JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 4, No. 4 (2000) p. 380–386

ВИКЛЮЧЕННЯ ПОЛЬОВИХ СТУПЕНІВ ВІЛЬНОСТИ В РЕЛЯТИВІСТИЧНІЙ СИСТЕМІ ТОЧКОВИХ ЧАСТИНОК ІЗ БЕЗМАСОВИМ СКАЛЯРНИМ ПОЛЕМ

А. Назаренко
Інститут фізики конденсованих систем НАН України,
вул. Свєнціцького, 1, Львів, 79011, Україна

(Отримано 20 червня 2000 р.)

Розроблено процедуру редукції польових ступенів вільности для системи точкових частинок із безмасовим скалярним полем у рамках гамільтонового формалізму з в'язями в лінійному наближенні за константою взаємодії. Побудовано канонічну реалізацію алґебри Пуанкаре системи в термінах частинкових змінних. Установлено співвідношення між фізичними та канонічними координатами частинок.

Ключові слова: релятивістична динаміка, точкові частинки, скалярне поле, алґебра Пуанкаре, в'язі.

PACS number(s): 03.30.+p, 03.50, 11.30.Cp

I. ВСТУП

Зазвичай взаємодія в релятивістичних системах частинок описується за допомогою полів. Але іноді необхідно виключити польові ступені вільности й досліджувати властивості таких систем у термінах частинкових змінних. Процедура редукції полів базується на підставлянні розв'язків польових рівнянь руху в рівняння руху частинок і переході до опису в термінах прямої взаємодії між частинками. Таку процедуру можна виконувати як на класичному [1–3], так і на квантовому рівнях [4]. Переважно виключення полів здійснюється в інтеґралі дії системи. У класичній механіці підстановка формального розв'язку польових рівнянь у дію системи приводить до дії типу Фокера. Прикладом такої теорії є електродинаміка Вілера–Фейнмана [1,5]. Слід зазначити, що знаходження розв'язку польових рівнянь пов'язане з проблемою вибору функції Ґріна. Цей вибір робиться згідно з принципом причинности, який вимагає накладання додаткових умов. При переході до гамільтонового опису таких систем нелокальність дії стає джерелом серйозних труднощів [6]. Хоча ця проблема може бути розв'язана за допомогою наближених методів [2,6], варто розглянути альтернативний підхід, що полягає у виключенні польових ступенів вільности *після* переходу до гамільтонового опису [3,7]. Таким чином, одержуємо релятивістичний опис системи частинок із прямою взаємодією безпосередньо в термінах канонічних змінних. Правда, на гамільтоновому рівні польові рівняння є нелінійними, що також вимагає застосування певної пертурбаційної техніки. Залишається і проблема вибору функції Ґріна. Однак у лінійному наближенні за константою взаємодії відмінність між розв'язками з різними функціями Ґріна не проявляється.

У нашій роботі в рамках гамільтонового формалізму розглядаємо редукцію польових ступенів вільности у класичній релятивістичній системі точкових частинок, взаємодія між якими переноситься безмасовим скалярним полем. Вихідним пунктом є теоретико–польова дія системи частинок із полем у чотиривимірному просторі–часі. Вона має калібрувальну інваріянтність, пов'язану з довільністю в параметризації світових ліній частинок. Цю калібрувальну свободу ми фіксуємо за допомогою певного вибору форми релятивістичної динаміки [8]. Подальший опис будуємо в миттєвій формі. Спершу ми знаходимо канонічну реалізацію алґебри Пуанкаре, у якій частинкові та польові канонічні змінні розглядаємо на рівних правах. Далі ми реалізуємо процедуру редукції польових змінних, яка складається з трьох кроків: (1) знаходження розв'язку польових рівнянь руху в першому наближенні за константою взаємодії; (2) перехід до нових канонічних змінних, серед яких будуть вільні поля (що відповідають розв'язкам однорідних польових рівнянь); (3) фіксування вільних полів за допомогою накладання в'язей. Особливістю нашого підходу є застосування методу Дірака для виключення в'язей [9,10]. Таким чином, одержуємо канонічну реалізацію алґебри Пуанкаре в термінах лише частинкових змінних.

