ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 4, № 2 (2000) с. 141–148

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 4, No. 2 (2000) p. 141–148

ПОЛІНОМНИЙ ПІДХІД І ТОЧКОВІ КАНОНІЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ДЛЯ ПОБУДОВИ КВАЗІТОЧНО РОЗВ'ЯЗУВАНИХ ПОТЕНЦІЯЛІВ У КВАНТОВІЙ МЕХАНІЦІ

Б. М. Маркович
Державний університет "Львівська політехніка",
вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, Україна

(Отримано 1 грудня 1999 р.; в остаточному вигляді — 20 березня 2000 р.)

У праці узагальнено поліномний підхід для побудови квазіточно розв'язуваних потенціялів для рівняння Шредингера, завдяки чому знайдено нові потенціяли з n відомими власними функціями й енергетичними рівнями.

За допомогою канонічних точкових перетворень отримано два квазіточно розв'язувані потенціяли з N відомими власними станами (N — ціле число, яке пов'язане з параметрами потенціялів). Ці потенціяли мають особливість: їхній профіль залежить від співвідношення між параметрами потенціялу. Так, у потенціялі з двома ямами при певному значенні параметрів зникає бар'єр.

Ключові слова: рівняння Шредингера, хвильова функція, квазіточно розв'язувані потенціяли, канонічні точкові перетворення, поліномний підхід.

PACS number(s): 03.65.–w; 03.65.Ge

I. ВСТУП

У квантовій механіці проблема точних розв'язків постійно привертає увагу. Порівняно недавно нараховувалося лише декілька прикладів потенціялів, які є точно розв'язувальними. Прикладами цих потенціялів є гармонічний осцилятор, кулонівське поле, потенціяли Морзе, Пешля–Теллєра, модифікований потенціял Пешля–Теллєра, нескінченна прямокутна яма, дельтаподібні потенціяли.

Виявляється, що існують потенціяли, для яких можна знайти обмежену кількість станів. Такі потенціяли називаються квазіточно розв'язувальними. Основними методами створення квазіточно розв'язуваних потенціялів є: поліномний підхід [1–4], канонічні точкові перетворення [2], суперсиметричний підхід [2,5–9], перетворення Дарбу [10,11]. Крім того, у праці [12] представлений матричний підхід для розв'язування рівняння Шредингера, а у праці [13] показано спосіб побудови квазіточно розв'язувальних потенціялів із використанням інтеґралів за траєкторіями.

Підхід, що запропонував Турбінер у [1], дає змогу побудувати потенціяли, для яких відомо N ($N = 1, 2, 3, \ldots$) власних станів. У нашій праці цей метод узагальнено на випадок, коли можна знайти N потенціялів одного типу, які відрізняються значенням одного з параметрів. Цей параметр ми представляємо у вигляді власних значень квадрата моменту кількости руху. Таким чином отримано N радіяльних функцій для радіяльного рівняння Шредингера з новим потенціялом, що описує деяке центральне поле. Крім того, узагальненим методом знайдено N потенціялів, які відрізняються двома параметрами. Один із параметрів удалося зробити однаковим для двох потенціялів, а інший, подібно як у першому випадку, представити у вигляді власних значень квадрата моменту кількости руху. Таким способом виявилося можливим знайти дві радіяльні функції для нового потенціялу.

У праці [2] розглянуто метод точкового канонічного перетворення для побудови нових квазіточно розв'язувальних потенціялів, але внаслідок того, що в загальному випадку власні значення енергії вихідного потенціялу в новому потенціялі відіграють роль коефіцієнтів, там було знайдено один власний стан для нового потенціялу. У нашій праці запропоновано розглядати потенціяли з однаковими власними значеннями енергії або потенціяли з виродженими енергетичними рівнями для забезпечення незмінности нового потенціялу. Так, використовуючи точкові канонічні перетворення і сім'ю потенціялів з одним і тим же власним значенням енергії (яка була знайдена за допомогою поліномного підходу у праці [1]), отримано квазіточно розв'язувані потенціяли з N власними станами.

