ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 3, № 4 (1999) с. 399–408

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 3, No. 4 (1999) p. 399–408

РІВНЯННЯ ЛІУВІЛЯ ДЛЯ СИСТЕМ ІЗ В'ЯЗЯМИ

А. Дувіряк, А. Назаренко
Інститут фізики конденсованих систем НАН України,
вул. Свєнціцького, 1, Львів, 79011, Україна
(Отримано 7 червня 1999 р.)

Побудовано рівняння Ліувіля і функцію статистичного розподілу для класичних систем із в'язями. Одержані рівняння застосовуються до розгляду системи точкових електричних зарядів з електромагнетним полем.

Ключові слова: гамільтонова механіка з в'язями, рівняння Ліувіля, релятивістична статистична механіка.

PACS number(s): 03.30.+p, 11.30.Cp

I. ВСТУП

Метод Ґіббса [1,2,13] для обчислення термодинамічних функцій різних систем базується на стандартному гамільтоновому формулюванні їхньої динаміки. Для калібрувально–інваріянтних систем послідовнішим є нестандартний гамільтонів формалізм із в'язями. Саме він повинен служити основою для квантового та статистичного опису таких систем. Методи квантування в калібрувальних теоріях добре відомі в літературі [8,10,12,15]. Водночас статистичний опис таких систем розвинений лише фрагментарно. Загалом у літературі (див. [21,23]) будувалася рівноважна статистична механіка систем із в'язями на основі міри Фадєєва [15], запозиченої з методу континуального інтеґрування квантової теорії калібрувальних полів.

Наша робота присвячена аналізові особливостей статистичного опису систем з в'язями, зокрема із в'язями першого класу, які ґенерують калібрувальні перетворення. Розглянуто поняття статистичного ансамблю таких систем, функцію розподілу і виведено умови для неї, що узагальнюють рівняння Ліувіля.

Ці результати застосовуються для опису системи точкових заряджених частинок з електромагнетним полем. Опис вільного електромагнетного поля, а також поля, що взаємодіє з ферміонними полями в рамках формалізму з в'язями, є добре відомим (див. [10,12]). Він є основою для квантової електродинаміки. У фізиці плазми часто можна нехтувати процесами народження заряджених частинок, а систему таких частинок можна тлумачити як механічну систему з фіксованою кількістю ступенів вільности. Тому природно в статистичному описі розглядати саме точкові заряди у взаємодії з електромагнетним полем. Тут ми послідовно розвиваємо формулювання динаміки такої системи в рамках формалізму з в'язями, а також будуємо статистичний опис на основі одержаних загальних результатів.

II. ОГЛЯД ГАМІЛЬТОНОВОЇ МЕХАНІКИ З В'ЯЗЯМИ

Як правило, вихідним пунктом гамільтонової динаміки систем із в'язями [10] є нестандартний функціонал дії

$$S = \int L(q(\tau), \dot{q}(\tau)) d\tau, \tag{2.1}$$

де функція Лаґранжа L, на відміну від стандартного випадку, має вироджену матрицю Геса:

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right\| = 0, \quad \operatorname{rank} \left\| \frac{\partial^2 L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right\| = n - s. \tag{2.2}$$

Тут τ — параметр еволюції, $q_i(\tau)$ $(i = \overline{1,n})$ — динамічні змінні, $\dot{q}_i = dq_i/d\tau$.

Перехід до гамільтонового формулювання стандартним шляхом неможливий унаслідок того, що тільки n–s співвідношень з

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = \overline{1,n} \tag{2.3}$$

можуть бути обернені. Решта s співвідношень між канонічними змінними q, p називають *первинними в'язями.* Вимагаючи їх збереження упродовж еволюції, одержують співвідношення, які називають *вторинними в'язями.* Повну сукупність в'язей розбивають на два класи.

В'язями *другого класу* називають максимальне число в'язей $\phi_\xi(q,p) = 0$ $(\xi = \overline{1, 2\mu_1})$, які задовольняють умову:

$$\det \|\{\phi_\xi, \phi_\zeta\}\| \neq 0. \tag{2.4}$$

Тут $\{..., ...\}$ — стандартна дужка Пуассона на вихідному $2n$–вимірному фазовому просторі Γ.

В'язі $\chi_l(q,p) = 0$ $(l = \overline{1,\mu})$, що комутують (у сенсі дужки Пуассона) зі всією сукупністю в'язей:

$$\{\chi_l, \chi_m\} = \{\chi_l, \phi_\xi\} = 0, \; l,m = \overline{1,\mu}, \; \xi = \overline{1,2\mu_1}, \quad (2.5)$$

називають в'язями *першого класу*. При цьому достатньо, щоб умови (2.4)–(2.5) виконувались на обмеженому в'язями фазовому просторі.

В'язі, що належать до різних класів, відіграють суттєво різні ролі в динаміці гамільтонових систем.

В'язі другого класу, число яких у силу умови (2.4) завжди парне, ефективно зменшують число ступенів вільности.

В'язі першого класу приводять до неоднозначности в розв'язках рівнянь руху, які містять довільні функції (так звана калібрувальна свобода). Неоднозначність є наслідком існування μ канонічних перетворень, що ґенеруються функціями χ_l, за допомогою яких один частковий розв'язок може бути перетворений в інший. Щоб зафіксувати розв'язок, необхідно кожну в'язь першого класу доповнити калібрувальною в'яззю, що не комутує з нею (у сенсі дужки Пуассона).

Динамічні величини, що комутують із в'язями першого класу (у сенсі дужки Пуассона), називають фізичними (спостережуваними). Вони не залежать від вибору калібрувальних в'язей та належать до так званого фізичного сектора теорії [10]. Системи, що мають однаковий фізичний сектор, називатимемо фізично еквівалентними.