II. ТРИВИМІРНИЙ ОПИС СИСТЕМИ ЧАСТИНОК ЗІ СКАЛЯРНИМ ПОЛЕМ

Розглядатимемо систему N точкових частинок, що описуються світовими лініями у просторі–часі Мінковського [16]

$$\gamma_a : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{M}_4, \quad \tau \mapsto x_a^\mu(\tau). \tag{2.1}$$

Носієм взаємодії є поле зі скалярним потенціялом $\varphi(x)$. Динамічні властивості такої системи повністю визначаються функціоналом дії

$$S = -\sum_{a=1}^{N}\int d\tau_a[m_a - \alpha_a\varphi(x_a(\tau_a))]\sqrt{\tilde{u}_a^2(\tau_a)}$$
$$+\frac{1}{2}\int \partial_\mu\varphi(x)\partial^\mu\varphi(x)d^4x, \qquad (2.2)$$

де m_a, α_a — маса та константа взаємодії a-ї частинки, відповідно, $\tilde{u}_a^\mu(\tau_a) = dx_a^\mu(\tau_a)/d\tau_a$, $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$.

Явна Пуанкаре–інваріянтність дії (2.2) приводить до збереження симетричного тензора енерґії–імпульсу системи:

$$\theta^{\mu\nu}(x) = \sum_{a=1}^{N}\int m_a\frac{\tilde{u}_a^\mu(\tau_a)\tilde{u}_a^\nu(\tau_a)}{\sqrt{\tilde{u}_a^2(\tau_a)}}\delta^4(x - x_a(\tau_a))d\tau_a$$
$$+\partial^\mu\varphi(x)\partial^\nu\varphi(x) - \frac{\eta^{\mu\nu}}{2}\partial_\lambda\varphi(x)\partial^\lambda\varphi(x) \qquad (2.3)$$

— на розв'язках рівнянь руху $\partial_\nu\theta^{\mu\nu} = 0$.

Дія (2.2) має калібрувальну свободу, яка пов'язана з довільністю параметризації частинкових світових ліній (хронометрична інваріянтність). Ми зафіксуємо цю свободу за допомогою концепції форм релятивістської динаміки Дірака.

Геометрично форма релятивістської динаміки визначається як шарування $\Sigma = \{\Sigma_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ простору–часу Мінковського просторовоподібними або ізотропними гіперповерхнями

$$\Sigma_t = \{x \in \mathbb{M}_4 \mid \sigma(x) = t\}; \qquad (2.4)$$
$$0 \leq \eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\sigma)(\partial_\nu\sigma). \qquad (2.5)$$

Як випливає з умови (2.5), $\partial_0\sigma \neq 0$ і рівняння гіперповерхні (2.4) може бути розв'язане щодо x^0 у вигляді:

$$x^0 = f(t,\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3). \qquad (2.6)$$

Формула (2.6) визначає $3+1$ розщеплення простору–часу Мінковського, яке відповідає шаруванню Σ.

Тоді співвідношення

$$x^0 = x_a^0(t) = f(t, \mathbf{x}_a(t)), \qquad x^i = x_a^i(t) \qquad (2.7)$$

визначають параметричне рівняння світової лінії в заданій формі динаміки. Змінна t відіграє роль еволюційного параметра системи частинок. Таким чином, вибір форми динаміки еквівалентний фіксуванню параметрів $\tau_a = t$ частинкових світових ліній у хронометрично інваріянтній дії (2.2). У полях застосування концепції форм релятивістської динаміки приводить до заміни системи координат $(x^0,\mathbf{x}) \mapsto (t,\mathbf{x})$. Так одержуємо опис системи з єдиним еволюційним параметром, що дозволяє ввести одночасову функцію Лаґранжа. Детальніший аналіз форм релятивістської динаміки можна знайти в [11–13].

Будемо розглядати систему частинок зі скалярним полем у миттєвій формі динаміки, тобто покладемо

$$x^0 = t. \qquad (2.8)$$

Тоді дію системи перепишемо у вигляді

$$S = \int L(t)dt, \qquad (2.9)$$

де функцію Лаґранжа системи $L(t)$ запишемо так:

$$L(t) = -\sum_{a=1}^{N}[m_a - \alpha_a\varphi(t,\mathbf{x}_a(t))]\sqrt{1-\mathbf{u}_a^2(t)}$$
$$+\frac{1}{2}\int[\dot{\varphi}(t,\mathbf{x})^2 - (\boldsymbol{\nabla}\varphi(t,\mathbf{x}))^2]d^3x. \qquad (2.10)$$

Тут $\mathbf{u}_a = d\mathbf{x}_a/dt$; $\boldsymbol{\nabla} = (\partial_i)$. Динамічними змінними задачі є частинкові координати $\mathbf{x}_a(t)$, потенціял $\varphi(t,\mathbf{x})$ та їхні перші похідні $\mathbf{u}_a(t)$, $\dot{\varphi}(t,\mathbf{x})$ за еволюційним параметром t.