II. УЗАГАЛЬНЕНИЙ ПОЛІНОМНИЙ ПІДХІД

Розгляньмо одновимірне рівняння Шредингера

$$-\psi''(x) + [V(x) - E]\,\psi(x) = 0. \tag{1}$$

Як і у працях [1,2], розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді

$$\psi(x) = C\,p_n\,(z, a_0, \ldots, a_{n-1}) \exp\left(-\int y(x)\,dx\right), \tag{2}$$

де $z = z(x)$ — деяка функція x, яка буде задана нижче, C — стала нормування,

$$p_n(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j, \ (a_n = 1). \tag{3}$$

Підставивши (2) в (1), отримаємо таке рівняння:

$$V(x) - E = y^2(x) - y'(x) + \frac{p_n''(z(x)) - 2yp_n'(z(x))}{p_n(z(x))}, \tag{4}$$

де $p_n' = dp_n/dx$, $p_n'' = d^2p_n/dx^2$. З умови відсутноти синґулярностей у потенціялі $V(x)$ випливає, що $p_n'' - 2yp_n'$ містить p_n як множник. У роботі [2] було розглянуто випадок

$$p_n'' - 2yp_n' = \sum_{j=0}^{n+1} b_j z^j. \tag{5}$$

Поділивши (5) на (3) отримаємо, що

$$\frac{p_n'' - 2yp_n'}{p_n} = b_{n+1}z + b_n - b_{n+1}a_{n-1} + \frac{R_n}{p_n}, \tag{6}$$

де поліном R_n має вигляд

$$R_n = \sum_{j=0}^{n-1} f_n(j) z^j, \tag{7}$$

$$f_n(j) = b_j - b_{n+1}a_{j-1} - b_n a_j + b_{n+1}a_j a_{n-1}. \tag{8}$$

Умовою відсутности синґулярностей у потенціялі $V(x)$ є

$$f_n(j) = 0, \ j = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{9}$$

Тоді, розв'язавши ці рівняння відносно a_j, можна знайти $(n+1)$ хвильову функцію для потенціялу $V(x)$ [2]

$$V(x) = y^2 - y' + b_{n+1}z. \tag{10}$$

А. Потенціял з $(n+2)$ радіяльними функціями

Узагальнемо (5) на випадок, коли

$$p_n'' - 2yp_n' = \sum_{j=0}^{n+2} b_j z^j. \tag{11}$$

Підставивши (3) в (11), отримаємо таке рівняння:

$$(z'' - 2yz') \sum_{j=1}^{n} a_j j z^{j-1} + z'^2 \sum_{j=1}^{n} a_j j(j-1) z^{j-2}$$
$$= \sum_{j=0}^{n+2} b_j z^j, \tag{12}$$

звідси випливає, що

$$z'' - 2yz' = q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + q_3 z^3, \tag{13}$$

$$z'^2 = B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + B_4 z^4, \tag{14}$$

де q_i і B_i — константи. Поділивши (11) на (3), отримаємо:

$$\frac{p_n'' - 2yp_n'}{p_n} = b_{n+2}z^2 + (b_{n+1} - b_{n+2}a_{n-1})z + b_n$$
$$-b_{n+1}a_{n-1} + b_{n+2}a_{n-1}^2 - b_{n+2}a_{n-2} + \frac{R_n}{p_n}, \tag{15}$$

де поліном R_n має вигляд

$$R_n = \sum_{j=0}^{n-1} f_n(j) z^j, \tag{16}$$

$$f_n(j) = b_j - b_{n+2}a_{j-2} - b_{n+1}a_{j-1} + b_{n+2}a_{n-1}a_{j-1}$$
$$+b_{n+2}a_j a_{n-2} - b_n a_j + b_{n+1}a_j a_{n-1} - b_{n+2}a_{n-1}^2 a_j. \tag{17}$$

Умовою відсутности синґулярностей у потенціялі $V(x)$ є

$$f_n(j) = 0, \ j = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{18}$$

Тоді потенціял $V(x)$ і енерґія E набудуть форми

$$V(x) = y^2 - y' + b_{n+2}z^2 + (b_{n+1} - b_{n+2}a_{n-1})\, z, \tag{19}$$

$$E = -b_n + b_{n+2}a_{n-2} + b_{n+1}a_{n-1} - b_{n+2}a_{n-1}^2. \tag{20}$$

З порівняння (10) і (19) видно, що потенціял (19) для кожного стану відрізняється останнім доданком. Представимо цей доданок у вигляді власних значень квадрата моменту кількости руху, помножених на

$1/x^2$. Для цього покладемо

$$B_0 = B_1 = B_2 = B_4 = 0,\ B_3 = 1,$$

тоді з (14) випливає, що

$$z = \frac{4}{x^2}. \tag{21}$$

Розглянемо простий випадок: $n = 1$, тоді знайдемо $(n+2) = 3$ власні стани:

$$\psi(x,\, a_0) = C\,(z + a_0)\exp\left(-\int y(x)\,dx\right). \tag{22}$$

Крім того, із (12) видно, що $q_i = b_i$. Із (13) випливає, що

$$y(x) = \frac{4b_3}{x^3} + \left(b_2 - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{x} + \frac{b_1}{4}x + \frac{b_0}{16}x^3. \tag{23}$$

