ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 3, № 4 (1999) с. 468–473

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 3, No. 4 (1999) p. 468–473

НИЗЬКОТЕМПЕРАТУРНА АСИМПТОТИКА ЕФЕКТИВНОЇ МАСИ ДОМІШКИ В НАДПЛИННОМУ ^{4}He

І. О. Вакарчук, В. В. Бабін
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Драгоманова,12, Львів, 79005, Україна
(Отримано 8 квітня 1999 р.)

Шляхом усереднення повного статистичного оператора системи “надплинний ^{4}He + домішка ^{3}He” за станами рідкого ^{4}He в роботі будується ефективний домішковий гамільтоніян, власні значення якого тлумачаться як спектр домішки при $T \neq 0$. Обчислено ефективну масу домішкового атома в наближенні “однієї суми за хвильовим вектором” та досліджено її низькотемпературну асимтотику.

Ключові слова: ефективна маса, рідкий гелій, квантові розчини.

PACS number(s): 67.40.Yv, 71.18.+y

I. ВСТУП

Розчин ^{4}He–^{3}He — це єдина рідина, що складається з ізотопів з різними типами статистики: бозонів (^{4}He) та ферміонів (^{3}He). При нульвому тиску максимальна розчинність ^{3}He в ^{4}He становить усього $x^m = 6.6\%$ і досягає максимуму $x^m = 9.5\%$ при $P = 10$ атм [1]. Ця обставина стимулює теоретичний інтерес до мікроскопічного опису властивостей такої системи у границі сильного розведення $x \to 0$. У цьому випадку збуджені стани розчину можна розглядати в термінах слабковзаємодіючих між собою елементарних збуджень (квазічастинок) над основним станом, причому квазічастинки, що відповідають атомам ^{3}He, є ферміонами і мають в області малих імпульсів $\mathbf{P}$ такий закон дисперсії [2]:

$$\varepsilon(P) = \varepsilon_0 + \frac{P^2}{2M^*}. \qquad (1)$$

Тут ε_0 — енерґія “занурення” атома, а M^* — його ефективна маса. Для $x \simeq 0$ параметри ε_0 та M^* в (1) збігаються з відповідними величинами для одного атома ^{3}He, зануреного в рідкий ^{4}He.

Експериментально ε_0 знайдено із теплоти змішування ^{3}He та ^{4}He і становить $\varepsilon_0 = -2.785$ K, а M^*/M (M — маса атома ^{3}He) отримуємо на основі даних про поведінку теплоємности при $T \to 0$ або про швидкість другого звуку. Найсвіжіші цифри є такими:

$$\text{з [3]}\ \ M^*/M = 2.18;\ \text{з [4]}\ \ M^*/M = 2.15\ .$$

Теоретичному розрахункові параметрів ε_0 та M^* присвячена значна кількість праць. Девісон і Фінберґ [5] використали для розрахунку домішкової гілки спектра теорію збурень Бріллюена–Віґнера, обравши за хвильові функції нульового наближення хвильові функції чистого ^{4}He та ізольованого атома ^{3}He. Були розраховані енерґія заміщення, ефективна маса, відносна зміна об'єму рідини, зумовлена заміною атома ^{4}He атомом ^{3}He. Для отримання чисельного значення величини M^* використано структурний фактор рідкого ^{4}He, який теоретично розраховували різні автори. Так, для структурного фактора взятого із праці [11], у [5] отримали $M^*/M = 1.81$. В. Слюсарєв та М. Стржемечний [8] розглянули ті ж питання, використовуючи пробну варіяційну функцію домішкового атома і теорію збурень Бріллюена–Віґнера з довгохвильовою оцінкою матричних елементів “домішка” та “домішка–фонон”. Вони навели явний вираз для ефективної маси домішки через структурний фактор ^{4}He і дістали чисельне значення $M^*/M = 2.4$ на основі експериментально виміряного структурного фактора. У тій же праці автори звернули увагу на суттєву неквадратичність спектра в області хвильових векторів порядку 3 Å^{-1}. Аналогічний вираз для M^*, як і в [8], отримали Ву, Тен і Мессей [9], однак з теоретичним структурним фактором вони дістали $M^*/M = 1.85$, що є близьким до значення, знайденого в [5]. Ті ж автори в [10] поліпшили цей результат до $M^*/M = 2.37$ шляхом обчислення вищих поправок до ефективної маси за взаємодією “домішка–фонон”.