У цій формі динаміки тензор енерґії–імпульсу (2.3) набуває вигляду:

$$\theta^{\mu\nu}(t,\mathbf{x}) = \sum_{a=1}^{N} m_a\frac{u_a^\mu(t)u_a^\nu(t)}{\sqrt{u_a^2(t)}}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a(t)) \qquad (2.11)$$
$$+\partial^\mu\varphi(t,\mathbf{x})\partial^\nu\varphi(t,\mathbf{x}) - \frac{\eta^{\mu\nu}}{2}\partial_\lambda\varphi(t,\mathbf{x})\partial^\lambda\varphi(t,\mathbf{x}),$$

де $u_a^\mu = (1,\mathbf{u}_a)$, $\partial_0\varphi(t,\mathbf{x}) \equiv \dot{\varphi}(t,\mathbf{x})$.

Закон збереження тензора (2.11) дозволяє ввести десять інтеґралів руху системи:

$$P^\mu = \int \theta^{\mu 0}(t,\mathbf{x})d^3x,$$
$$M^{\mu\nu} = \int\left(x^\mu\theta^{\nu 0}(t,\mathbf{x}) - x^\nu\theta^{\mu 0}(t,\mathbf{x})\right)d^3x. \qquad (2.12)$$

Розглядаючи змінні частинок та полів на еквівалентному рівні, ми побудуємо гамільтонів опис системи в миттєвій формі динаміки, знайдемо канонічну реалізацію алґебри Пуанкаре. Ми плануємо ефективно зменшити число ступенів вільности системи за рахунок виключення змінних полів згідно з польовими рівняннями руху Гамільтона.

III. ГАМІЛЬТОНІВ ОПИС СИСТЕМИ

Виходячи з лаґранжіяна (2.10), знайдемо канонічні імпульси нашої задачі

$$p_{ai}(t) = -\frac{\partial L(t)}{\partial u_a^i(t)} = \frac{(m_a - \alpha_a\varphi(t,\mathbf{x}_a(t)))u_{ai}(t)}{\sqrt{1-\mathbf{u}_a^2(t)}}, \qquad (3.1)$$

$$\pi(t,\mathbf{x}) = \frac{\delta L(t)}{\delta\dot{\varphi}(t,\mathbf{x})} = \dot{\varphi}(t,\mathbf{x}). \tag{3.2}$$

Дужки Пуассона між канонічними змінними вводимо так:

$$\{x_a^i(t), p_{bj}(t)\} = -\delta_{ab}\delta_j^i,$$
$$\{\varphi(t,\mathbf{x}), \pi(t,\mathbf{y})\} = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{3.3}$$

усі інші дужки дорівнюють нулеві.

Канонічний гамільтоніян системи позначаємо як

$$H = -\sum_{a=1}^{N} p_{ai}u_a^i + \int \pi\dot{\varphi}\, d^3x - L. \tag{3.4}$$

Після перетворень дістаємо вираз

$$H = \sum_{a=1}^{N} \sqrt{\mathbf{p}_a^2 + [m_a - \alpha_a\varphi(\mathbf{x}_a)]^2} + \frac{1}{2}\int [\pi^2 + (\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2] d^3x. \tag{3.5}$$

У термінах канонічних змінних частинок та полів інтеґрали руху (2.12) стають ґенераторами канонічної реалізації алґебри Пуанкаре

$$P^0 = \sum_{a=1}^{N} \sqrt{\mathbf{p}_a^2 + [m_a - \alpha_a\varphi(\mathbf{x}_a)]^2}$$
$$+\frac{1}{2}\int [\pi^2 + (\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2] d^3x, \tag{3.6}$$

$$P^k = \sum_{a=1}^{N} p_a^k + \int \pi\partial^k\varphi\, d^3x, \tag{3.7}$$

$$M^{k0} = \sum_{a=1}^{N} x_a^i \sqrt{\mathbf{p}_a^2 + [m_a - \alpha_a\varphi(\mathbf{x}_a)]^2}$$
$$+\frac{1}{2}\int x^i[\pi^2 + (\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2] d^3x - tP^k, \tag{3.8}$$

$$M^{ik} = \sum_{a=1}^{N} (x_a^i p_a^k - x_a^k p_a^i)$$
$$+\int (x^i\pi\partial^k\varphi - x^k\pi\partial^i\varphi) d^3x. \tag{3.9}$$