Таким чином, довільна гамільтонова система з в'язями, яка містить $2\mu_1$ в'язей другого класу та μ в'язей першого класу, а також передбачає накладання μ калібрувальних в'язей, в результаті містить $2m = 2(\mu_1 + \mu)$ в'язей другого класу. Ці в'язі визначають у Γ многовид, який є фактичним фазовим простором $\mathbf{M}$ системи. На ньому природно індукується симплектична структура, яка є обмеженням вихідної симплектичної структури на визначений в'язями многовид. Індукування симплектичної структури зручно здійснити за допомогою дужки Дірака [11].

Нехай $\{...,...\}$ — дужка Пуассона на Γ, Ψ_a $(a = \overline{1,2m})$ — сукупність усіх в'язей, у тому числі й калібрувальних, $\|C_{ab}^{-1}\|$ — матриця, обернена до $\|\{\Psi_a, \Psi_b\}\|$. Тоді на Γ означена білінійна диференційна операція — дужка Дірака:

$$\{A,B\}_{D(\Psi)} = \{A,B\} - \{A,\Psi_a\}C_{ab}\{\Psi_b,B\}, \qquad (2.6)$$

яка, крім відомих властивостей дужки Пуассона, має таку:

$$\{A,\Psi_a\}_{D(\Psi)} = 0, \quad a = \overline{1,2m}. \qquad (2.7)$$

Властивість (2.7) дозволяє безпосередньо використовувати при обчисленнях обмеження динамічних величин на $\mathbf{M}$.

III. РІВНЯННЯ ЛІУВІЛЯ ДЛЯ СИСТЕМ З В'ЯЗЯМИ

Нехай динамічна система у фазовому просторі Γ канонічних змінних $q = (q_i)$ та $p = (p_i)$ $(i = \overline{1,n})$ задається канонічним гамільтоніяном $H(q,p)$ і рівняннями в'язей першого класу, що не залежать явно від часу:

$$\chi_l(q,p) = 0, \quad l = \overline{1,\mu}. \qquad (3.1)$$

Рівняння руху цієї системи ґенеруються гамільтоніяном Дірака H_D,

$$\dot{q} = \{q, H_D\}, \; \dot{p} = \{p, H_D\}, \quad H_D = H + \lambda^l \chi_l, \; l = \overline{1,\mu}, \qquad (3.2)$$

де λ^l — невизначені множники Лаґранжа, серед яких незалежними є лише множники при первинних в'язях (решта виражаються через канонічні змінні, але також є невизначеними функціями часу).

Фізичний фазовий простір $\mathbf{M}$ системи будується як підмноговид, заданий у Γ в'язями (3.1), профакторизований за канонічними перетвореннями, що ґенеруються цими в'язями. Для його параметризації канонічними змінними здійснимо канонічне перетворення Шанмуґадхасана (див. [24]):

$$(q,p) \to (X,\Pi),$$

що трансформує вихідну систему функцій χ у систему нових канонічних імпульсів [10] $\Pi_l = \chi_l$. Тоді в'язі (3.1) набувають вигляду

$$P = (\Pi_l) = 0, \quad l = \overline{1,\mu}. \qquad (3.3)$$

Сукупність канонічних імпульсів P разом із спряженими координатами $Q = (X_l)$, тобто $\Omega = (Q,P)$, назвемо нефізичними змінними системи, а решту $2(n-\mu))$ змінних $\omega = (X_\alpha, \Pi_\alpha)$, $(\alpha = \overline{\mu+1,n})$ — фізичними змінними. У термінах цих змінних гамільтоніян Дірака H_D можна подати у вигляді (з точністю до неістотних членів другого та вищих порядків за P):

$$H_D = H^\Phi(\omega) + \lambda P,$$

де $H^\Phi(\omega)$ — фізичний гамільтоніян [10]. Еволюція системи в нових змінних описується рівняннями

$$\dot{\omega} = \{\omega, H^\Phi(\omega)\}, \quad P = 0, \quad \dot{Q} = \lambda. \qquad (3.4)$$

Системи, які відрізняються лише вибором функцій λ, будуть фізично еквівалентними.

Перейдемо до розгляду статистичного опису систем із в'язями.

Як відомо, основною задачею статистичної фізики є знаходження функції статистичного розподілу ρ, яка характеризує густину розподілу ймовірности у фазовому просторі та дозволяє обчислювати середні значення динамічних величин. Згідно з методом Ґіббса, що опирається на стандартну гамільтонову динаміку, розподіл фазових точок системи в різні моменти часу вважається рівноцінним розподілові фазових точок ансамблю еквівалентних систем у заданий момент часу. Результатом такого підходу є відоме рівняння Ліувіля для функції статистичного розподілу ρ [2].

Істотним у методі Ґіббса є факт, що еволюція системи описується канонічним перетворенням, яке зберігає фазовий об'єм. Це ж стосується і систем з в'язями. Тому статистичний ансамбль таких систем, означений аналогічно до стандартного випадку, володіє всіма властивостями, необхідними для використання методу Ґіббса. Наявність в'язей накладає лише обмеження на можливий вибір функцій розподілу, які ми розглядаємо далі.

Оскільки в'язі $P = 0$ зберігаються в часі, то середнє значення довільної функції $f(\omega, Q, P)$ за достатньо великий проміжок часу дорівнює середньому значенню функції на поверхні в'язей, тобто $f(\omega, Q, 0)$:

$$\bar{f} \equiv \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(\omega(\tau), Q(\tau), P(\tau))d\tau = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(\omega(\tau), Q(\tau), 0)d\tau. \qquad (3.5)$$

Згідно з методом Ґіббса, усереднення за часом замінимо усередненням за ансамблем, яке проводиться з функцією статистичного розподілу ρ, що задовольняє умову нормування

$$\int \rho(\omega, \Omega, \tau)d\omega d\Omega = 1. \qquad (3.6)$$

Тоді середнє $\bar{f}$ запишеться так:

$$\bar{f} = \int \rho(\omega, \Omega, \tau)f(\omega, Q, P)d\omega d\Omega = \int \rho(\omega, \Omega, \tau)f(\omega, Q, 0)d\omega d\Omega. \qquad (3.7)$$

З виразу (3.7) видно, що функція розподілу $\rho(\omega, \Omega, \tau)$ повинна містити δ-функцію Дірака від в'язей P, тобто

$$\rho(\omega, \Omega, \tau) = \rho^*(\omega, Q, \tau)\delta(P). \qquad (3.8)$$

Іншими словами, статистичний ансамбль системи з в'язями повинен бути зосереджений на поверхні в'язей у вихідному фазовому просторі.