У праці [12] вибрана варіяційна хвильова функція, придатна тільки для розрахунку ефективної маси. За допомогою цієї функції, яка враховує зворотний потік, що виникає при русі атома ^{3}He у формі, яку запропонували Фейнман і Коен для чистого ^{4}He [13], отримано значення $M^*/M = 1.7$. Відзначимо працю [14], у якій спектр домішки та його загасання досліджено на основі динамічного структурного фактора як для малих значень хвильвого вектора ($M^*/M = 2.35$), так і в області ротонного мінімуму ^{4}He. У [15] для розрахунку домішкової гілки спектра використано “однопараметричну” пробну хвильову функцію без застосування теорії збурень Бріллюена–Віґнера. Для ефективної маси явно обчислені дві перші поправки, кожна з яких містить на одну суму за хвильовим вектором більше, ніж попередня. Використовуючи експериментальні дані для структурного фактора, у випадку атома ^{3}He отримано значення $M^*/M = 1.73$. Вплив тричастинкових кореляцій на параметри домішкового спектра докладно вивчали в [16]. Використовуючи в ролі потенціялу взаємодії між ізотопами He модельний потенціял Азіза [17], автори отримали $M^*/M = 2.2$ для нормальної густини рідкого ^{4}He. У нашій праці [18], на основі експериментальних значень структурного фактора рідкого ^{4}He, узятих з [19], у другому порядку теорії збурень ми отримали $M^*/M = 2.15$.

Останнім часом кількісної згоди з експериментом вдалося досягти за допомогою комп'ютерного моделювання методом Монте–Карло [20,21].

Існує також інший підхід (див. огляд [22]) до обчислення ефективної маси домішки ^{3}He у надплинному гелії-4 і пояснення її "аномально великого" значення, який ґрунтується на гіпотезі про існування в рідині зв'язаних станів ^{3}He та ^{4}He, а в чистому гелії-4 — зв'язаних "куперівських" пар атомів ^{4}He.

У цій роботі ми проводимо мікроскопічний розрахунок енерґетичного спектра одного атома ^{3}He в надплинному ^{4}He, а також досліджуємо низькотемпературну асимптотику відношення M^*/M.

На основі експериментальних даних про густину нормальної компоненти розчину ^{4}He–^{3}He залежність M^* від T вивчали, виходячи з напівфеноменологічних положень у [23]. Виявилось, що M^* залежить, хоча й дуже слабо, від температури. *Ab initio* розрахунки за методом Монте–Карло [20] також указують на незначну залежність M^* від T.

Далі наводимо результати з [1,23] та порівнюємо з тими, що отримали ми.

II. СПЕКТР ДОМІШКИ ^{3}He В РІДКОМУ ^{4}He ПРИ T≠0

Оператор Гамільтона досліджуваної системи має вигляд

$$H = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + H_{^4\mathrm{He}} + H_{\mathrm{int}}, \tag{2}$$

де $\mathbf{P}$ — імпульс атома ^{3}He, $H_{^4He}$ — гамільтоніян надплинного ^{4}He, H_{int} — енерґія взаємодії між домішковим атомом та рідким ^{4}He

$$H_{\mathrm{int}} = \sum_{j=1}^{N} \Phi(|\mathbf{R} - \mathbf{r}_j|). \tag{3}$$

Підсумовування в (3) відбувається за N атомами ^{4}He, $\mathbf{R}$ — радіус–вектор домішки, $\mathbf{r}_j$ $(j = 1, \ldots, N)$ — радіус–вектори атомів ^{4}He, $\Phi(r)$ — потенціял парної взаємодії між ізотопами, який ми вважатимемо гладкою функцією, такою, що для неї існує Фур'є–образ.