Вони задовольняють комутаційні співвідношення алґебри Пуанкаре в термінах дужок Пуассона (3.3):

$$\{P^\mu, P^\nu\} = 0,$$
$$\{P^\mu, M^{\nu\lambda}\} = \eta^{\mu\nu}P^\lambda - \eta^{\mu\lambda}P^\nu,$$
$$\{M^{\mu\nu}, M^{\lambda\sigma}\} = -\eta^{\mu\lambda}M^{\nu\sigma} + \eta^{\nu\lambda}M^{\mu\sigma}$$
$$-\eta^{\nu\sigma}M^{\mu\lambda} + \eta^{\mu\sigma}M^{\nu\lambda}. \tag{3.10}$$

Далі ми виключимо поля та переформулюємо одержані ґенератори (3.6)–(3.9) в термінах лише канонічних змінних частинок зі збереженням комутаційних співвідношень (3.10).

IV. ВИКЛЮЧЕННЯ ПОЛЬОВИХ СТУПЕНІВ ВІЛЬНОСТИ

У розділі II ми здійснили редукцію калібрувальних ступенів вільности, які пов'язані з хронометричною інваріянтністю, за допомогою фіксування $x^0 = f(t,\mathbf{x})$ і введення єдиного еволюційного параметра t. Зауважимо, що системи з різними $f(t,\mathbf{x})$ є фізично еквівалентними: їх гамільтонові описи пов'язані канонічним перетворенням. Тепер ми розглянемо редукцію іншого типу, яка полягає в ефективному зменшенні числа ступенів вільности системи, — редукцію полів. Таке перетворення не є канонічним. У результаті ми одержимо формулювання нашої системи в термінах змінних частинок. Таке формулювання особливо ефективне, коли процеси вільного випромінювання несуттєві, і поле виступає лише як носій взаємодії без власних фізичних ступенів вільности — відбувається обмін лише віртуальними квантами поля.

Процедура редукції польових ступенів вільности, яку ми реалізуємо, складається з трьох етапів. Перший полягає в знаходженні розв'язку рівнянь руху поля. У гамільтоновій механіці польові рівняння є нелінійними, тому вимагають застосування різних наближень. Ми використовуємо розклад за константою взаємодії. У такому підході виникає проблема вибору функції Ґріна (випереджуваної, запізнюваної чи симетричної). Така ж трудність існує і в лаґранжевому описі. Лише в першому наближенні за константою взаємодії розв'язки, знайдені для різних функцій Ґріна, збігаються між собою. Тут ми також обмежимось розглядом лінійного наближення. Загальний розв'язок польових рівнянь складатимуть із суми вільного поля, що задовольняє однорідне рівняння без джерел, та розв'язку неоднорідного рівняння, який виражається в термінах змінних частинок. На другому етапі необхідно знайти канонічне перетворення, після якого канонічними польовими змінними стануть змінні вільного поля. Ми розглядаємо поле лише як носій взаємодії між частинками, тому на третьому етапі фіксуємо вільне поле (покладаємо рівним нулеві) за допомогою в'язей, які редукуються згідно з методом Дірака.

Еволюцію польових змінних, яка ґенерується гамільтоніяном (3.5), описуємо системою гамільтонових рівнянь:

$$\dot{\varphi} = \pi, \quad \dot{\pi} = J + \Delta\varphi, \tag{4.1}$$

де скалярний струм J має вигляд

$$J = \sum_{a=1}^{N} \alpha_a \frac{m_a - \alpha_a \varphi(\mathbf{x}_a)}{\sqrt{\mathbf{p}_a^2 + [m_a - \alpha_a \varphi(\mathbf{x}_a)]^2}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a). \quad (4.2)$$

За рахунок нелінійної залежности J від потенціялу поля φ ми не можемо розв'язати польові рівняння точно.

У першому наближенні за константою взаємодії маємо

$$J = \sum_{a=1}^{N} \alpha_a \frac{m_a}{\sqrt{\mathbf{p}_a^2 + m_a^2}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a), \quad (4.3)$$

тому рівняння руху для полів стають лінійними.

