ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 3, № 4 (1999) с. 391–398

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 3, No. 4 (1999) p. 391–398

ОРБІТНА СТРУКТУРА СКІНЧЕННОЗОННОГО СЕКТОРА СИСТЕМИ РІВНЯННЯ ТОДИ ТА РІВНЯНЬ ТИПУ КдВ (МКдВ)

П. І. Голод[1,2], О. В. Кісілевич[3]

[1] *Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України, відділ математичних методів у теоретичній фізиці, вул. Метрологічна, 14б, Київ, 03143, Україна*

[2] *Національний університет "Києво–Могилянська Академія", кафедра фізико–математичних наук вул. Г. Сковороди, 2, Київ, 04070, Україна*

[3] *Львівська комерційна академія, кафедра вищої математики і статистики, вул. У. Самчука, 11, Львів, 79011, Україна*

(Отримано 29 квітня 1999 р.; в остаточному вигляді — 27 грудня 1999 р.)

Реалізовано фазові простори ієрархії вищих стаціонарних рівнянь, які належать до класу калібрувальної еквівалентности рівняння Тоди, на орбітах ко–приєднаної дії деяких підалґебр в алґебрі петель $sl(n,\mathbb{R}) \otimes P(\lambda, \lambda^{-1})$. Самі ж рівняння подано у вигляді інтеґровних рівнянь Ейлера–Арнольда. Установлені зв'язки між динамічними змінними різних калібрувально–еквівалентних рівнянь узагальнюють відоме перетворення Міури.

Ключові слова: рівняння Тоди, інтеґровні гамільтонові системи, алґебра петель.

PACS number(s): 02.30.Jr

I. ВСТУП

Рівняння Ліувілля $\varphi_{tt} \pm \varphi_{xx} = ke^{\varphi}$ (як еліптична, так і гіперболічна версії) та його багатокомпонентне узагальнення у вигляді системи рівнянь Тоди відіграють важливу роль у багатьох галузях фізики — від теорії плазми до квантової ґравітації [1–3]. Класичні дослідження А. Пуанкаре [4] щодо існування розв'язків із заданими особливостями складають основу теорії уніформізації ріманових поверхонь. У наш час ці результати застосовував О. Поляков до теорії квантових бозонних струн та двовимірної ґравітації [5]. Останніми роками інтерес до рівняння Ліувілля та системи рівнянь Тоди пожвавився у зв'язку з успіхами 2+1 вимірних топологічних теорій Черна–Саймонса. Як було показано [6, 7] в моделях, що описують взаємодію калібрувального поля Черна–Саймонса зі скалярним полем, при певних співвідношеннях між константами взаємодії статичні конфіґурації полів зі скінченною енерґією отримуються як розв'язки рівнянь Тоди (в найпростішому випадку абелевого поля Черна–Саймонса — як розв'язки рівняння Ліувілля). З математичної точки зору, поля Черна–Саймонса описують плоскі зв'язності векторних розшарувань над рімановими поверхнями. З огляду на це теорію Черна–Саймонса можна розглядати як розвиток проблеми уніформізації (від уніформізації ріманової поверхні до уніформізації векторних розшарувань на ній). Аналітичним апаратом цієї теорії є рівняння Тоди та рівняння нульової кривини, яке з ним асоціюється [3, 8].

Ієрархія рівнянь Тоди належить до одного й того ж класу калібрувальної еквівалентности, що й рівняння n–КдВ [9]. У цьому класі є й інші представники, зокрема модифіковане та частково модифіковані рівняння КдВ [10]. Тут під рівняннями "типу КдВ" розуміється ієрархія інтеґровних рівнянь, які мають представлення у формі Лакса:

$$\frac{\partial L}{\partial \tau_p} = \left[L, L_t^{\frac{p}{n}}\right],$$

де $L = \partial^n + W_{n-2}(x)\partial^{n-2} + \dots + W_0(x)$ — лінійний диференціяльний оператор порядку n, $\partial \equiv \dfrac{\partial}{\partial x}$, $L_t^{\frac{p}{n}}$ — диференціяльна частина псевдодиференціяльного символу $L^{\frac{p}{n}}$ (дробовий степінь оператора L). Очевидно, нетривіяльні рівняння виникають тоді, коли цілі числа p і n взаємно прості.

У цій праці ми реалізуємо фазові простори ієрархії вищих стаціонарних рівнянь, які належать до класу калібрувальної еквівалентности рівняння Тоди, на орбітах ко-приєднаної дії деяких підалґебр (фактор-алґебр) в алґебрі петель $sl(n,\mathbb{R}) \otimes P(\lambda, \lambda^{-1})$; самі ж рівняння подано у вигляді інтеґровних рівнянь Ейлера-Арнольда. Установлені зв'язки між динамічними змінними різних калібрувально-еквівалентних рівнянь узагальнюють відоме перетворення Міури.

Вибір того чи іншого представника в класі калібрувальної еквівалентости означає вибір відповідних динамічних змінних, а отже, і вибір гамільтонової структури (дужка Пуассона), відповідно до якої здійснюється квантування.

II. ОРБІТНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ФАЗОВОГО ПРОСТОРУ ВИЩИХ СТАЦІОНАРНИХ РІВНЯНЬ ТОДИ

Система нелінійних рівнянь вигляду

$$\varphi^i_{tt} - \varphi^i_{xx} = \exp(\varphi^{i+1} - \varphi^i) - \exp(\varphi^i - \varphi^{i+1}) \qquad (1)$$

узагальнює на два виміри інтеґровну динамічну систему, відому під назвою ланцюжка Тоди [11, 12]. Нас цікавитиме випадок скінченної кількости полів $\varphi^i(t,x)$, тобто $i=1,2,\ldots,n$. У цьому випадку розрізняють періодичну (афінну) та неперіодичну системи Тоди. У періодичному випадку покладають $\varphi^{n+1}=\varphi^1$, і тоді рівняння (1) можна переписати у вигляді

$$u^i_{tt}-u^i_{xx}=\sum_{j=1}^{n}K_{ij}\exp(-u^j), \tag{2}$$

де $u^i=\varphi^i-\varphi^{i+1}$, а K_{ij} — афінна матриця Картана алґебри $sl(n)$.

Надалі ми обмежимось випадком $n=3$. Випадок $n=2$ добре вивчений [13, 14]. Рівняння (1) при $n=2$ — це рівняння sh(sin)-Gordon. Аналогом неперіодичної системи Тоди є рівняння Ліувілля. Інші представники калібрувально-еквівалентного класу — це рівняння МКдВ та рівняння КдВ.

Фіксуємо в алґебрі $\mathbf{g}=gl(3)\otimes P(\lambda,\lambda^{-1})$ *основне* ґрадуювання. Однорідні елементи стосовно такого ґрадуювання будуть власними векторами оператора ґрадуювання

$$d=3\lambda\frac{d}{d\lambda}+ad\begin{bmatrix}1&&\\&0&\\&&-1\end{bmatrix}. \tag{3}$$

Якщо $H_1=E_{11}$, $H_2=E_{22}$, $H_3=E_{33}$, $X_1=E_{12}$, $X_2=E_{23}$, $X_3=E_{13}$, $Y_i=X_i^T$, $i=1,2,3$ — стандартний базис у $gl(3)$, то базис у $\mathbf{g}=gl(3)\otimes P(\lambda,\lambda^{-1})$, однорідний стосовно оператора (3), матиме вигляд:

$$X_i^{3m}=\lambda^m H_i,\quad X_{1,2}^{3m+1}=\lambda^m X_{1,2},\quad X_3^{3m+2}=\lambda X_3,$$
$$Y_{1,2}^{3m-1}=\lambda^m Y_{1,2},\quad Y_3^{3m-2}=\lambda^m Y_3,\quad m\in Z. \tag{4}$$

Верхній індекс базисних елементів указує на ступінь їхньої однорідности.

Розіб'ємо алґебру $\mathbf{g}$ на суму двох підалґебр:

$$\mathbf{g}=\mathbf{g}_+ + \mathbf{g}_-,\quad \mathbf{g}_+=\sum_{m\geq 0}\mathbf{g}_m,\quad \mathbf{g}_-=\sum_{m\leq -1}\mathbf{g}_m,$$

де $\mathbf{g}_m$ — власні підпростори оператора d.

На $\mathbf{g}$ означена сім'я ad-інваріянтних білінійних форм. Якщо $A,B\in\mathbf{g}$, то покладемо

$$\langle A,B\rangle_k=\operatorname{res}\lambda^{-k-1}\operatorname{Tr}A{\cdot}B, \tag{5}$$

Нас цікавитимуть білінійні форми при $k=-1$ та $k=N>0$. При $k=-1$ спряжений до підалґебри $\mathbf{g}_-$ простір можна реалізувати у вигляді:

$$(\mathbf{g}_-)^*=\mathbf{g}_+\oplus\mathbf{g}_{-1}\oplus\mathbf{g}_{-2}. \tag{6}$$

При $k=N\geq 0$ спряжений до підалґебри $\mathbf{g}_+$ підпростір матиме вигляд

$$(\mathbf{g}_+)^*=\mathbf{g}_-\oplus\sum_{m=0}^{3N}\mathbf{g}_m.$$

Позначимо через M^{3N} підпростір у $\mathbf{g}$, елементи якого мають вигляд:

$$\mu(\lambda)=\begin{bmatrix}\alpha_1(\lambda)&\beta_1(\lambda)&\beta_3(\lambda)\\\gamma_1(\lambda)&\alpha_2(\lambda)&\beta_2(\lambda)\\\gamma_3(\lambda)&\gamma_2(\lambda)&\alpha_3(\lambda)\end{bmatrix},$$

де

$$\alpha_i(\lambda)=\sum_{m=0}^{N}\lambda^m\alpha_i^{3m},\quad i=1,2,3,$$

$$\beta_i(\lambda)=\sum_{m=-1}^{N-1}\lambda^m\beta_i^{3m+1},\quad \gamma_i(\lambda)=\sum_{m=0}^{N}\lambda^m\gamma_i^{3m-1},\quad i=1,2,$$

$$\beta_3(\lambda)=\sum_{m=-1}^{N-1}\lambda^m\beta_3^{3m+2},\quad \gamma_3(\lambda)=\sum_{m=0}^{N}\lambda^m\gamma_3^{3m-2}.$$

Легко бачити, що підпростір M^{3N} є інваріянтним підпростором ко-приєднаної дії підалґебри $\mathbf{g}_+$.