Уведемо ефективний домішковий гамільтоніян $H_{\mathrm{eff}}(\beta)$ (β — обернена температура в енерґетичних одиницях) у такий спосіб:

$$T\exp\left(-\int_0^\beta d\tau\, H_{\mathrm{eff}}(\tau)\right) = \mathrm{Sp}_{^4\mathrm{He}} \exp\left(-\beta H\right). \tag{4}$$

Тобто усереднимо повний статистичний оператор системи за ступенями вільности рідкого ^{4}He, а те, що залишилось, будемо розглядати як "ефективний" статистичний оператор, який "породжується" гамільтоніяном, залежним від температури. Власні значення H_{eff} будемо тлумачити як спостережуваний спектр домішки.

Зручно переписати (4) у такій формі:

$$T\exp\left(-\int_0^\beta d\tau\, H_{\mathrm{eff}}(\tau)\right) = \exp\left\{-\beta F_{^4\mathrm{He}}(\beta) - \beta\frac{\mathbf{P}^2}{2M}\right\} \left\langle T\exp\left(-\int_0^\beta d\tau\, \widetilde{H}_{\mathrm{int}}(\tau)\right)\right\rangle_{^4\mathrm{He}}, \tag{5}$$

де $F_{^4\mathrm{He}}(\beta)$ — вільна енерґія чистого ^{4}He, а ламані дужки $\langle\ldots\rangle_{^4\mathrm{He}}$ — це усереднення за станами надплинного гелію–4, означене у звичний спосіб:

$$\langle\ldots\rangle_{^4\mathrm{He}} = \frac{\mathrm{Sp}_{^4\mathrm{He}}\left\{\exp\left(-\beta H_{^4\mathrm{He}}\right)\ldots\right\}}{\mathrm{Sp}_{^4\mathrm{He}}\left\{\exp\left(-\beta H_{^4\mathrm{He}}\right)\right\}},$$

$\widetilde{H}_{\mathrm{int}}(\tau)$ виникає внаслідок переходу до представлення взаємодії

$$\widetilde{H}_{\mathrm{int}}(\tau) = \exp\left\{\tau\left(\frac{\mathbf{P}^2}{2M} + H_{^4\mathrm{He}}\right)\right\} H_{\mathrm{int}} \times \exp\left\{-\tau\left(\frac{\mathbf{P}^2}{2M} + H_{^4\mathrm{He}}\right)\right\}.$$

Для проведення подальших розрахунків перейдемо в (3) до колективних змінних [24]

$$\rho_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N} \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}_j), \quad \mathbf{q} \neq 0,$$

будемо мати

$$H_{\mathrm{int}} = \frac{N}{V}\nu_0 + \frac{\sqrt{N}}{V}\sum_{\mathbf{q}\neq 0} \nu_q \exp(i\mathbf{q}\mathbf{R})\,\rho_{\mathbf{q}},$$

де $\nu_q = \int d\mathbf{R}\, \exp(i\mathbf{q}\mathbf{R})\,\Phi(R)$ — Фур'є–образ $\Phi(R)$. Тепер $\widetilde{H}_{\mathrm{int}}(\tau)$ перетворимо до вигляду

$$\widetilde{H}_{\rm int}(\tau) = \frac{N}{V}\nu_0 + \frac{\sqrt{N}}{V}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\nu_q \exp(i\mathbf{q}\mathbf{R}(\tau))\,\rho_{\mathbf{q}}(\tau),$$

де

$$\mathbf{R}(\tau) = \mathbf{R} - i\tau\frac{\hbar}{M}\mathbf{P}, \quad \rho_{\mathbf{q}}(\tau) = e^{\tau H_{^4\rm He}}\rho_{\mathbf{q}}e^{-\tau H_{^4\rm He}}.$$

У наближенні "однієї суми за хвильовим вектором" (наближення RPA), усереднення в (5) можна провести так:

$$\left\langle T\exp\left(-\int_0^\beta d\tau \widetilde{H}_{int}(\tau)\right)\right\rangle_{^4\rm He} = e^{(M_1+M_2+\ldots)},$$

тут

$$M_1 = -\int_0^\beta d\tau \left\langle \widetilde{H}_{\rm int}(\tau)\right\rangle_{^4\rm He},$$

$$M_2 = \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \left\langle \widetilde{H}_{\rm int}(\tau_1)\widetilde{H}_{\rm int}(\tau_2)\right\rangle_{^4\rm He} - \frac{1}{2}M_1^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

— так звані незвідні середні.

