ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 4, № 1 (2000) с. 1–5

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 4, No. 1 (2000) p. 1–5

СИНТЕЗ АВТОКОЛИВНИХ СИСТЕМ, ЩО ВІДТВОРЮЮТЬ ОДИН ІЗ РОЗВ'ЯЗКІВ ГАМІЛЬТОНОВОЇ СИСТЕМИ

Л. А. Синицький, І. В. Смаль
Львівський національний університет імені Івана Франка, кафедра радіофізики,
вул. Драгоманова 19, Львів, 79005, Україна.
(Отримано 1 вересня 1999 р.)

Для гамільтонової системи з одним ступенем вільности, яка володіє континуумом періодичних рухів, побудована процедура перетворення її в автоколивну систему. Для синтезованої автоколивної системи зберігається закон зміни координати $q(t)$ та імпульсу $p(t)$ гамільтонової системи при заданому значенні гамільтоніяна.

Шляхом відповідного вибору потенціялу встановлена можливість відтворення коливань наперед заданої форми. У ролі прикладу синтезований ґенератор, форма коливань якого збігається якісно з періодичними коливаннями, що є притаманними для кардіограм.

Запропонований метод поширений на системи з довільною кількістю ступенів вільности для синтезу ґенераторів квазіперіодичних коливань.

Ключові слова: рівняння Гамільтона, автоколивна система, синтез коливань.

PACS number(s): 02.60.Cb

Розглянемо гамільтонову систему з одним ступенем вільности:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p},$$
$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \qquad (1)$$

Нехай $H(q,p)$ така, що на фазовій площині (q,p) криві

$$H(q,p) = \mathrm{const}$$

є простими замкненими кривими. Їм відповідають періодичні рухи в системі (1). Задача полягає в тому, аби модернізувати рівняння (1) так, щоби система (1) перетворювалася в автоколивну систему, для якої граничний цикл визначався б рівнянням

$$H(q,p) = H_0,$$

де H_0 — константа, а залежності $q(t)$ і $p(t)$ були б тотожні розв'язкам системи (1) при $H = H_0$.

Цей підхід для окремого випадку системи (1)

$$\frac{dq}{dt} = p, \qquad \frac{dp}{dt} = -q,$$

для якої гамільтоніян

$$H = \frac{1}{2}\left(q^2 + p^2\right)$$

відомий і, мабуть, уперше викладений у монографії О. О. Андронова, О. А. Вітта [1].

Модернізована система з періодичним синусоїдним розв'язком має вигляд

$$\frac{dq}{dt} = p + \varepsilon\left(R^2 - q^2 - p^2\right) q,$$
$$\frac{dp}{dt} = -q + \varepsilon\left(R^2 - q^2 - p^2\right) p,$$

де $\varepsilon > 0$, причому

$$q = R\sin(t+\alpha), \qquad p = R\cos(t+\alpha). \qquad (2)$$

Усі траєкторії на площині (q,p) прямують до граничного циклу $q^2+p^2 = R^2$, тобто періодичний режим (2) є стійким.

Цей підхід можна узагальнити і на будь–який гамільтоніян, при якому система (1) має скінченну кількість станів рівноваги і всі вони лежать на площині (q,p) на прямій $p = \mathrm{const}$. Розглянемо модернізовану систему (1):

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} - \varepsilon\left(H - H_0\right)\frac{\partial H}{\partial q},$$
$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} - \varepsilon\left(H - H_0\right)\frac{\partial H}{\partial p}. \qquad (3)$$

Приймаємо, що $H(q,p)$ має глобальний мінімум у точці $q = q^*$, $p = p^*$, яка є одним із станів рівноваги системи (1); зрозуміло, що на фазовій площині маємо в точці (q^*, p^*) особливу точку типу центра. Не зменшуючи загальности, також приймаємо $H(q^*, p^*) = 0$, тоді $H(q,p)$ додатно визначена функція на всій площині (q,p).