Означимо на M^{3N} дужку Лі-Пуассона:

$$\{f_1,f_2\}_N=\langle\hat\mu(\lambda),[\nabla_+f_1,\nabla_+f_2]\rangle_N, \tag{7}$$

де ∇_+f — ґрадієнт функції f зі значеннями в алґебрі $\mathbf{g}_+$.

При його обчисленні слід мати на увазі, що

$$\alpha_i^{3m}=\langle\mu,H_i^{3N-3m}\rangle_N,\quad i=1,2,3,$$
$$\beta_i^{3m+1}=\langle\mu,Y_i^{3N-3m-1}\rangle_N,\quad \gamma_i^{3m+2}=\langle\mu,X_i^{3N-3m-2}\rangle_N,\quad i=1,2,$$
$$\gamma_3^{3m+1}=\langle\mu,X_i^{3N-3m-1}\rangle_N,\quad \beta_3^{3m+2}=\langle\mu,X_i^{3N-3m-2}\rangle_N.$$

Побудуємо набори функцій на многовиді M^{3N}, які попарно комутують стосовно дужки (7). Такими функціями будуть коефіцієнти розкладу за степенями λ ad-інваріянтних функцій Казимира [15]:

$$h(\lambda) = \frac{1}{2} Tr \left(\mu(\lambda) + \lambda^N (a\Lambda + b\Lambda^2)\right)^2 ,$$

$$f(\lambda) = \frac{1}{3} Tr \left(\mu(\lambda) + \lambda^m (a\Lambda + b\Lambda^2)\right)^3 ,$$

де

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b \text{ — довільні константи.}$$

Прості обрахунки дають:

$$\begin{aligned}
h_{-1} &= \gamma_1^{-1}\beta_1^{-2} + \gamma_2^{-1}\beta_2^{-2} + \gamma_3^{-2}\beta_3^{-1}, \\
h_0 &= \frac{1}{2}\left[(\alpha_1^0)^2 + (\alpha_2^0)^2 + (\alpha_3^0)^2\right] + \gamma_1^{-1}\beta_1^1 + \gamma_2^{-1}\beta_2^1 + \gamma_3^{-2}\beta_3^2, \\
h_1 &= \alpha_1^0\alpha_1^3 + \alpha_2^0\alpha_2^3 + \alpha_3^0\alpha_3^3 + \gamma_1^{-1}\beta_1^4 + \gamma_1^2\beta_1^1 + \gamma_1^5\beta_1^{-2} + \gamma_2^{-1}\beta_2^4 + \gamma_2^2\beta_2^1 + \gamma_2^5\beta_2^{-2} + \gamma_3^{-2}\beta_3^5 + \gamma_3^1\beta_3^2 + \gamma_3^4\beta_3^{-1}, \\
&\dots \\
h_{2N} &= \frac{1}{2}\left[(\alpha_1^{3N})^2 + (\alpha_2^{3N})^2 + (\alpha_3^{3N})^2\right] + a(\gamma_1^{3N-1} + \gamma_2^{3N-1} + \beta_3^{3N-1}) + b(\beta_1^{3N-2} + \beta_2^{3N-2} + \gamma_3^{3N-2}), \qquad (8) \\
h_{2N+1} &= ab; \\
f_{-2} &= \beta_1^{-2}\beta_2^{-2}\gamma_3^{-2}, \\
f_{-1} &= \gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}\beta_3^{-1} + \beta_1^{-2}\beta_2^{-2}\beta_3^1 + \beta_1^{-2}\beta_2^1\gamma_3^{-2} + \beta_1^1\beta_2^{-2}\gamma_3^{-2} + \alpha_1^0(\gamma_1^{-1}\beta_1^{-2} + \gamma_3^{-2}\beta_3^{-1}) \\
&+ \alpha_2^0(\gamma_1^{-1}\beta_1^{-2} + \gamma_2^{-1}\beta_2^{-2}) + \alpha_3^0(\gamma_2^{-1}\beta_2^{-2} + \gamma_3^{-2}\beta_3^{-1}), \\
&\dots \\
f_{3N+1} &= a^3 + b^2(\gamma_1^{3N-1} + \gamma_2^{3N-1} + \beta_3^{3N-1}) + ab(\alpha_1^{3N} + \alpha_2^{3N} + \alpha_3^{3N}), \\
f_{3N+2} &= b^3.
\end{aligned}$$

У цих формулах покладено:

$$\beta_1^{3N+1} = \beta_2^{3N+1} = \gamma_3^{3N+1} = a,$$

$$\gamma_1^{3N+2} = \gamma_2^{3N+2} = \beta_3^{3N+2} = b.$$

Як показано в [15], функції h_{-1}, $h_0, \ldots$, h_{N-1} та f_{-1}, $f_0, \ldots$, f_{N-1} є ануляторами дужки (7), а отже, сталими на орбітах ко-приєднаної дії підалґебри $\mathbf{g}_+$. Решта функцій ґенерують нетривіяльні гамільтонові потоки на орбітах.