У зв'язку з трансляційною інваріантністю рідкого ^{4}He, середнє $\langle\rho_{\mathbf{q}}(\tau)\rangle_{^4\rm He} = 0$, тому

$$M_1 = -\beta\frac{N}{V}\nu_0,$$

$$\langle\rho_{\mathbf{q}_1}(\tau_1)\rho_{\mathbf{q}_2}(\tau_2)\rangle_{^4\rm He} = \delta(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2)\,\langle\rho_{\mathbf{q}_1}(\tau_1)\rho_{-\mathbf{q}_1}(\tau_2)\rangle_{^4\rm He}.$$

Отже, для M_2 отримуємо

$$M_2 = \frac{N}{V^2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\nu_q^2 \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}(\tau_1)}e^{-i\mathbf{q}\mathbf{R}(\tau_2)}$$
$$\times\,\langle\rho_{\mathbf{q}}(\tau_1)\rho_{-\mathbf{q}}(\tau_2)\rangle_{^4\rm He}.$$

Далі, ураховуючи, що

$$e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}(\tau)} = e^{-\tau\frac{\hbar^2q^2}{2M}}e^{\tau\frac{\hbar}{M}\mathbf{q}\mathbf{P}}e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}},$$

після нескладних перетворень будемо мати

$$M_2 = \frac{N}{V^2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\nu_q^2 \int_0^\beta d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \;\; e^{-\tau_2\left(\frac{\hbar^2q^2}{2M}+\frac{\hbar}{M}\mathbf{q}\mathbf{P}\right)}$$
$$\times\,\langle\rho_{\mathbf{q}}(\tau_2)\rho_{-\mathbf{q}}(0)\rangle_{^4\rm He}.$$

Як і треба було очікувати, $H_{\rm eff}$ залежить лише від імпульсу домішкового атома; отже власними функціями $H_{\rm eff}$ є плоскі хвилі. Що більше, ця обставина дозволяє легко отримати явний вираз для $H_{\rm eff}$:

$$H_{\rm eff}(\beta) = U_{^4\rm He}(\beta) + \frac{N}{V}\nu_0 + \frac{\mathbf{P}^2}{2M} - \frac{\partial}{\partial\beta}M_2(\beta),$$

$U_{^4\rm He}(\beta)$ — внутрішня енерґія рідкого ^{4}He.

У прийнятому наближенні середнє, що входить до складу M_2, обчислити просто (див., наприклад, [25]):

$$\langle\rho_{\mathbf{q}}(\tau)\rho_{-\mathbf{q}}\rangle_{^4\rm He} = \frac{1}{\alpha_q}\left[e^{\tau E_q}n_q(\beta) + e^{-\tau E_q}(n_q(\beta)+1)\right],$$

тут ми дотримуємося звичних позначень [24]: m — маса атома ^{4}He, E_q — спектр збуджень рідини, n_q — числа заповнення:

$$\alpha_q = \sqrt{1+\frac{2N}{V}\nu_q\Big/\frac{\hbar^2q^2}{2m}},$$

$$E_q = \frac{\hbar^2q^2}{2m}\alpha_q,$$

$$n_q(\beta) = \frac{1}{e^{\beta E_q}-1}.$$

Провівши нескладні перетворення, дістаємо

$$H_{\rm eff}(\beta) = U_{^4\rm He}(\beta) + \frac{N}{V}\nu_0 + \frac{\mathbf{P}^2}{2M} - \frac{N}{V^2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\nu_q^2}{\alpha_q}\left\{\frac{E_qn_q(n_q+1)}{(w(\mathbf{q})-E_q)^2} + \frac{E_qn_q(n_q+1)}{(w(\mathbf{q})+E_q)^2} - \beta\frac{E_qn_q(n_q+1)}{w(\mathbf{q})-E_q} - \beta\frac{E_qn_q(n_q+1)}{w(\mathbf{q})+E_q}\right.$$
$$\left. + \frac{n_q}{w(\mathbf{q})-E_q} + \frac{n_q+1}{w(\mathbf{q})+E_q} - e^{-\beta w(\mathbf{q})}\left[\frac{E_qn_q(n_q+1)}{(w(\mathbf{q})-E_q)^2} + \frac{E_qn_q(n_q+1)}{(w(\mathbf{q})+E_q)^2} + \frac{w(\mathbf{q})(n_q+1)}{(w(\mathbf{q})-E_q)^2} + \frac{w(\mathbf{q})n_q}{(w(\mathbf{q})+E_q)^2}\right]\right\},$$