З рівнянь (4.1) одержуємо

$$\Box \varphi = J, \quad \Box = \partial_t^2 - \Delta. \quad (4.4)$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (4.4) має вигляд

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = \varphi_0(t, \mathbf{x}) + \Phi(t, \mathbf{x}), \quad (4.5)$$

де $\varphi_0(t, \mathbf{x})$ — загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, а

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = \sum_{a=1}^{N} \alpha_a \frac{m_a}{\sqrt{\mathbf{p}_a^2 + m_a^2}} \times \int D(t - t' | \mathbf{x} - \mathbf{x}_a(t')) dt'. \quad (4.6)$$

Функція Ґріна D задовольняє рівняння $\Box D(t|\mathbf{x}) = \delta(t)\delta^3(\mathbf{x})$. У цьому наближенні вираз (4.6) не залежить від конкретного вибору функції Ґріна (випереджуваної чи запізнюваної).

Для того, щоб здійснити інтеґрування в (4.6), використаймо вільночастинкові рівняння руху:

$$p_{ai} = \mathrm{const}, \quad x_a^i(t) = \frac{p_a^i t}{\sqrt{\mathbf{p}_a^2 + m_a^2}} + x_{a0}^i. \quad (4.7)$$

Після інтеґрування одержуємо вираз

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{a=1}^{N} \frac{\alpha_a m_a}{\sqrt{[\mathbf{p}_a(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a(t))]^2 + m_a^2 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_a(t))^2}}. \quad (4.8)$$

Тоді розв'язок для польового імпульсу можна подати у вигляді

$$\pi(t, \mathbf{x}) = \pi_0(t, \mathbf{x}) + \Pi(t, \mathbf{x}),$$

$$\Pi(t, \mathbf{x}) = D_t \Phi(t, \mathbf{x}), \quad (4.9)$$

де

$$D_t = \sum_{a=1}^{N} \frac{p_a^i}{\sqrt{\mathbf{p}_a^2 + m_a^2}} \frac{\partial}{\partial x_a^i}. \quad (4.10)$$

Продемонструємо деякі трансформаційні властивості знайдених розв'язків, які будуть використані при переході до опису в термінах вільних полів:

$$\{\Phi(t, \mathbf{x}), m^{ik} - x^i p^k + x^k p^i\} = 0, \quad (4.11)$$

$$\{\Phi(t, \mathbf{x}), m^{k0} - x^k p^0\} = 0, \quad (4.12)$$

$$\{\Pi(t, \mathbf{x}), m^{ik} - x^i p^k + x^k p^i\} = 0, \quad (4.13)$$

$$\{\Pi(t, \mathbf{x}), m^{k0} - x^k p^0\} = -\partial^k \Phi(t, \mathbf{x}), \quad (4.14)$$

де

$$p^0 = \sum_{a=1}^{N} \sqrt{m_a^2 + \mathbf{p}_a^2},$$

$$p^i = \sum_{a=1}^{N} p_a^i,$$

$$m^{k0} = \sum_{a=1}^{N} x_a^k \sqrt{m_a^2 + \mathbf{p}_a^2},$$

$$m^{ik} = \sum_{a=1}^{N} (x_a^i p_a^k - x_a^k p_a^i).$$

Перейдімо тепер до нових канонічних польових змінних φ_0, π_0, які зв'язані з вихідними так:

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = \varphi_0(t, \mathbf{x}) + \Phi(t, \mathbf{x}),$$
$$\pi(t, \mathbf{x}) = \pi_0(t, \mathbf{x}) + \Pi(t, \mathbf{x}). \quad (4.15)$$

Оскільки таке перетворення полів містить функції, залежні від змінних частинок, то ми змушені знайти нові канонічні координати та імпульси частинок $(x_a^i, p_{ai}) \mapsto (q_a^i, k_{ai})$. Одержуємо

$$x_a^i = q_a^i + \int \left[\left(\varphi_0 + \frac{1}{2}\Phi \right) \frac{\partial \Pi}{\partial k_{ai}} - \left(\pi_0 + \frac{1}{2}\Pi \right) \frac{\partial \Phi}{\partial k_{ai}} \right] d^3x, \tag{4.16}$$

$$p_{ai} = k_{ai} - \int \left[\left(\varphi_0 + \frac{1}{2}\Phi \right) \frac{\partial \Pi}{\partial q_a^i} - \left(\pi_0 + \frac{1}{2}\Pi \right) \frac{\partial \Phi}{\partial q_a^i} \right] d^3x. \tag{4.17}$$