Покладемо $\beta_1^{-2} = \beta_2^{-2} = \gamma_3^{-2} = 0$, $\alpha_1^{3m} + \alpha_2^{3m} + \alpha_3^{3m} = 0$, $m \in Z$. З явного вигляду дужки (7) очевидно, що ці умови зберігає будь-який гамільтонів потік. Покладемо також $a = 1$, $b = 0$. В обмеженому в такий спосіб просторі M^{3N} розглянемо орбіту ко-приєднаної підалґебри $\mathbf{g}_+$, яка проходить через точку

$$\hat{\mu}_0(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda^{-1} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (9)$$

і фіксується набором $2N + 1$ алґебричних рівнянь:

$$h_0 = c_0, \quad h_1 = c_1, \ \ldots, \ h_{N-1} = c_{N-1},$$

$$f_{-1} = 1, \quad f_0 = d_0, \ \ldots, \ f_{N-1} = d_{N-1}$$

(спеціяльний вибір константи $d_{-1} = 1$ не є суттєвим обмеженням загальности, а наслідком вибору початкової точки (9)). Позначимо відповідний алґебричний многовид через Or_+. Оскільки розмірність простору M^{3N} після зазначених вище обмежень дорівнює $8N+5$, то, очевидно,

$$\dim Or_+ = 6N + 4.$$

Зауважимо, що елемент $\hat{\mu}_0(\lambda)$ належить "основній" підалґебрі Картана в $\mathbf{g}_+$, а тому відповідну орбіту будемо називати *реґулярною*.

Виберемо функцію h_{2N} на роль гамільтоніяна і розглянемо на Or_+ гамільтонову систему

$$\frac{d\hat{\mu}(\lambda)}{d\tau_{2N}} = \{\hat{\mu}(\lambda), h_{2N}\} = [\nabla_+ h_{2N}, \hat{\mu}(\lambda)], \tag{10}$$

яка в координатах α_i^{3m}, $\beta_{1,2}^{3m+1}$, β_3^{3m+2}, $\gamma_{1,2}^{3m+2}$, γ_3^{3m+1} має вигляд

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \gamma_1^{-1}}{\partial \tau_{2N}} &= \gamma_1^{-1}(\alpha_2^{3N} - \alpha_1^{3N}),\\
\frac{\partial \gamma_2^{-1}}{\partial \tau_{2N}} &= \gamma_2^{-1}(\alpha_3^{3N} - \alpha_2^{3N}),\\
\frac{\partial \beta_3^{-1}}{\partial \tau_{2N}} &= \beta_3^{-1}(\alpha_1^{3N} - \alpha_3^{3N}),\\
&\dots\\
\frac{\partial \gamma_1^{3N-1}}{\partial \tau_{2N}} &= \gamma_3^{3N-2}\beta_2^{3N+1} - \gamma_3^{3N+1}\beta_2^{3N-2}\\
&\quad + \gamma_1^{3N-1}(\alpha_2^{3N} - \alpha_1^{3N}),\\
\frac{\partial \gamma_2^{3N-1}}{\partial \tau_{2N}} &= -\gamma_3^{3N-2}\beta_1^{3N+1} + \gamma_3^{3N+1}\beta_1^{3N-2}\\
&\quad + \gamma_1^{3N-1}(\alpha_3^{3N} - \alpha_2^{3N}),\\
\frac{\partial \beta_1^{3N-1}}{\partial \tau_{2N}} &= \beta_2^{3N-2}\beta_2^{3N+1} - \beta_1^{3N-2}\beta_2^{3N+1}\\
&\quad + \beta_3^{3N-1}(\alpha_1^{3N} - \alpha_3^{3N}),\\
\frac{\partial \alpha_1^{3N}}{\partial \tau_{2N}} &= \gamma_1^{3N-1}\beta_1^{3N+1} - \gamma_3^{3N+1}\beta_3^{3N-1},\\
\frac{\partial \alpha_2^{3N}}{\partial \tau_{2N}} &= -\gamma_1^{3N-1}\beta_1^{3N+1} + \gamma_2^{3N-1}\beta_2^{3N+1},\\
\frac{\partial \alpha_3^{3N}}{\partial \tau_{2N}} &= -\gamma_2^{3N-1}\beta_2^{3N+1} + \gamma_3^{3N+1}\beta_3^{3N-1}.
\end{aligned}$$

Гамільтонова система (10) інтеґровна за Ліувіллем. Справді, вона означена на многовиді розмірности $6N+4$ і її інтеґровність забезпечують інтеґрали h_N, $h_{N+1}, \dots, h_{2N}$, f_N, $f_{N+1}, \dots, f_{3N}$.