де, для скорочення записів, уведено позначення

$$w(\mathbf{q}) = \frac{\hbar^2q^2}{2M} + \frac{\hbar}{M}\mathbf{q}\mathbf{P}.$$

У випадку $T = 0$ наведений вираз для спектра домішки збігається з результатами розрахунків останнього методом теорії збурень у наближенні хаотичних фаз

$$H_{\text{eff}}(\beta) = E^0_{^4\text{He}} + \frac{N}{V}\nu_0 + \frac{\mathbf{P}^2}{2M} - \frac{N}{V^2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\nu_q^2}{\alpha_q}\frac{1}{w(\mathbf{q}) + E_q}.$$

III. ЕФЕКТИВНА МАСА

Розрахований вище спектр домішки при малих імпульсах, як і повинно бути, квадратично залежить від $\mathbf{P}$. Ефективна маса виявляється залежною від температури

$$\frac{M}{M^*(\beta)} = \frac{M}{M_0^*} + \Delta(T), \tag{6}$$

тут M_0^* — ефективна маса при $T = 0$ [26],

$$\frac{M}{M_0^*} = 1 - \frac{4}{3}\frac{N}{V^2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\nu_q^2\varepsilon_q}{\alpha_q(E_q+\varepsilon_q)^3}, \quad \varepsilon_q = \frac{\hbar^2 q^2}{2M}, \tag{7}$$

$\Delta(T)$ — температурна добавка, явний вигляд якої є таким:

$$\begin{aligned}
\Delta(T) = &-\frac{4}{3}\frac{N}{V^2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\nu_q^2}{\alpha_q}\varepsilon_q\left\{n_q(1-\beta E_q(n_q+1))\left(\frac{1}{(\varepsilon_q-E_q)^3}+\frac{1}{(\varepsilon_q+E_q)^3}\right)\right.\\
&\left.+\,3E_q n_q(n_q+1)\left(\frac{1}{(\varepsilon_q-E_q)^4}+\frac{1}{(\varepsilon_q+E_q)^4}\right)\right\} + \frac{4}{3}\frac{N}{V^2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\nu_q^2}{\alpha_q}e^{-\beta\varepsilon_q}\varepsilon_q\left\{\frac{\beta^2}{2}\left[\varepsilon_q\left(\frac{n_q+1}{(\varepsilon_q-E_q)^2}+\frac{n_q}{(\varepsilon_q+E_q)^2}\right)\right.\right.\\
&\left.+\,E_q n_q(n_q+1)\left(\frac{1}{(\varepsilon_q-E_q)^2}+\frac{1}{(\varepsilon_q+E_q)^2}\right)\right] - \beta\left[\frac{n_q+1}{(\varepsilon_q-E_q)^2}+\frac{n_q}{(\varepsilon_q+E_q)^2} - 2\varepsilon_q\left(\frac{n_q+1}{(\varepsilon_q-E_q)^3}+\frac{n_q}{(\varepsilon_q+E_q)^3}\right)\right.\\
&\left.-\,2E_q n_q(n_q+1)\left(\frac{1}{(\varepsilon_q-E_q)^3}+\frac{1}{(\varepsilon_q+E_q)^3}\right)\right] + 3\varepsilon_q\left(\frac{n_q+1}{(\varepsilon_q-E_q)^4}+\frac{n_q}{(\varepsilon_q+E_q)^4}\right) - 2\left(\frac{n_q+1}{(\varepsilon_q-E_q)^3}+\frac{n_q}{(\varepsilon_q+E_q)^3}\right)\\
&\left.+\,3E_q n_q(n_q+1)\left(\frac{1}{(\varepsilon_q-E_q)^4}+\frac{1}{(\varepsilon_q+E_q)^4}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

У границі $\beta \to \infty$ $(T \to 0)$ основний внесок дають, мабуть, доданки з малими q; при $q \to 0$ поведінка величин, що входять до складу Δ, є такою

$$\begin{aligned}
&\nu_q = \nu_0 + O(q^2), \quad \nu_0 = \frac{mc^2}{\rho},\\
&E_q = \hbar c q,\\
&\frac{1}{\alpha_q} = \frac{\hbar q}{2mc},
\end{aligned} \tag{8}$$

c — швидкість першого звуку в рідкому ^{4}He.