У лінійному наближенні за константою взаємодії

$$\Phi(t, \mathbf{x}) \equiv \Phi(\mathbf{x}_a(t), \mathbf{p}_a; \mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{q}_a(t), \mathbf{k}_a; \mathbf{x}), \tag{4.18}$$

$$\Pi(t, \mathbf{x}) \equiv \Pi(\mathbf{x}_a(t), \mathbf{p}_a; \mathbf{x}) = \Pi(\mathbf{q}_a(t), \mathbf{k}_a; \mathbf{x}). \tag{4.19}$$

Завдяки рівностям (4.11)–(4.14) збережні величини після канонічного перетворення записуємо так:

$$P^0 = \sum_{a=1}^{N} \sqrt{m_a^2 + \mathbf{k}_a^2} - \frac{1}{2} \int J\Phi \, d^3x + \frac{1}{2} \int [\pi_0^2 + (\boldsymbol{\nabla}\varphi_0)^2] d^3x, \tag{4.20}$$

$$P^k = \sum_{a=1}^{N} k_a^k + \int \pi_0 \partial^k \varphi_0 \, d^3x, \tag{4.21}$$

$$M^{k0} = \sum_{a=1}^{N} q_a^k \sqrt{m_a^2 + \mathbf{k}_a^2} - \frac{1}{2} \int x^k J\Phi \, d^3x + \frac{1}{2} \int x^k [\pi_0^2 + (\boldsymbol{\nabla}\varphi_0)^2] d^3x - tP^k, \tag{4.22}$$

$$M^{ik} = \sum_{a=1}^{N} (q_a^i k_a^k - q_a^k k_a^i) + \int (x^i \pi_0 \partial^k \varphi_0 - x^k \pi_0 \partial^i \varphi_0) d^3x. \tag{4.23}$$

Аналогічно дістаємо вираз для гамільтоніяна системи в цьому наближенні:

$$H = \sum_{a=1}^{N} \sqrt{m_a^2 + \mathbf{k}_a^2} - \frac{1}{2} \int J\Phi \, d^3x + \frac{1}{2} \int [\pi_0^2 + (\boldsymbol{\nabla}\varphi_0)^2] d^3x. \tag{4.24}$$

Виключимо поле за допомогою накладання додаткових в'язей другого класу:

$$\Psi_1(t, \mathbf{x}) \equiv \varphi_0(t, \mathbf{x}) \approx 0, \qquad \Psi_2(t, \mathbf{x}) \equiv \pi_0(t, \mathbf{x}) \approx 0, \tag{4.25}$$

де $\approx$ означає "слабку рівність" у сенсі Дірака.

Дужку Пуассона системи (3.3) за наявности в'язей (4.25) заміняємо дужкою Дірака [10]:

$$\{F, G\}^* = \{F, G\} - \int \{F, \Psi_\alpha(t, \mathbf{x})\} C_{\alpha\beta}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \{\Psi_\beta(t, \mathbf{y}), G\} d^3x \, d^3y = \sum_{a=1}^{N} \left(\frac{\partial F}{\partial q_a^i} \frac{\partial G}{\partial k_a^i} - \frac{\partial G}{\partial q_a^i} \frac{\partial F}{\partial k_a^i} \right), \tag{4.26}$$

де α та β набувають значення 1,2; $\|C_{\alpha\beta}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\|$ — матриця обернена до $\|\{\Psi_\alpha(t, \mathbf{x}), \Psi_\beta(t, \mathbf{y})\}\|$. Легко бачити, що одержана дужка збігається з дужкою Пуассона для частинкових змінних.

Гамільтоніян системи після виключення полів має вигляд:

$$H = \sum_{a=1}^{N} \sqrt{m_a^2 + \mathbf{k}_a^2} - \frac{1}{8\pi} \sum_{a,b=1}^{N}{}' \alpha_a \alpha_b \frac{m_a m_b / \sqrt{m_b^2 + \mathbf{k}_b^2}}{\sqrt{(\mathbf{k}_a \mathbf{q}_{ab})^2 + m_a^2 \mathbf{q}_{ab}^2}}, \tag{4.27}$$

де $\mathbf{q}_{ab} = \mathbf{q}_a - \mathbf{q}_b$, а штрих біля суми означає, що $a \neq b$. Члени, які відповідають за самодію ($a = b$), можуть бути виключені за рахунок перенормування маси [14].