Довільна функція на фазовому просторі, що відповідає фізичній (спостережуваній) величині, повинна бути калібрувально-інваріянтною і несинґулярною на поверхні в'язей. Тому її можна подати у вигляді:

$$A(\omega, P) = A^{\Phi}(\omega) + O(P), \qquad (3.9)$$

де $O(P)$ — деяка функція від P, яка обертається в нуль при $P = 0$. Тоді, враховуючи структуру виразів (3.8) і (3.9), середнє значення спостережуваної величини може бути зведено до середнього значення за фізичними змінними системи:

$$\bar{A} = \int A^{\Phi}(\omega)\rho^{\Phi}(\omega, \tau)d\omega, \qquad (3.10)$$

де

$$\rho^{\Phi}(\omega, \tau) = \int \rho^*(\omega, Q, \tau)dQ. \qquad (3.11)$$

Очевидно, що для фізично еквівалентних систем функція розподілу $\rho^{\Phi}(\omega, \tau)$ має однаковий вигляд та інваріянтна відносно вибору рівнянь для Q.

Оскільки згідно з теоремою Ліувіля елемент фізичного фазового об'єму $d\omega$ зберігається при канонічних перетвореннях, то функція статистичного розподілу ρ^{Φ} системи, як і у випадку теорії без в'язей, мусить бути інтеґралом руху і зберігати своє значення при інфінітезимальних (а отже, і скінченних) канонічних перетвореннях, породжених еволюцією:

$$\rho^{\Phi}(\omega + \delta\omega, \tau + \delta\tau) = \rho^{\Phi}(\omega, \tau). \qquad (3.12)$$

З рівняння (3.12) видно, що еволюція в часі функції розподілу пов'язана з еволюцією змінних ω, яка ґенерується фізичним гамільтоніяном H^{Φ}. Після розкладу лівої частини (3.12) у ряд Маклорена одержимо рівняння для ρ^{Φ}

$$\frac{\partial \rho^{\Phi}}{\partial \tau} + \{\rho^{\Phi}, H^{\Phi}\} = 0, \qquad (3.13)$$

що збігається з рівнянням Ліувіля стандартної теорії. Таким чином, уся фізична інформація про розподіл ансамблю однозначно задається функцією ρ^{Φ}. При цьому функція $\rho^*(\omega, Q, \tau)$ може містити довільність за рахунок неоднозначности змінних Q (рівняння для Q містять довільні функції λ) . Цю довільність можна усунути по–різному.

Можна вимагати, щоб функція розподілу ρ була калібрувально–інваріянтною величиною, тобто задовольняла умову

$$\{\rho, P\} = 0 \qquad (3.14)$$

або (у термінах довільних змінних)

$$\{\rho, \chi\} = 0. \tag{3.15}$$

Для цього досить покласти

$$\rho = \rho^{\Phi}(\omega, \tau)\delta(P). \tag{3.16}$$

Отже, функція розподілу (3.16) приписує однакову статистичну вагу фазовим точкам, що належать до однієї орбіти, ґенерованої калібрувальними перетвореннями. Усереднення спостережуваних величин за такими точками не змінює значень середніх, однак воно стає математично некоректним, якщо згадані орбіти є некомпактними.

У випадку некомпактних орбіт зручно відмовитися від усереднення вздовж них, зосередивши статистичну вагу в одній точці кожної орбіти. Це можна здійснити, перейшовши до фізично еквівалентної системи шляхом накладання калібрування

$$\phi^G(Q, \omega) = Q - K(\omega) = 0,$$

яке забезпечує сумісність рівнянь руху

$$\lambda(\omega, Q)|_{Q=K(\omega)} = \{K(\omega), H^{\Phi}(\omega)\}. \tag{3.17}$$

Тоді функцію розподілу відкаліброваної теорії (з калібрувальними в'язями) запишемо так:

$$\rho = \rho^{\Phi}(\omega, \tau)\delta(P)\delta[Q - K(\omega)]. \tag{3.18}$$

Але незалежно від того, яким чином ми доозначили залежність ρ від Q, функція статистичного розподілу в загальному нерівноважному випадку повинна задовольняти умови:

$$\Psi(\Gamma) = 0, \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \{\rho, H_D\} = 0, \tag{3.20}$$

$$\int \rho f(\Gamma) d\Gamma = \int \rho f(\Gamma)|_{\Psi=0} d\Gamma, \tag{3.21}$$

$$\int \rho d\Gamma = 1, \tag{3.22}$$

де $\Psi = 0$ — сукупність усіх в'язей системи, Γ — сукупність канонічних змінних, у термінах яких описується ця система. Для вихідної теорії $\Psi = \chi$ є в'язями першого класу, тоді як для відкаліброваної теорії $\Psi = (\chi, \phi^G)$ є в'язями другого класу.

У випадку відкаліброваної теорії (з в'язями другого класу) рівняння (3.20) можна записати, використовуючи дужку Дірака:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \{\rho, H\}_{D(\Psi)} = 0. \tag{3.23}$$

Якщо в'язі явно залежать від часу τ, то в рівнянні (3.23) похідну за τ необхідно замінити оператором [3]

$$\frac{\partial^* \cdot}{\partial \tau} = \frac{\partial \cdot}{\partial \tau} - \{\,\cdot\,, \Psi_a\} C_{ab} \frac{\partial \Psi_b}{\partial \tau}, \tag{3.24}$$

де $\|C_{ab}\|$ — матриця, обернена до $\|\{\Psi_a, \Psi_b\}\|$. Оператор повної похідної за часом для систем з в'язями, що залежать явно від часу, записується через модифіковану похідну (3.24) у вигляді

$$D_\tau = \frac{\partial \cdot}{\partial \tau} + \{\,\cdot\,, H\} - \{\,\cdot\,, \Psi_a\} C_{ab} \left\{ \frac{\partial \Psi_b}{\partial \tau} + \{\Psi_b, H\} \right\}. \tag{3.25}$$

Цей оператор анулює інтеґрали руху, у тому числі й функцію розподілу.