"Одягання" точки $\hat{\mu}_0(\lambda)$ з елементом $\exp(\varphi_1 H_1^0 + \varphi_2 H_2^0 + \varphi_3 H_3^0)$ параметризує змінні γ_1^{-1}, γ_2^{-1}, β_3^{-1}, а саме:

$$\gamma_1^{-1} = \mathrm{e}^{\varphi_2 - \varphi_1}, \quad \gamma_2^{-1} = \mathrm{e}^{\varphi_3 - \varphi_2}, \quad \beta_3^{-1} = \mathrm{e}^{\varphi_1 - \varphi_3}. \tag{11}$$

За цих умов з перших трьох рівнянь випливає:

$$\alpha_i^{3N} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \tau_{2N}}. \tag{12}$$

Структура рівнянь (10) відображає геометрію орбіти як векторного розшарування над груповим тором. Змінні φ_1, φ_2, φ_3 є параметрами бази; решта змінних — диференціяльними поліномами від них. Рівняння (10) переписані як рівняння з вищими похідними від змінних φ_1, φ_2, φ_3 збігаються з вищими стаціонарними рівняннями Тоди.

На траєкторіях системи (10) означимо гамільтонів потік з гамільтоніяном h_N:

$$\frac{\partial \hat{\mu}(\lambda)}{\partial \tau_N} = \{\hat{\mu}(\lambda), h_N\}_N.$$

Відповідні еволюційні рівняння будуть мати вигляд

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha_1^{3N}}{\partial \tau_N} &= -\gamma_1^{-1} + \beta_3^{-1},\\
\frac{\partial \alpha_2^{3N}}{\partial \tau_N} &= -\gamma_2^{-1} + \gamma_1^{-1},\\
\frac{\partial \alpha_3^{3N}}{\partial \tau_N} &= -\beta_3^{-1} + \gamma_2^{-1}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Якщо врахувати параметризацію (11) та співвідношення (12), то система (13) збіжиться з двомиризованими рівняннями Тоди, записаними в конусних змінних $\tau_{2N} = \dfrac{1}{2}(x+t)$, $\tau_N = \dfrac{1}{2}(x-t)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \tau_N \partial \tau_{2N}} &= \mathrm{e}^{\varphi_2 - \varphi_1} - \mathrm{e}^{\varphi_1 - \varphi_3},\\
\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \tau_N \partial \tau_{2N}} &= \mathrm{e}^{\varphi_1 - \varphi_2} - \mathrm{e}^{\varphi_2 - \varphi_1},\\
\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \tau_N \partial \tau_{2N}} &= \mathrm{e}^{\varphi_1 - \varphi_3} - \mathrm{e}^{\varphi_3 - \varphi_2}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Як показано в працях [13, 15], системи рівнянь породжені гамільтоніянами h_α, $\alpha \geq N$ (8) та дужкою (7), тільки записом відрізняються від гамільтонових рівнянь, породжених гамільтоніянами $h_{\alpha-N-1}$. Тому рівняння (13) можна записати у вигляді

$$\frac{d\hat{\mu}}{d\tau} = [\nabla_- h_{-1}, \mu]. \tag{15}$$

Сумісність рівнянь (10) та (15) означає, що

$$\frac{\partial \nabla_+ h_{2N}}{\partial \tau} - \frac{\partial \nabla_- h_{-1}}{\partial x} + [\nabla_+ h_{2N}, \nabla_- h_{-1}] = 0. \tag{16}$$

Оскільки

$$\nabla_+ h_{2N} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{3N} & 1 & 0 \\ 0 & \alpha_2^{3N} & 1 \\ \lambda & 0 & \alpha_3^{3N} \end{pmatrix},$$

$$\nabla_- h_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda^{-1}\beta_3^{-1} \\ \gamma_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

то бачимо, що умова сумісности (16) є представленням нульової кривини для системи Тоди.

Синґулярні орбіти та неперіодична система Тоди. Розглянемо орбіту підалґебри $\mathbf{g}_+$, яка проходить через точку

$$\hat{\mu}'_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для такої орбіти $f_{-1} = 0$. Гамільтонова система (10), звужена на цю орбіту, збіжиться з вищими стаціонарними рівняннями неперіодичної системи Тоди, а еволюційне рівняння (13) на траєкторіях стаціонарної системи — з рівняннями двомиризованої неперіодичної системи Тоди. У цьому легко переконатися безпосередніми обчисленнями.

III. НІЛЬПОТЕНТНІ ОРБІТИ ТА МОДИФІКОВАНІ РІВНЯННЯ ТИПУ КдВ

Фіксуємо підалґебру $\mathbf{g}_-$ і розглянемо її коприєднану дію в просторі $(\mathbf{g}_-)^* = \mathbf{g}_+ \oplus \mathbf{g}_{-1} \oplus \mathbf{g}_{-2}$. Підпростір M^{3N+2} залишається інваріянтним щодо коприєднаної дії підалгебри $\mathbf{g}_- = M^{3N} \oplus \mathbf{g}_{3N+1} \oplus \mathbf{g}_{3N+2}$.