У випадку $n = 1$ умова відсутности в потенціялі синґулярностей (18) запишеться так:

$$b_0 - b_1 a_0 + b_2 a_0^2 - b_3 a_0^3 = 0,$$

звідси знайдемо три значенння $a_0^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$. Підставивши їх, а також (21) і (23) у (19) і (20), отримаємо три потенціяли:

$$\begin{aligned} V_i(x) &= \frac{16b_3^2}{x^6} + \frac{b_3(8b_2+16)}{x^4} \\ &+ \frac{b_2^2 + 2b_2 + 2b_1b_3 - 4b_3a_0^{(i)} + 3/4}{x^2} \\ &+ \left(\frac{b_1^2}{16} + \frac{b_0b_2}{8} - \frac{3b_0}{8}\right)x^2 + \frac{b_0b_1}{32}x^4 + \frac{b_0^2}{256}x^6, \end{aligned} \tag{24}$$

з енерґетичними рівнями

$$E_i = -\frac{b_0b_3}{2} - \frac{b_1b_2}{2} + b_2a_0^{(i)} - b_3(a_0^{(i)})^2. \tag{25}$$

Якщо записати коефіцієнт при $1/x^2$, яким відрізняються потенціяли (24), у вигляді $-4b_3a_0^{(i)} = A + \ell_i(\ell_i+1)$, $i = 1, 2, 3$ (A — константа, що визначається через орбітальні квантові числа ℓ_i), то, використовуючи (22), отримаємо три радіяльні функції для потенціялу, який уже не залежить від значень $a_0^{(i)}$, тобто є однаковим для всіх станів. Наведемо конкретний вигляд потенціялу, енерґетичних рівнів та радіяльних функцій у простому випадку, коли $b_0 = 0$, $\ell_1 = 1$, $\ell_2 = 2$, $\ell_3 = 0$, тоді знайдемо, що $a_0^{(1)} = 0$, $a_0^{(2)} = -1/b_3$, $a_0^{(3)} = 1/(2b_3)$, $A = -2$, $b_1 = -1/(2b_3)$, $b_2 = -1/2$.

Потенціял у цьому випадку буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} U(x) &= V_i(x) - \frac{\ell_i(\ell_i+1)}{x^2} \\ &= \frac{16b_3^2}{x^6} + \frac{12b_3}{x^4} + \frac{x^2}{64b_3^2} - \frac{3}{x^2}, \end{aligned} \tag{26}$$

енерґетичні рівні

$$E_{\ell=\ell_1} = -\frac{1}{8b_3}, \tag{27}$$

$$E_{\ell=\ell_2} = E_{\ell=\ell_3} = -\frac{5}{8b_3}, \tag{28}$$

радіяльні функції ($R_\ell(x) = \psi(x,\, a_0^{(i)})/x$, де $\psi(x,\, a_0^{(i)})$ визначається з (22)):

$$R_{\ell=\ell_1}(x) = \frac{\psi(x,\, a_0^{(1)})}{x} = \frac{C_1}{x}\exp\left(\frac{2b_3}{x^2} + \frac{x^2}{16b_3}\right), \tag{29}$$

$$\begin{aligned} R_{\ell=\ell_2}(x) &= \frac{\psi(x,\, a_0^{(2)})}{x} \\ &= C_2\left(x - \frac{4b_3}{x}\right)\exp\left(\frac{2b_3}{x^2} + \frac{x^2}{16b_3}\right), \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} R_{\ell=\ell_3}(x) &= \frac{\psi(x,\, a_0^{(3)})}{x} \\ &= C_3\left(x + \frac{8b_3}{x}\right)\exp\left(\frac{2b_3}{x^2} + \frac{x^2}{16b_3}\right), \end{aligned} \tag{31}$$

які задовольняють радіяльне рівняння Шредінґера:

$$-\frac{1}{x}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(xR(x)\right) + \left(\frac{\ell(\ell+1)}{x^2} + U(x) - E\right)R(x) = 0. \tag{32}$$

Константи C_i, $i = 1, 2, 3$ можна знайти з умови нормування ($b_3 < 0$):

$$\int_0^\infty R^2_{\ell=\ell_i}(x)\,x^2\,dx = 1. \tag{33}$$

Відзначимо, що для потенціялу (24) (після виділення в ньому доданка, який дорівнює власним значенням оператора квадрата моменту кількости руху, помноженим на $1/x^2$) можна знайти не лише три радіяльні функції, а — $(n+2)$.