Розглянемо властивості функції статистичного розподілу в рівноважному випадку. Так, для канонічного ансамблю Ґіббса фізична функція розподілу в термінах змінних ω має вигляд

$$\rho^{\Phi} = \frac{1}{(2\pi)^k Z} e^{-\beta H^{\Phi}(\omega)}, \tag{3.26}$$

де $\omega = (\omega_i)$, $i = \overline{1, 2k}$, $\beta = 1/kT$, Z — статистична сума системи, яка є калібрувально–інваріянтною величиною і визначається з умови нормування:

$$\int \rho^{\Phi}(\omega) d\omega = 1. \tag{3.27}$$

Тоді, зокрема, співвідношення (3.18) в термінах вихідних змінних з урахуванням (3.26) набуде вигляду [15,21]

$$\rho = \frac{1}{(2\pi)^{n-\mu} Z}\, e^{-\beta H(q,p)}\, J\, \delta(\Psi),$$

$$\Psi = (\chi(q,p), \phi^G(q,p)) = 0, \tag{3.28}$$

де

$$J = \det \|\, \{\phi^G_i, \chi_j\}\, \|, \quad i, j = \overline{1, \mu},$$

$2n$ — число змінних (q,p), а 2μ — число в'язей Ψ. Вираз (3.28) збігається з відомими в літературі результатами стосовно функції статистичного розподілу для систем із в'язями першого класу за наявности додаткових калібрувальних умов $\phi^G = 0$ [21].

Зауважимо, що рівняння (3.19)-(3.22) застосовні і до теорій, у яких повна система в'язей другого класу Ψ виникла природним шляхом при переході від лаґранжевого до гамільтонового опису або внаслідок калібрування теорії з в'язями двох класів. Це зумовлено фактом, що для довільної системи в'язей другого класу завжди можна побудувати еквівалентну систему, половина в'язей якої буде комутувати між собою, як і у випадку в'язей $(\chi, \phi^G) = 0$ [10]. В усіх зазначених випадках досить покласти

$$J = \sqrt{\det \| \{\Psi_a, \Psi_b\} \|}, \quad a, b = \overline{1, 2\mu}. \tag{3.29}$$

Функція рівноважного статистичного розподілу для систем з в'язями, залежними явно від часу, задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^* \rho}{\partial \tau} = 0. \tag{3.30}$$

Зауважимо, що воно задовольняється функцією розподілу (3.28).

IV. РІВНЯННЯ ЛІУВІЛЯ ДЛЯ СИСТЕМИ ТОЧКОВИХ ЗАРЯДІВ З ЕЛЕКТРОМАГНЕТНИМ ПОЛЕМ

IV.1. Формалізм Дірака

Далі ми використовуємо такі позначення: метричний тензор простору Мінковського

$$\|g_{\mu\nu}\| = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1); \tag{4.1}$$

грецькі індекси $\mu, \nu = \overline{0,3}$ нумерують компоненти 4–векторів у просторі Мінковського, а латинські $i, j = \overline{1,3}$ — у 3–вимірному евклідовому просторі.

Система релятивістичних безспінових точкових електричних зарядів в електромагнетному полі в лаґранжевому формалізмі описується в термінах частинкових змінних $x_a^\mu = (x_a^0, \mathbf{x}_a)$ і 4–потенціялу електромагнетного поля $A^\mu = (A^0 = \varphi, \mathbf{A})$. Дія такої системи [14]

$$S = \int L d\tau, \tag{4.2}$$

де функція Лаґранжа L має вигляд

$$L = -\sum_{a=1}^{N} m_a \sqrt{u_a^2(\tau)} - \sum_{a=1}^{N} e_a u_a^\mu(\tau) A_\mu[x_a(\tau)]$$

$$- \frac{1}{16\pi} \int F_{\mu\nu}(\mathbf{x}, \tau) F^{\mu\nu}(\mathbf{x}, \tau) d^3x. \tag{4.3}$$

Тут m_a, e_a, $u_a^\mu = dx_a^\mu / d\tau$ $(u_a^2 \equiv u_a^\mu u_{a\mu})$ — маса, заряд та 4–швидкість a-ої частинки; $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ — тензор електромагнетного поля.

Ми використовуємо опис системи з єдиним еволюційним параметром τ. Такий вибір визначає 0-компоненти координат і швидкостей: $x_a^0 = \tau$, $u_a^0 = 1$ і, таким чином, виключає часові компоненти частинкових змінних з подальшого розгляду.

Перейдемо до гамільтонового формулювання механіки системи згідно з загальним формалізмом Дірака.

Знайдемо канонічні частинкові імпульси:

$$p_{ai}(\tau) = \frac{m_a u_a^i(\tau)}{\sqrt{1 - \mathbf{u}_a^2(\tau)}} - e_a A_i[x_a(\tau)] \tag{4.4}$$

та імпульси поля:

$$B^\mu(x) = \frac{1}{4\pi} F^{\mu 0}(x). \tag{4.5}$$

Унаслідок незалежности лаґранжіяна L від похідної $\dot{A}_0$ в гамільтоновому формалізмі виникає первинна в'язь:

$$\chi_1 \equiv B^0 = 0. \tag{4.6}$$

Вона очевидна з (4.5) й антисиметричности тензора поля.