Означимо на M^{3N+2} дужку Лі-Пуассона, про яку вже йшла мова

$$\{f_1, f_2\}_{-1} = \langle \hat{\mu}(\lambda), [\nabla_- f_1, \nabla_- f_2] \rangle_{-1}, \tag{17}$$

де $\nabla_- f$ — ґрадієнт функції f зі значеннями в $\mathbf{g}_-$. При його обчисленні слід ураховувати спряженість між координатами простору M^{3N+2} та базисними елементами алґебри $\mathbf{g}_-$:

$$\begin{aligned} &\alpha_i^{3m} = \langle \hat{\mu}, H_i^{-3(m+1)} \rangle_{-1}, \quad i = 1,2,3, \\ &\beta_i^{3m+1} = \langle \mu, Y_i^{-3m-4} \rangle_{-1}, \quad \gamma_i^{3m+2} = \langle \mu, X_i^{-3m-5} \rangle_{-1}, \quad i = 1,2, \\ &\gamma_3^{3m+1} = \langle \mu, X_3^{-3m-4} \rangle_{-1}, \quad \beta_3^{3m+2} = \langle \mu, Y_3^{-3m-5} \rangle_{-1}. \end{aligned} \tag{18}$$

Розглянемо орбіту алґебри $\mathbf{g}_-$, що проходить через точку

$$\hat{\mu}_0(\lambda) = \lambda^N \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & 0 \end{bmatrix} a. \tag{19}$$

Така орбіта (позначимо її через Or_-) фактично лежить у підпросторі $M^{3N} \subset M^{3N+2}$, який фіксується умовами:

$$\gamma_1^{3m+2} = \gamma_2^{3m+2} = \beta_3^{3m+2} = 0,$$
$$\beta_1^{3m+1} = \beta_2^{3m+1} = \gamma_3^{3m+1} = a.$$

Оскільки алґебра $\mathbf{g}_-$ є нільпотентною, її орбіти називатимемо нільпотентними.

Функції $h_N, h_{N+1}, \ldots, h_{2N}$, $f_{2N}, f_{2N+1}, \ldots, f_{3N}$ є ануляторами дужки (17), а отже, сталими на орбітах. Очевидно також, що $f_{3N+1} = a^3$. Решта функцій $h_{-1}, h_0, \ldots, h_{N-1}$, $f_{-2}, f_{-1}, \ldots, f_{2N-1}$ породжують нетривіяльні гамільтонові потоки, які, згідно з теоремою Ліувілля, є інтеґровними на Or_-. Справді, розмірність орбіти Or_- дорівнює $8(N+1) - 2(N+1) = 6(N+1)$, а кількість незалежних інтеґралів, які попарно комутують стосовно дужки (17) — $3(N+1)$, тобто дорівнює половині розмірности фазового простору.

Виберемо функцію h_{N-1} на роль гамільтоніяна і розглянемо на Or_- гамільтонову систему:

$$\frac{d\hat{\mu}(\lambda)}{d\tau_{N-1}} = \{\hat{\mu}(\lambda), h_{N-1}\}_{-1}.$$

У координатах (18) ця система має вигляд:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\beta_1^{3m-2}}{\partial x} &= (\alpha_1^{3N} - \alpha_2^{3N})\beta_1^{3m-2} - a(\alpha_1^{3(m-1)} - \alpha_2^{3(m-1)}),\\
\frac{\partial\beta_2^{3m-2}}{\partial x} &= (\alpha_2^{3N} - \alpha_3^{3N})\beta_2^{3m-2} - a(\alpha_2^{3(m-1)} - \alpha_3^{3(m-1)}),\\
\frac{\partial\gamma_3^{3m-2}}{\partial x} &= (\alpha_3^{3N} - \alpha_3^{3N})\gamma_3^{3m-2} - a(\alpha_3^{3(m-1)} - \alpha_1^{3(m-1)}),\\
\frac{\partial\gamma_1^{3m-1}}{\partial x} &= (\alpha_2^{3N} - \alpha_1^{3N})\gamma_1^{3m-1} - a(\beta_2^{3m-2)} - \gamma_3^{3m-2}),\\
\frac{\partial\gamma_2^{3m-1}}{\partial x} &= (\alpha_3^{3N} - \alpha_2^{3N})\gamma_2^{3m-1} - a(\gamma_3^{3m-2)} - \beta_1^{3m-2}),\\
\frac{\partial\beta_3^{3m-1}}{\partial x} &= (\alpha_1^{3N} - \alpha_3^{3N})\beta_3^{3m-1} - a(\beta_1^{3m-2)} - \beta_2^{3m-2}),\\
\frac{\partial\alpha_1^{3m}}{\partial x} &= a(\gamma_1^{3m-1)} - \beta_3^{3m-1}),\\
\frac{\partial\alpha_2^{3m}}{\partial x} &= a(\gamma_2^{3m-1)} - \gamma_1^{3m-1)}),\\
\frac{\partial\alpha_3^{3m}}{\partial x} &= a(\beta_3^{3m-1)} - \gamma_2^{3m-1)}),
\end{aligned} \tag{20}$$

Тут $m = 0, 1, \ldots, N$, $x = \tau_{N-1}$. Легко бачити, що система (20) збіжиться з системою (10), якщо покласти $\beta_1^{-2} = \beta_2^{-2} = \gamma_3^{-3} = 0$.