Випишемо ведучі доданки при $\beta \to \infty$ $(T \to 0)$

$$\Delta(T\to 0) = \frac{4}{3}\frac{N}{V^2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\nu_q^2}{\alpha_q}e^{-\beta\varepsilon_q}\varepsilon_q\left[\left(\frac{\beta^2}{2}\varepsilon_q - \beta\right)\frac{1}{(\varepsilon_q-E_q)^2} + 2\left(\beta\varepsilon_q - 1\right)\frac{1}{(\varepsilon_q-E_q)^3}\right].$$

Від суми за q перейдемо до інтеґрування за відомим правилом

$$\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\ldots \to \frac{V}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{q}\ldots \quad ,$$

скористаємось наведеними вище розкладами (8) і матимемо (з точністтю до величин порядку $T^{5/2}$)

$$\Delta(T\to 0) = \frac{2}{3\pi^2}\nu_0^2\frac{N}{V}\int_0^\infty dqq^2\frac{\hbar q}{2mc}e^{-\beta\varepsilon_q}\varepsilon_q\left[\left(\frac{\beta^2}{2}\varepsilon_q-\beta\right)\frac{1}{(\varepsilon_q-\hbar cq)^2}+2\left(\beta\varepsilon_q-1\right)\frac{1}{(\varepsilon_q-\hbar cq)^3}\right]$$

$$=\left|\sqrt{\beta}q\to q\right| = \frac{2}{3\pi^2}\nu_0^2\frac{N}{V}\int_0^\infty dqq^2\frac{\hbar q}{2mc}e^{-\varepsilon_q}\varepsilon_q\left[\frac{1}{\beta}\left(\frac{\varepsilon_q}{2}-1\right)\frac{1}{\left(\hbar cq-\varepsilon_q/\sqrt{\beta}\right)^2}-2\beta^{-3/2}\frac{\varepsilon_q-1}{\hbar^3q^3c^3}\right].$$

Після обчислення інтеґралів отримуємо

$$\Delta(T\to 0) = \frac{2}{3\pi^2}\nu_0^2\frac{N}{V}\beta^{-3/2}\int_0^\infty dqq^2\frac{\hbar q}{2mc}e^{-\varepsilon_q}\varepsilon_q\frac{\varepsilon_q^2-4\varepsilon_q+2}{\hbar^3c^3q^3} \tag{9}$$

$$=\frac{m}{6\pi^2\rho}\frac{\sqrt{2M}}{\hbar^3}\beta^{-3/2}\left[\Gamma(7/2)-4\,\Gamma(5/2)+2\,\Gamma(3/2)\right] = -\frac{m\sqrt{2M}}{48\pi^{3/2}\rho\hbar^3}\beta^{-3/2}.$$

Зробимо чисельну оцінку. Для нормальної густини ^{4}He $\rho = 0.02185$ Å^{-3} і температури в градусах Кельвіна

$$\Delta(T) = -0.0050\,T^{3/2} + O(\beta^{-5/2}).$$

Для порівняння з експериментальними результатами, у прийнятих нами наближеннях зручно застосовувати таке співвідношення:

$$\frac{M^*(T)}{M} = \frac{M_0^*}{M} - \left(\frac{M_0^*}{M}\right)^2\Delta(T) + O(T^{5/2}). \tag{10}$$

Використовуючи для M_0^*/M значення з [4], будемо мати

$$\frac{M^*(T)}{M} = \frac{M_0^*}{M} + 0.023\,T^{3/2}.$$

На завершення наводимо в таблиці порівняння експериментальних значень [1] приросту відношення M^*/M із зростанням температури (вимірювання проведені при концентрації $x = 0.143$ ^{3}He в рідкому ^{4}He) з результатом, який дає наша теорія.