Згідно з методом Дірака, знайдемо первинний гамільтоніян $H^{(1)}$ системи [12]

$$H^{(1)} = H + \int \lambda \chi_1 d^3x. \tag{4.7}$$

Тут $\lambda = \dot{A}_0$ — невизначена швидкість (множник Лаґранжа), а канонічний гамільтоніян H має вигляд

$$H = \sum_{a=1}^{N} \left\{ \sqrt{m_a^2 + [\mathbf{p}_a - e_a \mathbf{A}(x_a)]^2} + e_a A_0(x_a) \right\}$$

$$+ \int \left(\frac{1}{16\pi} F_{ij} F^{ij} + 2\pi B^i B^i - A_0 \partial_i B^i \right) d^3x, \tag{4.8}$$

де

$$\partial_i B^i \equiv \frac{\partial B^i}{\partial x^i}.$$

Для цієї системи означимо дужку Пуассона функцій F і G канонічних змінних частинок і полів

$$\left\{F(\tau), G(\tau)\right\} \equiv \sum_{a=1}^{N} \left(\frac{\partial F(\tau)}{\partial x_a^i(\tau)} \frac{\partial G(\tau)}{\partial p_{ai}(\tau)} - \frac{\partial F(\tau)}{\partial p_{ai}(\tau)} \frac{\partial G(\tau)}{\partial x_a^i(\tau)} \right)$$
$$+ \int \left(\frac{\delta F(\tau)}{\delta A_\mu(\mathbf{x},\tau)} \frac{\delta G(\tau)}{\delta B^\mu(\mathbf{x},\tau)} - \frac{\delta F(\tau)}{\delta B^\mu(\mathbf{x},\tau)} \frac{\delta G(\tau)}{\delta A_\mu(\mathbf{x},\tau)} \right) d^3x, \qquad (4.9)$$

за допомогою якої рівняння руху записуються стандартним чином.

Вимагаючи збереження в часі в'язі (4.6):

$$\dot{\chi}_1 = \{\chi_1, H^{(1)}\} = 0, \qquad (4.10)$$

одержимо вторинну в'язь

$$\chi_2 = \varrho - \partial_i B^i = 0. \qquad (4.11)$$

Тут і далі

$$\varrho(\mathbf{x},\tau) = \sum_{a=1}^{N} e_a \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a(\tau)),$$

$$j^i(\mathbf{x},\tau) = \sum_{a=1}^{N} e_a u_a^i(\tau) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a(\tau))$$

є густина заряду та 3–струму системи точкових заряджених частинок.

Умова збереження вторинної в'язі (4.11) в часі забезпечується законом збереження заряду, тобто нові в'язі не виникають, а множник Лаґранжа λ та змінна A_0 при χ_1 та χ_2 залишаються невизначеними. Оскільки в'язі комутують, то система в'язей теорії,

$$\chi = (B^0, \varrho - \partial_i B^i) = 0, \qquad (4.12)$$

належить до першого класу.

Зауважимо, що калібрувальні властивості теорії пов'язані з лінійною комбінацією в'язей першого класу,

$$\int [\dot{A}_0 B^0 + A_0(\varrho - \partial_i B^i)] d^3x, \qquad (4.13)$$

яка входить у $H^{(1)}$ і містить невизначену (довільну) функцію A_0. Дійсно, якщо покласти $A_0 = \Lambda$, то (4.13) стає ґенератором

$$\delta W = \int (B^\mu \partial_\mu \Lambda + \varrho \Lambda) d^3x \qquad (4.14)$$

добре відомих калібрувальних перетворень

$$A_\mu \to A_\mu + \delta A_\mu = A_\mu + \{A_\mu, \delta W\} = A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \qquad (4.15)$$

$$p_{ai} \to p_{ai} + \delta p_{ai} = p_{ai} + \{p_{ai}, \delta W\}$$
$$= p_{ai} - e_a \frac{\partial \Lambda(\mathbf{x}_a, \tau)}{\partial x_a^i} \qquad (4.16)$$

що зберігають дію і рівняння руху.

Вважаючи A_0 довільною функцією, яка відіграє роль множника Лаґранжа, легко бачити, що первинний гамільтоніян системи $H^{(1)}$ має структуру гамільтоніяна Дірака (див. (3.2)):

$$H_D = \sum_{a=1}^{N} \sqrt{m_a^2 + [\mathbf{p}_a - e_a \mathbf{A}(x_a)]^2} + \int \left(\frac{1}{16\pi} F_{ij} F^{ij} + 2\pi B^i B^i \right) d^3x + \int (\lambda \chi_1 + A_0 \chi_2) \, d^3x. \qquad (4.17)$$

Цей вираз добре відомий в літературі [19].

IV.2. Рівноважна функція розподілу системи

Перейдемо до статистичного опису системи електромагнетного поля з електричними зарядами.

Запишемо рівноважну функцію розподілу ансамблю Ґіббса в калібруванні Кулона. Для цього накладемо калібрувальні в'язі:

$$\phi_1^G = \partial_i A_i = 0, \quad \phi_2^G = \Delta A_0 + 4\pi \partial_i B^i = 0. \qquad (4.18)$$

В'язь $\phi_2^G = 0$ зумовлена вимогою збереження калібрування Кулона $\partial_i A_i = 0$ в часі. Легко переконатись, що в'язі $\chi_i = 0$ та калібрувальні в'язі $\phi_2^G = 0$ утворюють систему другого класу.

Рівноважна функція розподілу системи, згідно з результатами розділу III, має вигляд

$$\rho = \frac{\prod\limits_{\mathbf{x}} \frac{1}{4\pi^2}}{(2\pi)^{3N} Z} \exp\left\{-\beta\left[\sum_{a=1}^{N}\sqrt{m_a^2 + [\mathbf{p}_a - e_a\mathbf{A}(x_a)]^2}\right.\right. \tag{4.19}$$

$$\left.\left. + \int\left(\frac{1}{16\pi}F_{ij}F^{ij} + 2\pi B^i B^i\right)d^3x + \int A_0(\varrho - \partial_i B^i)d^3x\right]\right\} \times J^2\,\delta(B^0)\delta(\varrho - \partial_i B^i)\delta(\partial_i A_i)\delta(\Delta A_0 + 4\pi\partial_i B^i),$$