Помноживши перше з цих рівнянь на $\frac{\partial H}{\partial q}$, а друге — на $\frac{\partial H}{\partial p}$ і додавши, отримаємо

$$\frac{dH}{dt} + \varepsilon \left[\left(\frac{\partial H}{\partial q} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)^2 \right] (H - H_0) = 0. \qquad (4)$$

Уздовж траєкторії руху, якщо вона не є станом рівноваги,

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)^2 > 0.$$

Можна довести, що стани рівноваги, яким відповідає значення гамільтоніяна $H^* < H_0$, є нестійкими. Тому при $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \to \infty} H\left(t\right) = H_0$$

для всіх початкових умов, що не є станами рівноваги і сепаратрисами, які прямують до сідла. А це означає, що стаціонарні розв'язки (3) і (1) тотожні. Таким чином доведено, що автоколивний режим у системі (3) має часові залежності $q\left(t\right)$, $p\left(t\right)$ такі самі, як у консервативній системі (1). Цей режим є стійким. На рис. 1, 2 подано фазові портрети системи (1) і системи (3) при використанні гамільтоніяна в такому вигляді:

$$H(q,p) = p^2 + q^4 - q^2 + 0.25, \quad H_0 > 0.25.$$

Розглянута процедура дає змогу синтезувати ґенератор з довільною формою граничного циклу $H\left(q,p\right) = H_0$, а також змінні $q\left(t\right)$, $p\left(t\right)$ із багатьма екстремальними значеннями за згаданих вище обмежень.

Використаємо запропонований підхід для синтезу автоколивної системи з довільною формою сигналу. Побудову ґенераторів, які відтворюють коливання з наперед заданою формою, розглядали впродовж багатьох років. Зрозуміло, що було бажання побудувати ґенератор найпростішим шляхом, тобто з мінімальною кількістю ступенів вільности і не дуже складною нелінійністю.

Задачу створення подібного ґенератора з одним ступенем вільности розглядали в [2], проте досягнути поставленої мети не вдалося. Виникла необхідність використовувати системи з 1.5 ступенями вільности (тобто систему диференційних рівнянь третього порядку) при дуже складному виразі для нелінійности.

Спроба довести можливість використання системи з одним ступенем вільности була знову зроблена в [3]. Не зважаючи на те, що вдалося для досить широкого класу коливань побудувати ґенератори з одним ступенем вільности, загальна проблема теж не була розв'язана.

Зауважимо, що намагання синтезувати ґенератор на підставі систем з одним ступенем вільности не зумовлено бажанням досягти рекордного результату. Якщо ця задача розв'язана, то тим самим забезпечено неможливість існування небажаних явищ, таких, як виникнення квазіперіодичних і хаотичних коливань, які є неможливими в системах з одним ступенем вільности.

Розглянемо процедуру синтезу в загальному випадку. Нехай потрібно синтезувати періодичні коливання з періодом T, що описуються на періоді довільною функцією $f(t)$. Не зменшуючи загальности, приймемо, що $f(0) = f_m$, де $f_m = \min\limits_{0<t\leq T} f(t)$. Задача синтезу полягає в такому виборі $H(q,p)$, щоб розв'язок $p(t)$ системи (4) збігався з функцією $f(t)$.

Надалі будемо розглядати випадок, коли

$$H\left(q,p\right) = F(p) + V\left(q\right). \qquad (5)$$

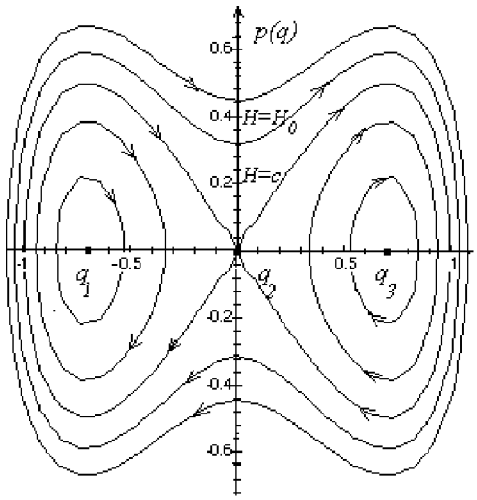

Рис. 1. Фазовий портрет консервативної системи.

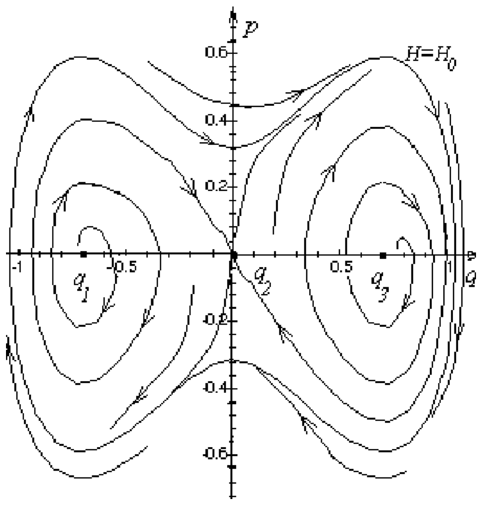

Рис. 2. Фазовий портрет автоколивної системи.