B. Потенціял з двома радіяльними функціями

Розгляньмо випадок, коли

$$p_n'' - 2yp_n' = \sum_{j=0}^{n+3} b_j z^j \tag{34}$$

і нехай $n = 1$, тоді

$$z'' - 2yz' = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + b_4 z^4. \tag{35}$$

Крім того, подібно до (14)

$$z'^2 = B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + B_4 z^4 + B_5 z^5. \tag{36}$$

Нехай

$$z = 1/x, \tag{37}$$

тоді відмінним від нуля є лише коефіцієнт: $B_4 = 1$. Будемо вважати, що $b_1 = b_3 = 0$. У цьому випадку вдалося знайти дві радіяльні функції для нового потенціялу.

Із (35) можна знайти, що

$$y(x) = \frac{b_0}{2}x^2 + \frac{b_2}{2} + \frac{b_4}{2x^2} - \frac{1}{x}. \tag{38}$$

Тоді, враховуючи (37), (38), із (4) випливає, що новий потенціял буде мати вигляд:

$$V_i(x) = \frac{b_0^2}{4}x^4 + b_4\left(\frac{b_2}{2} - a_0^{(i)}\right)\frac{1}{x^2} + \frac{b_0 b_2}{2}x^2 + \frac{b_4^2}{4x^4} - 2b_0 x + \frac{b_4 (a_0^{(i)})^2}{x} + \frac{b_4}{x^3}, \tag{39}$$

де вже враховано умову відсутности синґулярностей у потенціялі

$$b_4 a_0^4 + b_2 a_0^2 + b_0 = 0, \tag{40}$$

енерґетичні рівні:

$$E_i = -\frac{b_2^2}{4} - \frac{b_0 b_4}{2} + \left(b_2 + b_4 (a_0^{(i)})^2\right) a_0^{(i)}. \tag{41}$$

Із (39) видно, що корені $a_0^{(i)}$ рівняння (40) містяться як коефіцієнти при $1/x^2$ і $1/x$. З цих чотирьох коренів візьмемо два таких, що їхні квадрати є рівними. Тоді потенціяли $V_i(x)$ будуть відрізнятися лише коефіцієнтами біля $1/x^2$. Нехай цими коренями будуть:

$$a_0^{(1,\,2)} = \pm\sqrt{-\frac{b_2}{2b_4} - \frac{1}{2b_4}\sqrt{b_2^2 - 4b_0 b_4}}. \tag{42}$$

Тоді потенціял набуде форми

$$V_i(x) = \frac{b_0^2}{4}x^4 + \frac{b_0 b_2}{2}x^2 - 2b_0 x - \frac{b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4b_0 b_4}}{2x} + \frac{b_2 b_4}{2x^2} + \frac{b_4^2}{4x^4} + \frac{b_4}{x^3} - \frac{b_4 a_0^{(i)}}{x^2}, \tag{43}$$

рівні енерґії

$$E_{1,\,2} = -\frac{b_2^2}{4} - \frac{b_0 b_4}{2} + \frac{b_0}{a_0^{(1,\,2)}}. \tag{44}$$

Якщо представити останній доданок (43) таким чином:

$$-b_4 a_0^{(i)} = A + \ell_i(\ell_i + 1),\ i = 1,\,2, \tag{45}$$

то отримаємо дві радіяльні функції:

$$R_{\ell=\ell_1}(x) = \frac{\psi(x,\,a_0^{(1)})}{x} = C_1\left(\frac{1}{x} + a_0^{(1)}\right) \times \exp\left(-\frac{b_0}{6}x^3 - \frac{b_2}{2}x + \frac{b_4}{2x}\right), \tag{46}$$

$$R_{\ell=\ell_2}(x) = \frac{\psi(x,\,a_0^{(2)})}{x} = C_2\left(\frac{1}{x} + a_0^{(2)}\right) \times \exp\left(-\frac{b_0}{6}x^3 - \frac{b_2}{2}x + \frac{b_4}{2x}\right), \tag{47}$$

$$b_0 > 0,\ b_4 < 0,$$

для потенціялу

$$U(x) = V_i(x) - \frac{\ell_i(\ell_i+1)}{x^2} = \frac{b_0^2}{4}x^4 + \frac{b_0 b_2}{2}x^2 - 2b_0 x - \frac{b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4b_0 b_4}}{2x} + \frac{b_2 b_4 + 2A}{2x^2} + \frac{b_4^2}{4x^4} + \frac{b_4}{x^3}. \tag{48}$$