Тоді гамільтонів формалізм у термінах q_a^i та k_{ai} задаватиметься дужкою Дірака (4.26), гамільтоніяном (4.27) та рівнянням еволюції для довільної динамічної величини $f = f(t, \mathbf{q}_a, \mathbf{k}_a)$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}^*. \tag{4.28}$$

Ґенератори алґебри Пуанкаре в термінах змінних частинок мають вигляд:

$$P^0 = \sum_{a=1}^{N} \sqrt{m_a^2 + \mathbf{k}_a^2} - \frac{1}{8\pi} \sum_{a,b=1}^{N}{}' \alpha_a \alpha_b \frac{m_a m_b / \sqrt{m_b^2 + \mathbf{k}_b^2}}{\sqrt{(\mathbf{k}_a \mathbf{q}_{ab})^2 + m_a^2 \mathbf{q}_{ab}^2}}, \tag{4.29}$$

$$P^k = \sum_{a=1}^{N} k_a^k, \tag{4.30}$$

$$M^{k0} = \sum_{a=1}^{N} q_a^k \sqrt{m_a^2 + \mathbf{k}_a^2} \tag{4.31}$$

$$- \frac{1}{8\pi} {\sum_{a,b=1}^{N}}' \alpha_a \alpha_b \frac{q_b^k m_a m_b / \sqrt{m_b^2 + \mathbf{k}_b^2}}{\sqrt{(\mathbf{k}_a \mathbf{q}_{ab})^2 + m_a^2 \mathbf{q}_{ab}^2}} - tP^k,$$

$$M^{ik} = \sum_{a=1}^{N} (q_a^i k_a^k - q_a^k k_a^i). \tag{4.32}$$

Вони задовольняють комутаційні співвідношення алґебри Пуанкаре в цьому наближенні.

Згідно з рівняннями (4.16), (4.25), фізичні координати частинок x_a^i пов'язані з канонічними змінними співвідношеннями

$$x_a^i = q_a^i + \frac{1}{2} \int \left[\Phi \frac{\partial \Pi}{\partial k_{ai}} - \Pi \frac{\partial \Phi}{\partial k_{ai}} \right] d^3 x. \tag{4.33}$$

Можна безпосередньо перевірити, що перертворення Лоренца виразу (4.33), яке ґенерується M^{k0}, є

$$\{x_a^i, M^{k0}\}^* = x_a^k \{x_a^i, H\}^* - t\delta^{ik}, \tag{4.34}$$

тобто x_a^i задовольняє умову світової лінії [15].

Дужка Дірака між фізичними координатами частинок дорівнює

$$\{x_a^i, x_b^j\}^* = \int \left(\frac{\partial \Phi}{\partial k_{bj}} \frac{\partial \Pi}{\partial k_{ai}} - \frac{\partial \Pi}{\partial k_{bj}} \frac{\partial \Phi}{\partial k_{ai}} \right) d^3 x. \tag{4.35}$$

Останній вираз свідчить про те, що перетворення, якого зазнали фізичні координати частинок під час редукції польових змінних, не є канонічним. Фізичні координати частинок не можуть водночас бути канонічними, що відповідає теоремі про невзаємодію [15].

V. ПІДСУМКИ

На підставі дії релятивістської системи точкових частинок зі скалярним полем побудовано гамільтонів опис та знайдено канонічну реалізацію алґебри Пуанкаре в термінах змінних частинок шляхом редукції польових ступенів вільности. Особливість нашого підходу полягає в тому, що ми виключили поля за допомогою методу в'язей Дірака *після* переходу до гамільтонового формулювання динаміки системи. Запропоновано послідовну процедуру редукції, яка складається з трьох етапів: знаходження розв'язку польових рівнянь, канонічного перетворення $(\varphi, \pi) \mapsto (\varphi_0, \pi_0)$, фіксування вільного поля (φ_0, π_0). Ми розглядали перше наближення за константою взаємодії, але така процедура застосовна й у вищих порядках наближення. У порівнянні з підходом, запропонованим у праці [3], наш метод дозволяє одержати прозоріші для аналізу та простіші в застосуваннях вирази для ґенераторів канонічної реалізації алґебри Пуанкаре в термінах змінних частинок. Крім того, канонічне перетворення полів на другому етапі процедури, яке не розглянуто в [3], дозволяє простежити за виключенням взаємодії між частинками та полями. На третьому етапі ми поклали вільне поле рівним нулеві, однак за допомогою в'язей ми можемо приписати полю інші фіксовані значення. Одержаний опис може служити базою для побудови статистичної та квантової механіки релятивістської системи частинок зі скалярною взаємодією.