Функцію $F(p)$ приймаємо у вигляді, який "нагадує" вигляд кінетичної енерґії, тобто $F(p)$ має єдиний екстремум (мінімум) у точці $p = p^*$, і $F(p^*) = 0$, $\lim\limits_{|p|\to+\infty} F(p) = +\infty$. В окремих випадках не виключено, що $F(p) = \frac{1}{2}p^2$. На функцію $V(q)$ накладаємо такі умови — ця функція має скінченну кількість екстремумів і $\lim\limits_{|q|\to+\infty} V(q) = +\infty$.

За накладених умов усі стани рівноваги системи (1) будуть лежати на площині (q,p) на прямій $p = p^*$. Ці умови також забезпечують те, що на фазовій площині (q,p) криві

$$H(q,p) = c, \quad c_m < c < +\infty$$

є простими замкненими кривими, які охоплюють точку (q^*, p^*). Їм відповідають періодичні рухи в системі (1). Константа $c_m = \max\limits_{\forall i} H(q_i, p_i)$, де (q_i, p_i) є розв'язками системи рівнянь:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial p} = 0.$$

Назвемо "прямим ходом" проміжок часу, протягом якого $\partial H/\partial p > 0$, тобто q змінюється від q_{MIN} до q_{MAX}, і "зворотним ходом" — проміжок часу, протягом якого $\partial H/\partial p < 0$. Уведемо в розгляд допоміжну невід'ємну функцію $f_+(t) = f(t) - f_m$. Функція $F(p) = \frac{1}{2}p^2$.

Поставимо задачу знайти такий вигляд $V(q)$, щоб розв'язок $p(t)$ збігався з функцією $f_+(t)$ під час "прямого ходу", тобто коли $p > 0$. Тоді цей розв'язок $p(t) = f_+(t)$ повинен задовольняти систему (1), яка описує граничний цикл

$$\dot{q} = f_+(t),$$
$$\dot{f}_+(t) = -\frac{dV}{dq}. \tag{6}$$

З першого рівняння системи (6) знайдемо $q(t)$:

$$q(t) = \int\limits_0^t f_+(z)dz = \varphi(t).$$

Тому що функція $f_+(t)$ невід'ємна, то функція $q = \varphi(t)$ є монотонно зростаючою. У такому випадку існує однозначна обернена функція $t = \varphi^{-1}(q)$. З другого рівняння системи (6) знайдемо вигляд функції $V(q)$:

$$V(q) = -\int\limits_0^q \frac{df_+}{dt}dq = -\int\limits_0^q f_+ df_+$$
$$= -\frac{\left[f_+(\varphi^{-1}(q))\right]^2}{2},$$

гамільтоніян $H(q,p)$ при умові $H(q,p) > 0$ запишемо в такому вигляді:

$$H(q,p) = F(p) + \frac{1}{2}\left((f_M - f_m)^2 - f_+^2(\varphi^{-1}(q))\right),$$

де $f_M = \max\limits_{0<t\leq T} f(t)$, а $c_m < H_0 < \frac{1}{2}(f_M - f_m)^2$. Для того щоб розв'язок $p(t)$ збігався з функцією $f(t)$, $H(q,p)$ потрібно записати в іншому вигляді:

$$H(q,p) = F(p - f_m) + \frac{1}{2}\left((f_M - f_m)^2 - \left(f(\varphi^{-1}(q)) - f_m\right)^2\right). \tag{7}$$

Отже, використовуючи (7), можна отримати такий режим коливань, коли фазова змінна $p(t)$ під час "прямого ходу" змінюється за заданим законом $p = f(t)$. Але після "прямого ходу" відбувається "зворотний хід", і в цьому випадку $p(t)$ буде змінюватись за законом $p = 2f_m - f(T-t)$, що є небажаним. Тому потрібно певним чином зменшити тривалість "зворотного ходу", а значення $p(t)$ при цьому наблизити до $p = f_m$. Це можна зробити за рахунок вибору функції $F(p)$ у виразі (5).