Константи $C_i,\ i = 1,\,2$ також можна знайти з умови нормування (33). Із (45) отримуємо, що

$$A = -\frac{1}{2}\left(\ell_1(\ell_1+1) + \ell_2(\ell_2+1)\right), \tag{49}$$

$$b_0 = \frac{1}{4b_4}\left(b_2^2 - \frac{(\Delta\ell^2 + 2b_2b_4)^2}{4b_4^2}\right), \tag{50}$$

де $\Delta\ell = \ell_1(\ell_1+1) - \ell_2(\ell_2+1),\ \Delta\ell > 0$.

Отже, для радіяльного рівняння Шредингера (32) з потенціялом (48) знайдено дві радіяльні функції (46), (47) і відповідні їм енергетичні рівні (44).

III. МЕТОД ТОЧКОВОГО КАНОНІЧНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ

Зробимо заміну змінних $x = f(\xi)$ у рівнянні Шредингера (1) і введемо нову хвильову функцію [2]

$$\tilde{\psi}(\xi) = \frac{\psi(x)}{\sqrt{f'(\xi)}}, \tag{51}$$

яка задовольняє таке рівняння Шредингера:

$$-\frac{d^2\tilde{\psi}(\xi)}{d\xi^2} + \left[\tilde{V}(\xi) - \tilde{E}\right]\tilde{\psi}(\xi) = 0, \tag{52}$$

де

$$\tilde{V}(\xi) - \tilde{E} = f'^2(\xi)\left[V\left(f(\xi)\right) - E\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\frac{f''^2(\xi)}{f'^2(\xi)} - \frac{f'''(\xi)}{f'(\xi)}\right). \tag{53}$$

У праці [1] було знайдено таку сім'ю потенціялів, що її потенціяли мають одне і те ж саме власне значення енергії. Ці потенціяли виглядають так:

$$V(x) = -\frac{b^2}{\operatorname{ch}^6\alpha x} + \frac{b(2a+3b+\alpha(2k+3))}{\operatorname{ch}^4\alpha x} - \frac{(a+3b)(a+b+\alpha)+2k\alpha b+\lambda}{\operatorname{ch}^2\alpha x}, \tag{54}$$

з енергією

$$E = -(a+b)^2, \tag{55}$$

де α, a, b — константи; із хвильовими функціями

$$\psi(x) = Cp_k(\operatorname{th}\alpha x)(\operatorname{ch}\alpha x)^{-(a+b)/\alpha}\exp\left(\frac{b}{2\alpha}\operatorname{th}^2\alpha x\right), \tag{56}$$

де C — константа нормування,

$$p_k(\operatorname{th}\alpha x) = c_0 + c_2\operatorname{th}^2\alpha x + \ldots + c_{k-2}\operatorname{th}^{k-2}\alpha x + \operatorname{th}^k\alpha x,$$

якщо k приймає парні значення;

$$p_k(\operatorname{th}\alpha x) = c_1\operatorname{th}\alpha x + c_3\operatorname{th}^3\alpha x + \ldots + c_{k-2}\operatorname{th}^{k-2}\alpha x + \operatorname{th}^k\alpha x,$$

якщо k набуває непарних значень. Коефіцієнти c_i полінома p_k і λ можна знайти, розв'язавши систему алгебричних рівнянь, яка виникає після підстановки (54), (55), (56) в рівняння Шредингера (1). Причому у випадку парних k для λ виникає алгебричне рівняння степеня $N = k/2+1,\ k = 0, 2, 4, \ldots$. У разі непарних k, для λ виникає рівняння степеня $N = (k+1)/2,\ k = 1, 3, 5, \ldots$. Покладемо для простоти: $\alpha = 1$. Тоді для $k = 0$ отримаємо, що

$$p_0 = 1,\ \lambda = 0, \tag{57}$$

для $k = 1$

$$p_1 = \operatorname{th} x,\ \lambda = 2a+2, \tag{58}$$

для $k = 2$

$$p_2 = c_0 + \operatorname{th}^2 x,\ c_0 = \frac{4a+6-\lambda}{4b}, \tag{59}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda(2a+3) - 8b = 0, \tag{60}$$

для $k = 3$

$$p_3 = c_1\operatorname{th} x + \operatorname{th}^3 x,\ c_1 = \frac{6a+12-\lambda}{4b}, \tag{61}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda(4a+7) + 36a + 12a^2 - 24b + 24 = 0 \tag{62}$$

і так далі.

