p}_j)\mathcal{E}_(\mathbf{p}_l)} p_j^\mu p_l^\nu \Phi^{\mu\nu}(æ_c r_{jl})\right), \tag{4.6}$$

$$r_{jl} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l|.$$

$$\Phi^{\mu\nu}(x) = (\delta_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu)e^{-x} + (\delta_{\mu\nu} - 3n_\mu n_\nu)$$

$$\times\left(\frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-x}}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right), \tag{4.7}$$

$$n_\mu = r_\mu / r.$$

На закінчення зробимо декілька зауважень. Формули (4.3)–(4.5) наближені. Ми обмежились урахуванням в $\mathcal{E}(\boldsymbol{\pi})$ лише членів, квадратичних за зарядом, і використали наближення хаотичних фаз. Той факт, що фотонна функція Ґріна $D_k(\tau-\tau^{'})$ у класичному випадку прямує до $1/\beta$, очевидно свідчить про те, що з H_{jl} випадають ефекти запізнення взаємодії. Можна вважати, що в (4.4), (4.5) враховані лише релятивістські кінематичні ефекти та магнетні взаємодії релятивістських струмів. Тобто співвідношення (4.3), (4.7) мають таку ж структуру, як і слаборелятивістський гамільтоніян, який ми розраховували раніше у працях [7,12]. (У слаборелятивістському наближенні потрібно у формулі (4.5) та другому доданку формули (4.4) $\mathcal{E}(\mathbf{p}_j)$ замінити енерґією спокою). Особливістю отриманих формул є екранування релятивістської двочастинкової взаємодії та перенормування одночастинкового гамільтоніяна, що можна розглядати як результат впливу середовища. Звернемо увагу, що в H_{jl}, крім членів з екрануючою експонентою, є доданок $p_j^\mu p_j^\nu(\delta_{\mu\nu} - 3n_\mu n_\nu)/r^3$, що характерний для дипольної взаємодії. При усередненні за напрямками вектора $\mathbf{r}_{jl}$ цей доданок зникає. Тобто ефективна релятивістська взаємодія екранується тільки в середньому. Той факт, що релятивістські взаємодії екрануються, узгоджується з термодинамічним граничним переходом. Справді, параметр $æ^2$, як видно з (3.8), (3.6), пропорційний до $\frac{1}{V}\sum_j \alpha_j$, тобто $æ^2 \sim N/V$. У термодинамічних системах $N/V = \mathrm{const}$. Природно, що таким параметром нехтувати не можна. У механічних системах N і V ніяк не пов'язані між собою, тому при $V \to \infty$ $æ \to 0$. У цьому випадку формули (4.4)–(4.7) спрощуються, і ми отримуємо релятивістське узагальнення класичного аналога постньютонівського гамільтоніяна Брейта:

$$H = \sum_j \varepsilon(\mathbf{p}_j) + \frac{1}{2}\sum_{j\neq l}\frac{e^2}{r_{jl}}\left\{1 - \frac{c^2}{2}\left[\left(\frac{\mathbf{p}_j}{\varepsilon(\mathbf{p}_j)}\frac{\mathbf{p}_l}{\varepsilon(\mathbf{p}_l)}\right) - \left(\frac{\mathbf{n}\mathbf{p}_j}{\varepsilon(\mathbf{p}_j)}\right)\left(\frac{\mathbf{n}\mathbf{p}_l}{\varepsilon(\mathbf{p}_l)}\right)\right]\right\}. \tag{4.8}$$

[1] C. G. Darwin, Philos. Mag. **39**, 357 (1920).
[2] Н. Н. Боголюбов, *Проблемы динамической теории в статистической физике* (ОГИЗ. Гостехиздат, Москва–Ленинград, 1946).
[3] J. E. Krizan, P. Havas, Phys. Rev. **128**, 2916 (1962).
[4] Б. А. Трубников, В. В. Косачев, Журн. эксп. теор. физ. **54**, 941 (1968).
[5] B. A. Trubnikov, Nucl. Fision **8**, 51 (968).
[6] T. E. Dengler, J. E. Krizan, Phys. Rev. A **2**, 2388 (1970).
[7] Л. Ф. Блажиєвський, Укр. фіз. журн. **20**, 1273 (1975).
[8] R. Lapiedra, E. Santos, Phys. Rev. D **23**, 2181 (1981).
[9] И. П. Павлоцкий, *Начала слаборелятивистской статистической механики* (Высшая школа, Москва, 1983).
[10] Yu. N. Orlov, I. P. Pavlolotsky, Physica A **151**, 318 (1988).
[11] Ю. Н. Орлов, И. П. Павлоцкий, Докл. Акад. Наук СССР **304**, 329 (1989).
[12] Л. Ф. Блажиєвський, Г. Б. Гіль, І. М. Васильків, Вісн. Львів. ун–ту, сер. фіз. **25**, 23 (1992).
[13] Л. Ф. Блажиєвський, Г. Б. Гіль, С. С. Семак, Журн. фіз. досл. **1**, 1 (1996).
[14] H. Essen, Phys. Rev. E **56**, 5858 (1997).
[15] R. D. Jones, A. Pytte, Phys. Fluids **23**, 269 (1980).
[16] L. F. Blazhyjevskii, Yu. S. Krynytskyi, Cond. Matt. Phys. (Lviv) iss. 3, 569 (1999).
[17] N. N. Bogoliubov, J. Phys. (USSR) **11**, 23 (1947).
[18] Л. Ф. Блажиєвський, Теор. мат. фіз. **66**, 409 (1986).
[19] В. Н. Попов, *Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике* (Атомиздат, Москва, 1976).
[20] L. F. Blazhyjevskii, Cond. Matt. Phys. (Lviv) iss. 6, 23 (1995).

STATISTICAL DENSITY MATRIX AND HAMILTONIAN OF A SYSTEM OF RELATIVISTIC CHARGED PARTICLES

L. F. Blazhyjevskii
Ivan Franko National University of Lviv, Chair of Theoretical Physics
12 Drahomanov Str., UA–79005, Lviv, Ukraine

A system of relativistic charged particles in statistical equilibrium is considered. N–particle density matrix is found on the base of field theory. Within the first order approximation it is represented as a phase–space path integral of the functional $\exp(W)$, where W as a non–additive action. We show that in the classical case this representation leads to Gibbs distribution for a system of relativistic particles with the direct interaction. The approximate Hamiltonian of a system of relativistic particles is found. The screening of the effective relativistic two–particle interaction as well as the renormalization of the one–particle Hamiltonian appear as a peculiarity of obtained formulae. This can be interpreted as an environment influence, which is relativistic generalization of the post–Newtonian Hamiltonian of spinless charged particles such that the relativistic interaction is described by Breit's formula, where particles impulses $\mathbf{p}$ are substituted by $\frac{mc^2}{\varepsilon}\mathbf{p}$, ($\varepsilon = \sqrt{m^2c^2 + c^2p^2}$).