Нехай

$$F(p) = \begin{cases} \dfrac{p^2}{2} & p \geq 0 \\ \dfrac{\alpha p^2}{2} & p < 0, \end{cases} \tag{8}$$

де $\alpha >> 1$. Покажемо, як при такому виборі $F(p)$ зміниться значення $p(t)$ і час "зворотного ходу". Для цього використаємо вираз (7) при $p < f_m$ з урахуванням (8), тоді

$$p = -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{2H_0 + (f(\varphi^{-1}(q)) - f_m)^2 - (f_M - f_m)^2} + f_m,$$

тобто при зростанні значення α значення $p \to f_m$.

Для визначення часу "зворотного ходу" використаємо перше рівняння системи (1), вираз (7) і (8), тоді

$$T_{з.х.} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int\limits_0^T \frac{dq}{\sqrt{2H_0 + (f(\varphi^{-1}(q)) - f_m)^2 - (f_M - f_m)^2}} = \frac{T}{\sqrt{\alpha}},$$

тобто при зростанні значення α значення $T_{з.х.} \to 0$.

У результаті при використанні гамільтоніяна у вигляді (7) з функцією (8) в системі (3) ми отримаємо розв'язок $p(t)$ у вигляді коливань, що за формою збігаються з виглядом функції $f(t)$, але одержимо також і збільшення періоду коливань на величину $T/\sqrt{\alpha}$. Для того щоб отримати функцію $p(t)$ з періодом T, потрібно $f_+(t)$ вибирати так :

$$f_+(t) = f(\beta t) - f_m,$$

де

$$\beta = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right).$$

Запропонований метод синтезу ґенератора дозволяє одержати ґенерацію коливань довільної форми. Одна з задач при використанні цього методу — це відшукання аналітичного вигляду функції $t = \varphi^{-1}(q)$ для того, щоб знайти вигляд функції $V(q)$.

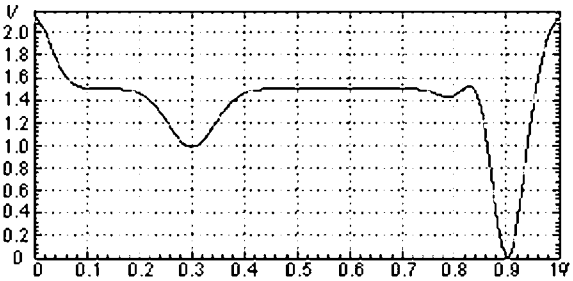

Рис. 3. Функція $V(q)$.

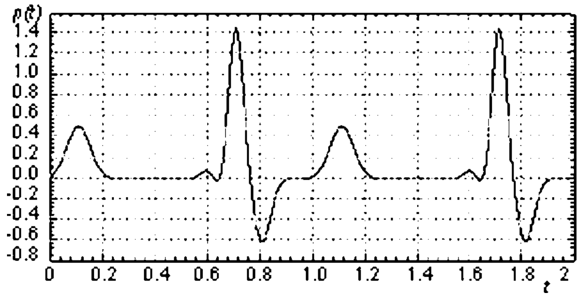

Рис. 4. Функція $p(t)$.

Значно спростити процедуру синтезу зі збереженням усіх згаданих вище якісних і кількісних результатів, але з усуненням розв'язання задачі знаходження оберненої функції, можна, використавши в (5) замість (8) функцію $F(p)$ в такому вигляді:

$$F(p) = \begin{cases} p - f_m & p \geq f_m \\ -\sqrt{\alpha}\,(p - f_m) & p < f_m. \end{cases} \tag{9}$$