A. Точкове канонічне перетворення потенціялу $\mathbf{V}(\mathrm{x})$

Зробимо точкове перетворення так, щоб коефіцієнти біля $\operatorname{ch}^2 x$ у формулі (54) давали власні значення енергії вже нового потенціялу. Цього можна досягти, зробивши таке перетворення:

$$x = \ln\operatorname{tg}\frac{\xi}{2}. \tag{63}$$

Із (53) випливає, що новий потенціял набуде вигляду

$$\tilde{V}(\xi) = -b^2\cos^4\xi - b(2a+b+2k+3)\cos^2\xi + \frac{(a+b)^2-1/4}{\sin^2\xi}, \quad (64)$$

областю визначення тут є відрізок $\xi \in [0,\pi]$, якщо $(a+b)^2 \neq 1/4$; нові значення енерґії

$$\tilde{E}_i = (a+b)^2 + a + \lambda_i + \frac{1}{4}, \quad (65)$$

де $i = 0, 2, \ldots, k$, якщо k — парне; $i = 1, 3, \ldots, k$, якщо k — непарне.

Нові хвильові функції отримаємо, використавши (51):

$$\tilde{\psi}(\xi) = \tilde{C} p_k(\cos\xi)(\sin\xi)^{a+b+1/2}\exp\left(\frac{b}{2}\cos^2\xi\right), \quad (66)$$

де $\tilde{C}$ — константа нормування,

$$p_k(\cos\xi) = c_0 + c_2\cos^2\xi + \ldots + c_{k-2}\cos^{k-2}\xi + \cos^k\xi,$$

якщо k — парне;

$$p_k(\cos\xi) = c_1\cos\xi + c_3\cos^3\xi + \ldots + c_{k-2}\cos^{k-2}\xi + \cos^k\xi,$$

якщо k — непарне.

Для потенціялу (64) можна знайти $N = [k/2]+1$ власні стани. Наприклад, для $k=2$ хвильові функції основного та першого збудженого рівнів мають вигляд

$$\tilde{\psi}_{0,2}(\xi) = \tilde{C}_{0,\,2}\left(4b\cos^2\xi + 2a + 3 \pm \sqrt{4a^2+12a+8b+9}\right)(\sin\xi)^{a+b+1/2}\exp\left(\frac{b}{2}\cos^2\xi\right), \quad (67)$$

енерґетичні рівні основного та другого збудженого станів

$$\tilde{E}_{0,2} = (a+b)^2 + 3a + \frac{13}{4} \mp \sqrt{4a^2+12a+8b+9}. \quad (68)$$

Для $k=3$ хвильові функції першого та третього збуджених рівнів:

$$\tilde{\psi}_{1,3}(\xi) = \tilde{C}_{1,3}\left(4b\cos^2\xi + 2a + 5 \pm \sqrt{4a^2+20a+24b+25}\right)\cos\xi(\sin\xi)^{a+b+1/2}\exp\left(\frac{b}{2}\cos^2\xi\right), \quad (69)$$

відповідні рівні енерґії:

$$\tilde{E}_{1,3} = (a+b)^2 + 5a + \frac{29}{4} \mp \sqrt{4a^2+20a+24b+25}. \quad (70)$$

З умови квадратичної інтеґровности хвильових функцій випливає, що $a+b+1/2>0$. Розглянемо поведінку потенціялу (64) в області $[0,\pi]$. Профілем цього потенціялу є яма з двома мінімумами (рис. 1a), якщо останній доданок у (64) є додатним. При виконанні умови

$$b \leq \frac{1}{4}\frac{4a^2-1}{2k+3} \quad (71)$$

бар'єр зникає і утворюється яма з одним мінімумом (рис. 1b).

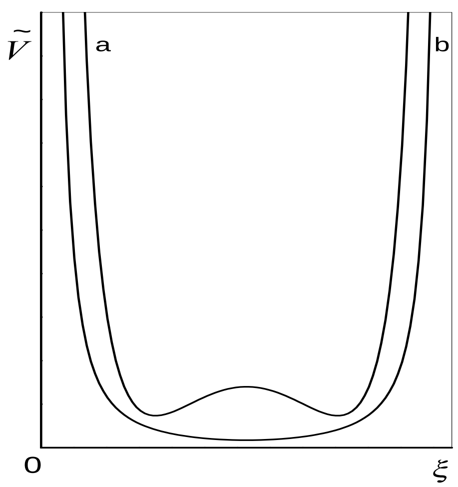

Рис. 1. Профілі потенціялу $\tilde{V}(\xi)$

B. Дуальне перетворення потенціялу $\tilde{\mathbf{V}}(\xi)$

Зробимо дуальне перетворення [14] потенціялу (64)

$$\xi = i\zeta, \tag{72}$$

тоді отримаємо рівняння Шредингера у змінних ζ

$$-\frac{d^2\tilde{\phi}(\zeta)}{d\zeta^2} + \left[\tilde{W}(\zeta) - \tilde{B}\right]\tilde{\phi}(\zeta) = 0, \tag{73}$$