Заради спрощення обчислень ми обмежились розглядом системи з безмасовим полем, хоча одержані результати можуть бути легко узагальнені для системи зі скалярним масивним полем. Перспективою для подальших досліджень є застосування описаного методу виключення польових ступенів вільности до систем з векторними, тензорними та ґравітаційними полями.

Автор вдячний докторові фіз.–мат. наук В. І. Третякові за ідею побудови опису системи частинок зі скалярним полем у термінах змінних частинок у рамках гамільтонового формалізму, за його сталий інтерес до цієї роботи та участь в обговоренні результатів.

---

[1] F. Hoyle, J. V. Narlikar, *Action–at–a–Distance in Physics and Cosmology* (Freeman, San Francisco, 1974).

[2] R. P. Gaida, Sov. J. Part. Nucl., **13**, 179 (1982).

[3] H. Crater, L. Lusanna, preprint hep–th/0001046 (2000); D. Alba, L. Lusanna, Int. J. Mod. Phys. A **13**, 2791 (1998).

[4] J. Darewych, Cond. Matt. Phys. (Lviv) **1**, 593 (1998)

[5] J. A. Wheeler, R. P. Feynman, Rev. Mod. Phys. **21**, 425 (1949)

[6] J. Llosa, J. Vives, J. Math. Phys. **35**, 2856 (1994)

[7] A. Nazarenko, in *Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine* **30**, 343 (2000).

[8] P. A. M. Dirac, Rev. Mod. Phys. **21**, 392 (1949).

[9] П. Дирак, *Лекции по квантовой механике* (Мир, Москва, 1968).

[10] Д. М. Гитман, И. В. Тютин, *Каноническое квантование полей со связями* (Наука, Москва, 1986).

[11] Р. П. Гайда, Ю. Б. Ключковский, В. И. Третяк, Теор. мат. физ. **55**, 88 (1983).

[12] R. P. Gaida, Yu. B. Kluchkovsky, and V. I. Tretyak, in *Constraint's Theory and Relativistic Dynamics* (World Scientific Publ., Singapore, 1987).

[13] A. Duviryak, V. Shpytko, and V. Tretyak, Cond. Matt. Phys. (Lviv) **1**, 463 (1998).

[14] F. Rohrlich, *Classical Charged Particles: Foundations of Their Theory* (Addison–Wesley, New York, 1990).
[15] D. G. Currie, J. F. Jordan, E. C. G. Sudarshan, Rev. Mod. Phys. **35**, 350 (1963).
[16] Простір–час Мінковського $\mathbb{M}_4$ в нашій задачі має метрику $\|\eta_{\mu\nu}\| = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$. Грецькі індекси $\mu, \nu, \ldots$ приймають значення від 0 до 3; латинські індекси із середини алфавіту, $i, j, k, \ldots$, пробігають від 1 до 3. Вважається, що за парою однакових індексів проводиться підсумовування. Латинські індекси з початку алфавіту, a, b, нумерують частинки і пробігають від 1 до N. Сума за такими індексами відзначається спеціяльно. Швидкість світла дорівнює одиниці.

REDUCTION OF THE FIELD DEGREES OF FREEDOM IN RELATIVISTIC SYSTEM OF POINT PARTICLES WITH MASSLESS SCALAR FIELD

A. Nazarenko
Institute for Condensed Matter Physics of the National Acad. Sci. of Ukraine
1 Svientsitskii Str., Lviv, UA–79011, Ukraine
E–mail: andy@icmp.lviv.ua

A procedure of reducing the field degrees of freedom is elaborated in the linear approximation in the coupling constant expansion for a system of particles with a scalar field within the framework of the Hamiltonian formalism with constraints. A canonical realization of the Poincaré algebra is built in terms of particle variables. A relation between physical and canonical coordinates of particles is found.