Із трьох останніх рівнянь та алґебричного співвідношення

$$h_{2N} = \frac{1}{2}\left[\left(\alpha_1^{3N}\right)^2 + \left(\alpha_2^{3N}\right)^2 + \left(\alpha_3^{3N}\right)^2\right] + \left(\gamma_1^{3N-1} + \gamma_2^{3N-1} + \beta_3^{3N-1}\right),$$

де покладено $a = 1$, знайдемо:

$$\begin{aligned}
\gamma_1^{3N-1} &= \frac{1}{3}\left(h_{2N} - \frac{1}{2}\left[\left(\alpha_1^{3N}\right)^2 + \left(\alpha_2^{3N}\right)^2 + \left(\alpha_3^{3N}\right)^2\right] + \frac{\partial\alpha_1^{3N}}{\partial x} - \frac{\partial\alpha_2^{3N}}{\partial x}\right),\\
\gamma_2^{3N-1} &= \frac{1}{3}\left(h_{2N} - \frac{1}{2}\left[\left(\alpha_1^{3N}\right)^2 + \left(\alpha_2^{3N}\right)^2 + \left(\alpha_3^{3N}\right)^2\right] + \frac{\partial\alpha_2^{3N}}{\partial x} - \frac{\partial\alpha_3^{3N}}{\partial x}\right),\\
\beta_3^{3N-1} &= \frac{1}{3}\left(h_{2N} - \frac{1}{2}\left[\left(\alpha_1^{3N}\right)^2 + \left(\alpha_2^{3N}\right)^2 + \left(\alpha_3^{3N}\right)^2\right] + \frac{\partial\alpha_3^{3N}}{\partial x} - \frac{\partial\alpha_1^{3N}}{\partial x}\right).
\end{aligned} \tag{21}$$

Використовуючи наступні три рівняння та алґебричне співвідношення

$$\begin{aligned}
f_{3N} = {}& \frac{1}{3}\left[\left(\alpha_1^{3N}\right)^3 + \left(\alpha_2^{3N}\right)^3 + \left(\alpha_3^{3N}\right)^3\right] + \alpha_1^{3N}\left(\gamma_1^{3N-1} + \gamma_3^{3N-1}\right)\\
& + \alpha_2^{3N}\left(\gamma_2^{3N-1} + \gamma_1^{3N-1}\right) + \alpha_3^{3N}\left(\beta_3^{3N-1} + \gamma_2^{3N-1}\right) + \left(\beta_1^{3N-2} + \beta_2^{3N-2} + \gamma_3^{3N-2}\right),
\end{aligned}$$

виразимо змінні β_1^{3N-2}, β_2^{3N-2}, γ_3^{3N-2} через змінні α_1^{3N}, α_2^{3N}, α_3^{3N} та похідні від них:

$$\beta_1^{3N-2}=\frac{1}{3}\left(f_{3N}-\frac{1}{3}\left(\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3\right)+\alpha_1(\alpha_2'-\alpha_3')+\alpha_2(\alpha_3'-\alpha_1')+\right.$$
$$\left.+\alpha_3(\alpha_1'-\alpha_2')+2\gamma_2'+2\gamma_2(\alpha_2-\alpha_3)+\gamma_1'+\gamma_1(\alpha_1-\alpha_2)\right),$$
$$\beta_2^{3N-2}=\frac{1}{3}\left(f_{3N}-\frac{1}{3}\left(\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3\right)+\alpha_1(\alpha_2'-\alpha_3')+\alpha_2(\alpha_3'-\alpha_1')+\right. \tag{22}$$
$$\left.+\alpha_3(\alpha_1'-\alpha_2')-\gamma_2'-\gamma_2(\alpha_2-\alpha_3)-2\gamma_1'-2\gamma_1(\alpha_1-\alpha_2)\right),$$
$$\gamma_3^{3N-2}=\frac{1}{3}\left(f_{3N}-\frac{1}{3}\left(\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3\right)\alpha_1(\alpha_2'-\alpha_3')+\alpha_2(\alpha_3'-\alpha_1')+\right.$$
$$\left.+\alpha_3(\alpha_1'-\alpha_2')-\gamma_2'-\gamma_2(\alpha_2-\alpha_3)+\gamma_1'+\gamma_1(\alpha_1-\alpha_2)\right), \tag{23}$$

Тут і надалі ми опускаємо верхній індекс у змінних, тобто покладаємо $\alpha_i^{3N}=\alpha_i$, $\gamma_i^{3N}=\gamma_i$. Окрім того, похідну $\dfrac{\partial}{\partial x}$ позначаємо через $(')$.

Продовживши цю індуктивну процедуру, тобто виразивши усі змінні через α_i, α_i', α_i'', ..., ми отримаємо, замість рівнянь першого порядку (20), три (а точніше два незалежні) рівняння порядку $3(N+1)$. Ці рівняння інтерпретуємо як вищі стаціонарні рівняння типу МКдВ. Формули (22), де змінні γ_i, γ_i' виражені через α_i та α_i', згідно з (21), узагальнюють відоме перетворення Міури.