де новий потенціял $\tilde{W}(\zeta)$ має вигляд

$$\tilde{W}(\zeta) = b^2 \operatorname{ch}^4\zeta + b(2a+b+2k+3)\operatorname{ch}^2\zeta + \frac{(a+b)^2 - 1/4}{\operatorname{sh}^2\zeta}, \tag{74}$$

з енерґетичними рівнями

$$\tilde{B}_i = -(a+b)^2 - a - \lambda_i - \frac{1}{4} \tag{75}$$

та хвильовими функціями

$$\tilde{\phi}(\zeta) = \bar{C} p_k(\operatorname{ch}\zeta)(\operatorname{sh}\zeta)^{a+b+1/2}\exp\left(\frac{b}{2}\operatorname{ch}^2\zeta\right), \tag{76}$$

де $\bar{C}$ — константа нормування,

$$p_k(\operatorname{ch}\zeta) = c_0 + c_2\operatorname{ch}^2\zeta + \ldots + c_{k-2}\operatorname{ch}^{k-2}\zeta + \operatorname{ch}^k\zeta,$$

якщо k — парне;

$$p_k(\operatorname{ch}\zeta) = c_1\operatorname{ch}\zeta + c_3\operatorname{ch}^3\zeta + \ldots + c_{k-2}\operatorname{ch}^{k-2}\zeta + \operatorname{ch}^k\zeta,$$

якщо k — непарне.

Для потенціялу $\tilde{W}(\zeta)$ (74) також можна знайти $N = [k/2] + 1$ власних станів, причому можна знайти послідовно N станів. Областю визначення цього потенціялу при

$$(a+b)^2 \neq \frac{1}{4} \tag{77}$$

є піввісь $\zeta \in [0, \infty)$.

Розглянемо конкретний вигляд хвильових функцій й енерґетичних рівнів у випадку $k = 2$. Хвильові функції основного та першого збудженого станів

$$\tilde{\phi}_{0,1}(\zeta) = \bar{C}_{0,1}\Big(4b\operatorname{ch}^2\zeta + 2a + 3 \pm \sqrt{4a^2 + 12a + 8b + 9}\Big) \times (\operatorname{sh}\zeta)^{a+b+1/2}\exp\left(\frac{b}{2}\operatorname{ch}^2\zeta\right), \tag{78}$$

відповідні енерґетичні рівні

$$\tilde{B}_{0,1} = -(a+b)^2 - 3a - \frac{13}{4} \mp \sqrt{4a^2 + 12a + 8b + 9}, \tag{79}$$

аналогічно можна знайти хвильові функції та рівні енерґії для $k = 3, 4, \ldots$.

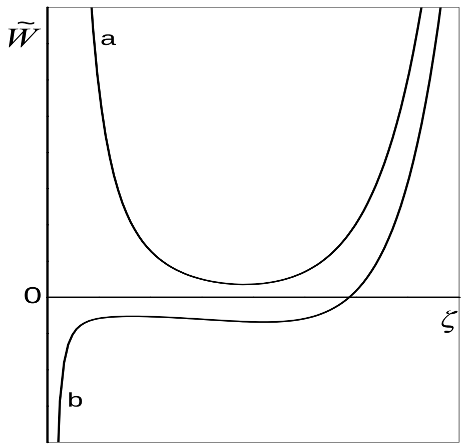

Рис. 2. Профілі потенціялу $\tilde{W}(\zeta)$

З умови квадратичної інтеґровности хвильових функцій випливає, що $b < 0$, $a + b + 1/2 > 0$.

Розгляньмо поведінку потенціялу $\tilde{W}(\zeta)$ біля $\zeta = 0$:

$$\lim_{\zeta\to 0}\tilde{W}(\zeta) = +\infty, \quad \text{якщо} \quad a + b > 1/2, \quad (\text{рис. 2a});$$

$$\lim_{\zeta\to 0}\tilde{W}(\zeta) = -\infty, \text{ якщо } -1/2 < a + b < 1/2, (\text{рис. 2b}).$$

Отже, профіль потенціялу $\tilde{W}(\zeta)$ (74) (як і потенціялу $\tilde{V}(\xi)$ (64)) суттєво залежить від значень параметрів.