і містить функціональні (залежні від польових змінних) δ–функції [8,10,16]. Тут J — визначник матриці $\Delta\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ з неперервними індексами [10], чисельне значення якого не відіграє ролі у подальших розрахунках. Статистична сума системи Z після очевидного інтеґрування за B^0 і A_0 записується так:

$$Z = \int \exp\left\{-\beta\left[\sum_{a=1}^{N}\sqrt{m_a^2 + [\mathbf{p}_a - e_a\mathbf{A}(x_a)]^2} + \int\left(\frac{1}{16\pi}F_{ij}F^{ij} + 2\pi B^i B^i\right)d^3x\right]\right\} \tag{4.20}$$

$$\times\, J\,\delta(\varrho - \partial_i B^i)\delta(\partial_i A_i)\prod_{a,i}\frac{dx_a^i dp_{ai}}{2\pi}\prod_{\mathbf{x},i}\frac{dA_i(\mathbf{x},\tau)dB^i(\mathbf{x},\tau)}{(2\pi)^{2/3}}.$$

Для того, щоб виключити в'язі з підінтеґрального виразу, використаємо розклад Ходжа на поперечні та повздовжні складові для компонент імпульсу поля:

$$B^i(\mathbf{x},\tau) = B_\perp^i(\mathbf{x},\tau) - \partial^i\int\Delta^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\partial_j B^j(\mathbf{y},\tau)d^3y. \tag{4.21}$$

Тут $\Delta^{-1}(\mathbf{x}) = -1/(4\pi|\mathbf{x}|)$ — функція Ґріна оператора Лапласа $\Delta \equiv -\partial_i\partial^i$.

Оскільки для поперечних компонент поля $\partial_i B_\perp^i \equiv 0$, то одна з компонент вектора $B_\perp^i$ є лінійною комбінацією двох інших. Покладаючи, що незалежними компонентами є $B_\perp^\xi = b^\xi$, $\xi = 1,2$, вектор $B_\perp^i$ можна записати як [20]

$$B_\perp^i(\mathbf{x},\tau) = \left(\delta_\xi^i - \delta_3^i\frac{\partial_\xi}{\partial_3}\right)b^\xi(\mathbf{x},\tau). \tag{4.22}$$

За допомогою канонічного перетворення, яке міняє імпульси частинок, знайдемо канонічно спряжені координати до імпульсів b^1, b^2 та $P = \varrho - \partial_i B^i$. Твірний функціонал канонічного перетворення, залежний від старих координат і нових імпульсів поля, а також від старих імпульсів та нових координат частинок, що не змінюються при перетворенні, має вигляд

$$F = -\sum_{a=1}^{N}p_{ai}(\tau)x_a^i(\tau) + \int A_i(\mathbf{x},\tau)\left[\left(\delta_\xi^i - \delta_3^i\frac{\partial_\xi}{\partial_3}\right)b^\xi(\mathbf{x},\tau) - \partial^i\int\Delta^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\left[\varrho(\mathbf{y},\tau) - P(\mathbf{y},\tau)\right]d^3y\right]d^3x. \tag{4.23}$$

Нові спряжені змінні задаються співвідношеннями

$$Q(\mathbf{x},\tau) \equiv \frac{\delta F}{\delta P(\mathbf{x},\tau)} = -\int\Delta^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\partial^i A_i(\mathbf{y},\tau)d^3y, \tag{4.24}$$

$$\pi_{ai}(\tau) \equiv -\frac{\partial F}{\partial x_a^i(\tau)} = p_{ai}(\tau) + e_a\partial_{ai}Q(\mathbf{x_a},\tau), \tag{4.25}$$

$$a_\xi(\mathbf{x},\tau) \equiv \frac{\delta F}{\delta b^\xi(\mathbf{x},\tau)} = \left(\delta_\xi^i - \delta_3^i\frac{\partial_\xi}{\partial_3}\right)A_i^\perp(\mathbf{x},\tau),\ \xi = 1,2, \tag{4.26}$$

де

$$A_i^{\perp}(\mathbf{x},\tau) = A_i(\mathbf{x},\tau) + \partial_i \int \Delta^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\partial^j A_j(\mathbf{y},\tau) d^3y, \tag{4.27}$$

$$A_i^{\perp}(\mathbf{x},\tau) = \int \left\{ \delta_i^{\xi}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - \partial_{xi}\Delta^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\partial_y^{\xi} \right\} a_{\xi}(\mathbf{y},\tau) d^3y. \tag{4.28}$$

Таким чином, ми отримали сукупність канонічних фізичних $\omega = ((x_a^i,\ \pi_{ai}),\ (a_\xi,\ b^\xi))$. Нефізичними канонічними змінними теорії є $\Omega = ((A_0, B_0), (Q, P))$, причому A_0 та B_0 ми вже виключили з опису. Тепер дужка Пуассона може бути записана в термінах змінних ω та Ω.

Зауважимо, що змінні $A_i^{\perp},\ B_{\perp}^i$ не є канонічними. Канонічно спряженими є фізичні змінні $a_\xi,\ b^\xi,\ \xi = 1, 2$.

Статистична сума системи в нових змінних після очевидного інтеґрування за Q та P набуває вигляду

$$\begin{aligned} Z = \int \exp\Bigg\{ -\beta \Bigg[& \sum_{a=1}^{N} \sqrt{m_a^2 + [\pi_a(\tau) - e_a \mathbf{A}_{\perp}(x_a(\tau))]^2} \\ & + \int \left(-\frac{1}{8\pi} A_i^{\perp}(\mathbf{x},\tau)\Delta A_i^{\perp}(\mathbf{x},\tau) + 2\pi B_{\perp}^i(\mathbf{x},\tau) B_{\perp}^i(\mathbf{x},\tau) \right) d^3x \\ & - 2\pi \int \varrho(\mathbf{x},\tau)\Delta^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\varrho(\mathbf{y},\tau) d^3x d^3y \Bigg] \Bigg\} \prod_{a,i} \frac{dx_a^i d\pi_{ai}}{2\pi} \prod_{\mathbf{x},\xi} \frac{da_\xi(\mathbf{x},\tau) db^\xi(\mathbf{x},\tau)}{2\pi}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Підінтеґральний вираз визначає функцію статистичного розподілу ρ^{Φ} цієї системи. Він не залежить від вибору калібрування, оскільки записаний у термінах змінних, що параметризують фізичний фазовий підпростір системи. У Додатку до роботи подано вираз для статистичної суми (4.29) у зображенні Фур'є, що дозволяє дослідити статистичні властивості системи у скінченному об'ємі.