Еволюційне рівняння МКдВ. На траєкторіях системи (20) означимо гамільтонів потік з гамільтоніяном h_{N-2}:

$$\frac{\partial\hat{\mu}(\lambda)}{\partial\tau}=-\{\hat{\mu}(\lambda),h_{N-2}\}_{-1}. \tag{24}$$

Рівняння (23) достатньо записати лише для змінних $\alpha_i^{3N}=\alpha_i$, оскільки решта змінних виражаються через них та їхні похідні:

$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial\tau}=a(\gamma_1^{3N-4}-\beta_3^{3N-4}),$$
$$\frac{\partial\alpha_2}{\partial\tau}=a(\gamma_2^{3N-4}-\gamma_1^{3N-4}), \tag{25}$$
$$\frac{\partial\alpha_3}{\partial\tau}=a(\beta_3^{3N-4}-\gamma_2^{3N-4}).$$

Порівнявши з формулами (20), бачимо, що систему (24) можна записати у вигляді:

$$\frac{\partial\alpha_i}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial x}\alpha_i^{3N-3},\quad i=1,\,2,\,3. \tag{26}$$

Рівняння (25) узагальнює рівняння МКдВ на випадок алґебр ранґу 2. Тут мається на увазі, що α_i^{3N-3} є диференціяльним поліномом від α_i та похідних до третього порядку включно. Очевидно, як записати аналогічне рівняння для алґебр $sl(n,\mathbb{R})$, тобто для алґебр серії A_{n-1} довільного ранґу, а також для інших серій.

IV. ВИСНОВКИ

Отже, ми встановили, що скінченнозонний сектор системи рівнянь Тоди є орбітою ко–приєднаної дії підалґебри $\mathbf{g}_+$ алгебри петель. Відповідний скінченнозонний сектор рівнянь МКдВ є орбітою підалґебри $\mathbf{g}_-$, яка утворює дуальну пару з підалґеброю $\mathbf{g}_+$. Перетин орбіт є спільним тором Ліувілля для цих рівнянь, на якому вони лінеаризуються. На спеціяльних (вироджених) орбітах реалізуються скінченнозонні фазові простори неперіодичної (розімкнутої) системи Тоди. Звуження на вироджені орбіти гамільтонових потоків, які пов'язані з ко–приєднаною дією $\mathbf{g}_-$, означає гамільтонову редукцію для них. З цієї точки зору наші результати можна інтерпретувати як редукцію Дрінфельда–Соколова у скінченнозонному секторі нелінійних інтеґровних рівнянь.

V. ПОДЯКА

Ця робота виконана при частковій підтримці Фундації цивільних досліджень та розвитку (CRDF grant UP1-309) та ґранту INTAS–97–1312. Автори висловлюють подяку ґрантодавцям.

[1] E. D'Hoker, R. Jackiw, Phys. Rev. D **26**, 3517 (1982).
[2] N. Seiberg, Progr. Theor. Phys. Suppl. No. 102, 319 (1990).
[3] E. Aldrovandi, L. Bonora, J. Geom. Phys. **14**, 63 (1994).
[4] H. Poincare, J. Math. Pure Appl., Ser. 5 **4**, 137 (1898); A. Пуанкаре, *Избранные труды. Т. III* (Москва, 1974), с. 235.
[5] A. M. Polyakov, Phys. Lett. B **103**, 207 (1981).
[6] R. Jackiw, So–Young Pi, Phys. Rev. D **42**, 3500 (1990).
[7] G. Dunne, R. Jackiw, So–Young Pi, C. Trugenberger, Phys. Rev. D **42**, 3488 (1990).
[8] E. Aldrovandi, G. Falqui, J. Geom. Phys. **15**, 62 (1995).
[9] В. Г. Дринфельд, В. В. Соколов, В сб.: *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новые направления. Т. 24.* (ВИНИТИ АН СССР, Москва, 1984), с. 81.
[10] M. F. De Groot, T. J. Hollowood, J. L. Meramontes, Commun. Math. Phys. **145**, 57 (1992).
[11] А. Н. Лезнов, М. В. Савельев, Функц. анализ и его прилож. **14**, 87 (1980).
[12] А. В. Михайлов, Письма журн. эксп. теор. физ. **30**, 443 (1979).
[13] П. И. Голод, *Гамильтоновы системы на орбитах афинных групп Ли и нелинейные интегрируемые уравнения. В сб.: Физика многочастичных систем. Вып. 7.* 1985, с. 30.
[14] П. И. Голод, С. З. Пакуляк, препринт ИТФ–87–26Р (Киев, 1987).
[15] P. Holod, O. Kisilevich, S. Kondratyuk, *The orbit structure for integrable higher stationary equations of homogeneous and principal hierarchics. Proceedings of the Second International Conference. "Symmetry in Nonlinear Math. Phys.", vol. 2* (Kyiv, 1997), p. 343.

ORBIT STRUCTURE OF FINITE ZONE SECTOR OF TODA EQUATION AND EQUATION OF THE KdV (MKdV) TYPE

P. I. Holod[1,2], O. V. Kisilevych[3]
[1] *Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, 14–b Metrolohichna Str., Kyiv, UA–03143, Ukraine*
[2] *The University "Kiev–Mohyla Academy", 2 Skovoroda Str., Kyiv, UA–04070, Ukraine*
[3] *Lviv Commercial Academy, 11 Samchuk Str., Lviv, UA–79011, Ukraine*

Phase spaces of higher stationary equations hierarchy which belong to gauge equivalence Toda equation class are realized on co–joining action orbits of some sub–algebras in loop–algebra $sl(n,\mathbb{R})\otimes P(\lambda,\lambda^{-1})$. The equations themselves are represented in the form of integrable Eyler–Arnold equations. Established relations between dynamic variables of different gauge–equivalent equations generalize the known Miura transformation.