А коли так, то згідно з системою (1), $q(t)$ змінюється лінійно, тобто під час "прямого ходу" $q = t + \text{const}$, а під час "зворотного ходу" $q = -\sqrt{\alpha}t + \text{const}$. Це означає, що форма коливань $p(t)$ буде збігатися з формою граничного циклу $p(q)$, коли $p > f_m$ і $p(-q)$, коли $p < f_m$. Синтез форми граничного циклу, яка описувалася б функцією $f(t)$, не викликає труднощів. Для цього потрібно записати $V(q)$ у такому вигляді:

$$V(q) = f_M - f(q), \tag{10}$$

де $q \in [0; T]$, при цьому $c_m < H_0 < (f_M - f_m)$. Для того щоб не було збільшення періоду коливань на величину $T/\sqrt{\alpha}$, тобто при процедурі синтезу задавати $V(q)$ таким чином:

$$V(q) = f_M - f\,(\beta q)\,,$$

де

$$q \in \left[0; \frac{T}{\beta}\right].$$

Щоб функція $V(q)$ була визначена на всій фазовій площині і для забезпечення стійкости в цілому побудованого періодичного режиму, доозначимо $V(q)$:

$$V(q) = \begin{cases} -f'\,(\beta q_1)\,(q - q_1) + H_0, & q > q_1 \\ f_M - f\,(\beta q)\,, & q_2 \leq q \leq q_1 \\ -f'\,(\beta q_2)\,(q - q_2) + H_0, & q < q_2, \end{cases}$$

де q_1 і q_2 розв'язки рівняння $f_M - f\,(\beta q) = H_0$.

Як приклад розглянемо синтез періодичного сигналу, що якісно описує кардіографічний сигнал. Цей сигнал містить декілька екстремумів і має складний спектр у частотній області. Для його опису використаємо такий вираз:

$$f(t) = -0.6\exp\left(-500t^2\right) + 0.5\exp\left(-250(t-0.3)^2\right) + 1.5\exp\left(-600(t-0.9)^2\right)$$
$$- 0.6\exp\left(-500(t-1)^2\right) - 0.2\exp\left(-600(t-0.85)^2\right) + 0.1\exp\left(-600(t-0.8)^2\right);$$

де $t \in [0;1]$, тобто період сигналу $T = 1$. Значення інших величин: $H_0 = 2.09$, $f_m = -0.6$, $f_{\mathrm{M}} = 1.5$, $\alpha = 6400$. Вигляд функцій $V(q)$ і $p(t)$ подано на рис. 3 і рис. 4 відповідно.

Запропонований підхід можна поширити на багатовимірний випадок. Якщо q і p є n–вимірними векторами, то

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \left(\frac{\partial H}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial H}{\partial q_n}\right)^T;$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, ..., \frac{\partial H}{\partial p_n}\right)^T,$$

де T — знак транспонування.

Рівняння у формі (3) зберігають зміст у n–вимірному випадку. Розглянемо скалярні добутки:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^T \frac{dq}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^T \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) - \varepsilon\left(H - H_0\right)\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^T \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right),$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^T \frac{dp}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^T \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right) - \varepsilon\left(H - H_0\right)\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^T \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right).$$

Сума цих двох рівнянь

$$\frac{dH}{dt} + \varepsilon\left[\left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^T \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^T \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)\right]\left(H - H_0\right) = 0. \tag{11}$$

Так само, як і для рівняння (5), з (11) отримуємо

$$\lim_{t\to\infty} H\left(t\right) = H_0.$$

У n–вимірному випадку запропонована процедура дозволяє з континууму квазіперіодичних розв'язків отримати сімейство таких розв'язків, що мають постійне значення гамільтоніяна. Для системи з двома ступенями вільности можна побудувати автоколивну систему, що відтворює неперервну або імпульсну ґенерацію.

---

[1] А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, *Теория колебаний* (Наука, Москва, 1981).
[2] L. O. Chua, D. N. Green, IEEE Trans. Circuits Syst. CAS–21, 286 (1974).
[3] Л. А. Синицкий, И. В. Смаль, Электронное моделирование **21**, 19 (1999)

SYNTHESIS OF AUTOOSCILLATORS REPRODUCING ONE OF THE SOLUTIONS OF THE HAMILTONIAN SYSTEM

L. A. Sinitsky, I. V. Smal
Department of Radiophysics, Ivan Franko National University of Lviv,
19 Drahomanov Str., Lviv, UA–79005, Ukraine

A nonlinear periodic system is synthesised which reproduces one of the solutions of the Hamiltonian system. An arbitrarily prescribed periodic waveform can be synthesised due to the appropriately chosen potential of the Hamiltonian equations.

The proposed method of synthesis can be extended on the Hamiltonian equations with the n degrees of freedom. In this case synthesis of quasiperiodic waveforms which have n–basic frequencies is possible.

As an example an auto–oscillator for generating the waveform similar to the cardiogram was synthesised.