T, K	0.03	0.06	0.1	0.2	0.4	0.6
$\left(\frac{M^*(T)-M_0^*}{M}\right)_{\text{експ.}}$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01
$\left(\frac{M^*(T)-M_0^*}{M}\right)_{\text{теор.}}$	0.000	0.000	0.001	0.002	0.006	0.011

[1] Б. Н. Есельсон, В. Г. Иванцов, В. А. Коваль, Э. Я. Рудавский, И. А. Сербин, *Свойства жидкого и твердого гелия* (Наукова думка, Київ 1982).
[2] Л. Д. Ландау, И. Померанчук, Докл. Акад. Наук СССР **59**, 669 (1948).
[3] S. Yorozu, H. Fukuyama, H. Ishimoto, Phys. Rev. B **48**, 9660 (1993).
[4] R. Simmons, R. M. Mueller, Czech. J. Phys. Suppl. **46**, 201 (1996).
[5] T. B. Davison, E. Feenberg, Phys. Rev. **178**, 306 (1969).
[6] Н. Н. Боголюбов, Изв. АН СССР, сер. физ. **II**, 77 (1947).
[7] J. Bardeen, G. Baym, D. Pines, Phys. Rev. **156**, 207 (1967).
[8] В. А. Слюсарев, М. А. Стржемечний, Укр. фіз. журн. **14**, 453 (1969).
[9] C.–W. Woo, H.–T. Tan, W. E. Massey, Phys. Rev. Lett. **22**, 278 (1969).

[10] C.–W. Woo, H.–T. Tan, W. E. Massey, Phys. Rev. **185**, 287 (1969).
[11] W. E. Massey, C.–W. Woo, Phys. Rev. **164**, 256 (1967).
[12] J. C. Owen, Phys. Rev. B **23**, 5815 (1981).
[13] R. P. Feynman, M. Cohen, Phys. Rev. **102**, 1189 (1956).
[14] W. Gotze, Lucke M. Szprynger. Preprint Max–Planck–Institut für Physik und Astrophysik, München, (1979).
[15] I. O. Vakarchuk, in: *The impurity energy spectrum in liquids. International school on the Physics of ionic solution. Lviv, May, 30–June, 5, 1983, Abstracts* (Kiev, 1983), p. 31–32.
[16] A. Fabrocini, S. Fantoni, S. Rosati, A. Polls, Phys. Rev. B **33**, 6057 (1986).
[17] R. A. Aziz, V. P. S. Nain, J. S. Carley, W. L. Taylor, G. T. McConville, J. Chem. Phys. **70**, 4430 (1979).
[18] I. O. Vakarchuk, V. V. Babin, Cond. Matt. Phys. (Lviv) **1**, 161 (1998).
[19] E. C. Svensson, V. F. Sears, A. D. B. Woods, P. Martel, Phys. Rev. B **21**, 8 (1980).
[20] M. Boninsegni, D. M. Ceperley, Phys. Rev. Lett **74**, 2288 (1995).
[21] J. Boronat, J. Casulleras, preprint cond–mat/9807273 (1998).
[22] Э. А. Пашицкий, ФНТ **25**, 115 (1999).
[23] R. A. Sherlock, D. O. Edwards, Phys. Rev. B **8**, 2744 (1973).
[24] Н. Н. Боголюбов, Д. Н. Зубарев, Журн. эксп. теор. физ. **28**, 129 (1955).
[25] Н. Н. Боголюбов, *Лекції з квантової статистики. Питання статистичної механіки квантових систем* (Радянська школа, Київ 1949).
[26] І. О. Вакарчук, Журн. фіз. досл. **1**, 25 (1996).

LOW–TEMPERATURE ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF THE IMPURITY EFFECTIVE MASS IN SURERFLUID ^{4}He

I. O. Vakarchuk, V. V. Babin
Ivan Franko National University of Lviv,
12 Drahomanov Str., Lviv, UA–79005, Ukraine

The effective impurity Hamiltonian is built using the full statistic operator of the “superfluid ^{4}He + ^{3}He–impurity” system which is averaged over liquid ^{4}He states. The eigenvalues of this Hamiltonian are treated as the impurity spectrum at $T \neq 0$. The effective mass of the impurity atom is calculated in a “one sum over wave vector” approximation. The low–temperature asymptotic behaviour of the effective mass is considered.