При відсутності взаємодії між частинками та полем вираз (4.29) (або Д.10) факторизується на статистичну суму ідеального релятивістичного газу і статистичну суму класичного електромагнетного поля. Остання має обмежений фізичний зміст, оскільки приводить до розбіжної енерґії випромінювання (у відповідности з формулою Релея–Джинса). Зазначимо, що ці труднощі класичної статистики поля відомі давно. Вони стимулювали появу квантової механіки і, зокрема, розвиток квантової статистики з залученням потужних методів функціонального інтеґрування [4–6,17]. Тому класична статистика систем з електромагнетним та іншими калібрувальними полями вважається неактуальною і не отримала в літературі розвитку. Однак, таку теорію можна розглядати як метод врахування міжчастинкової взаємодії за умови, що термодинамікою випромінювання можна знехтувати.

V. ПІДСУМКИ

У роботі досліджено особливості статистичного опису класичних систем з в'язями різних класів, у тому числі з тими, які ґенерують калібрувальні перетворення. Виходячи з формалізму Дірака для опису динаміки систем з в'язями, знайдено рівняння Ліувіля для функції статистичного розподілу у випадках невідкаліброваної та відкаліброваної теорії (розділ III). Для відкаліброваних систем у станах термодинамічної рівноваги одержана функція розподілу збігається з відомим у літературі виразом для побудованої *a priori* міри [23], з якою проводиться статистичне усереднення. Знайдена функція статистичного розподілу задовольняє систему рівнянь, що є наслідком модифікації динаміки при наявності в'язей. Рівняння для функції розподілу систем із указаними особливостями узагальнює відоме рівняння Ліувіля і збігається з ним у фазовому просторі фізичних змінних при відповідному переозначенні функції Гамільтона.

Знайдені рівняння й вирази статистичної механіки систем з в'язями застосовані для розгляду системи точкових електричних зарядів з електромагнетним полем.

Продемонстровано особливості узагальненої класичної та узагальненої статистичної механіки електромагнетного поля з точковими електричними зарядами. Ми приділили увагу калібрувально–інваріянтним властивостям системи, яка розглядадається в рамках узагальненої гамільтонової механіки, використовуючи вихідні канонічні змінні (розділ IV.1). Рівноважна функція статистичного розподілу записана в калібруванні Кулона, а також у фізичних змінних системи, що не залежать від вибору калібрування. З метою знаходження статистичної суми системи заряди–поле в скінченному об'ємі деякі результати відтворено в зображенні Фур'є (Додаток).

Перспективою для подальших досліджень можна вважати розробку проблем квантування систем з в'язями, а з тим і побудови рівняння Неймана (квантового аналога рівняння Ліувіля) за наявности в'язей.

Автори вдячні проф. Л. Блажиєвському за ідею послідовної побудови статистичної механіки систем з в'язями, зокрема систем з електромагнетним полем, та докторові фіз.–мат. наук В. Третякові за його сталий інтерес до цієї роботи та участь в обговоренні результатів.

ДОДАТОК

Статистичний опис у зображенні Фур'є будується аналогічно до координатного. Тут ми обмежимося виразом для статистичної суми в термінах фізичних змінних.

Розкладемо потенціяли $\mathbf{A}$ та φ, а також густини заряду та струму за пласкими хвилями [16]:

$$(\varphi(\mathbf{x},\tau),\mathbf{A}(\mathbf{x},\tau)) = \sqrt{4\pi}\int(\varphi_k(\tau),\mathbf{a}_k(\tau))e^{i\mathbf{kx}}\frac{d^3k}{(2\pi)^3},$$

$$\varrho(\mathbf{x},\tau) = \int\varrho_k(\tau)e^{i\mathbf{kx}}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \tag{Д.1}$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{x},\tau) = \int\mathbf{j}_k(\tau)e^{i\mathbf{kx}}\frac{d^3k}{(2\pi)^3},$$

де

$$\varrho_k(\tau) = \sum_a e_a e^{-i\mathbf{kx}_a(\tau)}, \quad \mathbf{j}_k(\tau) = \sum_a e_a\mathbf{u}_a(\tau)e^{-i\mathbf{kx}_a(\tau)}. \tag{Д.2}$$

Використовуючи умову дійснозначности потенціялів і густин,

$$\mathbf{a}_k^* = \mathbf{a}_{-k}, \quad \varphi_k^* = \varphi_{-k}, \quad \varrho_k^* = \varrho_{-k}, \quad \mathbf{j}_k^* = \mathbf{j}_{-k}, \tag{Д.3}$$

а також розклад на дійсні та уявні складові

$$\mathbf{a}_k = \sum_{\alpha=1}^{2}\gamma(\alpha)\,\mathbf{a}_k^\alpha, \quad \varphi_k = \sum_{\alpha=1}^{2}\gamma(\alpha)\,\varphi_k^\alpha, \tag{Д.4}$$

здійснимо канонічне перетворення до нефізичних змінних

$$Q_{1k}^\alpha = \varphi_k^\alpha, \; P_{1k}^\alpha = \pi_k^\alpha, \tag{Д.5}$$

$$Q_{2k}^\alpha = (-1)^{\beta(\alpha)}\frac{(\mathbf{ka}_k^{\beta(\alpha)})}{k^2},$$

$$P_{2k}^\alpha = (-1)^{\beta(\alpha)}(\mathbf{kb}_k^{\beta(\alpha)}) - \sqrt{4\pi}\varrho_k^\alpha = 0, \tag{Д.6}$$