Якщо (77) не виконується, то отримаємо

$$\tilde{W}(\zeta) = b^2\operatorname{ch}^4\zeta + b(2k - b + 3 \pm 1)\operatorname{ch}^2\zeta. \tag{80}$$

Цей потенціял стосується задачі про легковісний парамагнетик у перпендикулярному магнетному полі [15–17].

IV. ВИСНОВКИ

У праці узагальнено поліномний підхід Турбінера для випадку, коли можна знайти $(n+2)$ власні стани, де n – максимальний степінь полінома в (3). Унаслідок цього знайдено нові квазіточно розв'язувані потенціяли типу (24) і (26) з $(n+2)$ радіяльними функціями. У праці явно виписано три радіяльні функції для потенціялу (26), причому два енерґетичні рівні збігаються. Також для нового потенціялу (48) знайдено дві радіяльні функції.

Використовуючи сім'ю потенціялів з однаковим енерґетичним рівнем, яка була отримана в [1], і точкові канонічні перетворення, одержано N–рівневі багатопрофільні потенціяли (64) і (74).

Для значень $b \leq \frac{4a^2-1}{4(2k+3)}$ потенціял (64) має вигляд одинарної ями, а при $b > \frac{4a^2-1}{4(2k+3)}$ — ями з двома мінімумами. Він є узагальненням потенціялу, який розглянуто в [15–17].

У цих працях такого типу потенціял виникав при розгляді спінових систем із наступним переходом до координатного представлення. Зауважимо також, що потенціяли (64) і (74) можуть мати широке застосування, оскільки їхні профілі характерні для багатьох задач.

Автор щиро вдячний В. М. Ткачукові за обговорення праці та корисні зауваження.

[1] А. М. Турбинер, Журн. эксп. теор. физ. **94**, 33 (1988).
[2] A. Gangopadhyaya, A. Khare, U. P. Sukhatme, preprint hep–th/9508022 (1995).
[3] A. M. Salem, R. Montemayor, Phys. Rev. A **43**, 1169 (1991).
[4] C. M. Bender, S. Boettcher, preprint physics/9712001 (1998).
[5] G. Junker, P. Roy, Phys. Lett. A **232**, 155 (1997).
[6] P. Roy, Y. P. Varshni, Mod. Phys. Lett. A **6**, 1257 (1991).
[7] V. M. Tkachuk, Phys. Lett. A **245**, 177 (1998).
[8] T. V. Kuliy, V. M. Tkachuk, J. Phys. A **32**, 2157 (1999).
[9] V. M. Tkachuk, J. Phys. A **32**, 1299 (1999).
[10] H. C. Rosu, preprint quant–ph/9809056 (1998).
[11] F. Finkel, A. González-López, N. Kamran, M. A. Rodríguez, preprint math–ph/9809013 (1998).
[12] L. Skála, J. Čižek, J. Dvořák , V. Špirko, Phys. Rev. A **53**, 2009 (1996).
[13] M. W. Lucht, P. D. Jarvis, Phys. Rev. A **47**, 817 (1993).
[14] A. Krajewska, A. Ushveridze, Z. Walczak, Phys. Lett. A **12**, 1225 (1997).
[15] О. Б. Заславский, В. В. Ульянов, В. М. Цукерник, Физ. низк. темп. **9**, 511 (1983).
[16] О. Б. Заславский, В. В. Ульянов, Журн. эксп. теор. физ. **87**, 1724 (1984).
[17] В. В. Ульянов, О. Б. Заславский, Ю. В. Василевская, Физ. низк. темп. **23**, 110 (1997).

POLYNOMIAL APPROACH AND POINT CANONICAL TRANSFORMATIONS IN THE CONSTRUCTING OF QUASI–EXACTLY SOLVABLE QUANTUM MECHANICAL POTENTIALS

B. M. Markovych
State University "Lvivska Politekhnika",
12 S. Bandery Str., Lviv, UA-79013, Ukraine

In this paper the polynomial approach for the constructing of quasi–exactly solvable potentials of Schrödinger equation is generalized. On this basis new potentials with n wave functions and energy levels known are found.

Two quasi–exactly solvable potentials with N eigenstates found (N is an integer number, depending on the parameters of potentials) were derived with the help of point canonic transformations. These potentials differ from the ones that were solved exactly by the feature in that their shape depends on the relation between the potentials parameters. Thus in the potential with two wells the barrier vanishes for some values of the parameters.