та фізичних змінних

$$\pi_{ai} = p_{ai} + \sqrt{4\pi}e_a\partial_{ai}\int Q_{2k}e^{i\mathbf{kx_a}}\frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tag{Д.7}$$

$$a_{k\xi}^\alpha = \left(\delta_{i\xi} - \delta_{i3}\frac{k_\xi}{k_3}\right)(\mathbf{a}_{\perp k}^\alpha)_i,$$

$$b_{k\xi}^\alpha = (\mathbf{b}_{\perp k}^\alpha)_\xi, \quad \xi = 1,\ 2, \tag{Д.8}$$

де

$$\mathbf{a}_{\perp k}^\alpha = \mathbf{a}_k^\alpha - \mathbf{k}\frac{(\mathbf{ka}_k^\alpha)}{k^2}, \quad \mathbf{b}_{\perp k}^\alpha = \mathbf{b}_k^\alpha - \mathbf{k}\frac{(\mathbf{kb}_k^\alpha)}{k^2}. \tag{Д.9}$$

Формальна дужка Пуассона в термінах нових змінних діє так:

$$\{x_a^i, \pi_{jb}\} = \delta_j^i\delta_{ab},$$

$$\{a_{k\xi}^\alpha, b_{q\zeta}^\beta\} = (2\pi)^3\delta_{\xi\zeta}^{\alpha\beta}\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{q}),$$

$$\{Q_{ik}^\alpha, P_{jq}^\beta\} = (2\pi)^3\delta_{ij}^{\alpha\beta}\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{q}),$$

інші комутаційні співвідношення між змінними (у сенсі дужки Пуассона) дорівнюють нулеві.

Зображення Фур'є зручне тим, що легко дозволяє сформулювати термодинаміку системи у скінченному об'ємі V. Для цього інтеґрування за хвильовим вектором достатньо замінити сумою, тобто

$$\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}(....) = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}}(....).$$

Аналогічно до процедури побудови статистичного опису цієї системи в координатному зображенні, запишемо статистичну суму

$$Z = \int\exp\left(-\beta\left[\sum_a\sqrt{m_a^2 + [\pi_a - e_a\mathbf{A}_\perp(x_a)]^2} + \frac{1}{2V}\sum_{\mathbf{k},\alpha}\left\{(\mathbf{b}_{\perp k}^\alpha)^2 + k^2(\mathbf{a}_{\perp k}^\alpha)^2 + \varrho_k\frac{2\pi}{k^2}\varrho_{-k}\right\}\right]\right)\cdot\prod_{a,i}\frac{dx_a^i d\pi_{ai}}{2\pi}\prod_{\mathbf{k},\xi}\prod_\alpha\frac{da_{k\xi}^\alpha db_{k\xi}^\alpha}{2\pi}. \tag{Д.10}$$

Одержаний вираз для статистичної суми можна теж безпосередньо отримати шляхом канонічного перетворення Фур'є формули (4.29).

---

[1] А. И. Ахиезер, С. В. Пелетминский, *Методы статистической физики* (Наука, Москва, 1977).
[2] Р. Балеску, *Равновесная и неравновесная статистическая механика* (Изд–во МГУ, Москва, 1986).
[3] Б. М. Барбашов, В. О. Нестеренко, А. М. Червяков, Теор. мат. физ. **63**, 88 (1985).
[4] Л. Блажиевский, препринт ИТФ–86–32Р, Киев (1986).
[5] Л. Блажиєвський, Г. Гіль, С. Семак, Журн. фіз. досл. **1**, 1 (1996)
[6] Л. Блажиєвський, Ю. Криницький, Журн. фіз. досл. **1**, 191 (1997)
[7] Н. Н. Боголюбов, Н. Н. Боголюбов, *Введение в квантовую статистическую механику* (Наука, Москва, 1984).
[8] Г. А. Вилковыский, Е. С. Фрадкин, в *IV Международное совещание Объединённого института ядерных исследований D2–9788, 1976*, с. 141.
[9] В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики* (Наука, Москва, 1971).
[10] Д. М. Гитман, И. В. Тютин, *Каноническое квантование полей со связями* (Наука, Москва, 1986).
[11] П. Дирак, *К созданию квантовой теории поля: Основные статьи 1925–1958 годов* (Наука, Москва, 1990).
[12] П. Дирак, *Лекции по квантовой механике* (Мир, Москва, 1968).
[13] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика* (Наука, Москва, 1964).
[14] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля* (Наука, Москва, 1973).
[15] Л. Д. Фаддеев, Теор. мат. физ. **1**, 1 (1969).
[16] Р. Фейнман, А. Хибс, *Квантовая механика и интегралы по траекториям* (Мир, Москва, 1968).
[17] L. Blazhyjevskii, Yu. Krynytskyi, Cond. Matt. Phys. (Lviv) **3**, 569 (1998).
[18] L. P. Horwitz, W. C. Schieve, C. Piron, Ann. Phys. **137**, 306 (1981).
[19] L. Lusanna, Int. J. Mod. Phys. **12**, 645 (1997).
[20] Тут $1/\partial_3$ означено так: $\frac{1}{\partial_3}\delta^3(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\delta(x^1)\delta(x^2)\mathrm{sgn}(x^3)$.
[21] D. E. Miller, F. Karsch, Phys. Rev. D **24**, 2564 (1981).
[22] D. E. Miller, P. S. Ray, Helv. Phys. Acta **57**, 96 (1984).
[23] D. E. Miller, in: *Statistical Mechanics of Quarks and Hadrons* (North–Holland Publishing Company, 1981), p. 293.
[24] S. Shanmugadhasan, J. Math. Phys. **14**, 677 (1973).

LIOUVILLE EQUATION FOR THE SYSTEMS WITH CONSTRAINTS

A. Duviryak, A. Nazarenko

Institute for Condensed Matter Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine,
1 Svientsitskii Str., Lviv, UA–79011, Ukraine

The Liouville equation and distribution function for classical systems with constraints are found. The system of point electrical charges with electromagnetic field is considered by using the obtained equations.