

## КВАЗІРЕЗОНАНСНА ВЗАЄМОДІЯ ДИНАМІЧНОЇ ТРИРІВНЕВОЇ КВАНТОВОЇ СИСТЕМИ З ЕЛЕКТРОМАГНЕТНИМ ВИПРОМІНЮВАННЯМ

Й. М. Стахіра, Л. С. Демків

*Львівський національний університет імені Івана Франка, кафедра фізики напівпровідників,  
вул. Драгоманова 50, Львів, 79005, Україна  
e-mail: demkiv@wups.lviv.ua*

(Отримано 20 червня 2000 р.; в остаточному вигляді 13 листопада 2000 р.)

Із нестационарного рівняння Шредингера в адиабатичному наближенні отримано аналітичні вирази для ймовірностей переходів під впливом електромагнетного випромінювання в трирівневій квантовій системі, енергетичне положення рівнів якої змінюється в часі за гармонічним законом. Досліджено вплив часу життя й амплітуд модуляції положення рівнів на динаміку заселеностей рівнів і спектральний розподіл низькочастотного відгуку системи.

**Ключові слова:** нестационарне рівняння Шредингера, адиабатичне наближення, динаміка заселеностей рівнів.

PACS number(s): 42.50.Ct; 42.50.Md

Взаємодія електромагнетного випромінювання з речовиною може приводити до зміни розподілу заселеностей енергетичних рівнів. Якщо при цьому положення енергетичних рівнів змінюється в часі, то за допомогою методик модуляційної спектроскопії [1,2] можна отримати додаткову інформацію про розподіл рівнів у багаторівневих квантових системах або про тонку структуру суцільних енергетичних спектрів. Розгляд такої квазірезонансної взаємодії електромагнетного випромінювання з речовиною було запропоновано в [3,4] на основі дворівневої моделі, коли реалізується квазірезонансна взаємодія лише для однієї пари рівнів.

У трирівневих квантових системах зустрічається значне різноманіття схем при розгляді взаємодії з електромагнетними хвилями [5], що знаходяться в резонансі зі зв'язаними переходами. У низці праць [6–9] розглянуто поглинання слабого випромінювання трирівневою квантовою системою в присутності сильного випромінювання, а також досліджено вплив характеристик сильного випромінювання на спектр поглинання слабого випромінювання.

У нашій праці розглянуто динаміку заселеностей рівнів під впливом квазірезонансного електромагнетного випромінювання в ізольованій квантовій системі з трьома енергетичними рівнями (трирівневій системі — ТС), положення яких змінюється в часі за гармонічним законом з різною амплітудою модуляції. За рахунок модуляції енергетичного положення рівнів ТС при нестационарній взаємодії з електромагнетним випромінюванням переходи в ТС можуть відбуватись між двома парами енергетичних рівнів, причому один із них є спільним для обох переходів.

Квантовомеханічний стан такої ТС описується нестационарним рівнянням Шредингера, гамільтоніян якого включає: незбурений гамільтоніян системи; оператор низькочастотного періодичного збурення, який характеризує зміну енергетичного положення рівнів у часі з різною амплітудою модуляції; оператор, що визначає енергію взаємодії ТС з електромагнетним полем. При використанні підходу, запро-

понованого в [10], доданками, що відповідають нерезонансному періодичному збуренню, можна знехтувати. Для конкретності виберемо, що квазірезонансна взаємодія реалізується на переходах  $1 \rightarrow 2$  і  $1 \rightarrow 3$ . Тоді для амплітуди ймовірності  $a'_i$  знаходження системи в  $i$ -му стані (де  $i = 1, 2, 3$ ) після заміни  $a'_i = a_i \cdot \exp(i\alpha_i\Omega^{-1} \cos\Omega t)$  отримуємо систему рівнянь із періодичними коефіцієнтами для  $a_i$ :

$$\frac{da_1}{dt} = -iF_2^* \exp(-i(\varepsilon_2 t - \alpha_2\Omega^{-1} \cos\Omega t)) \cdot a_2 \quad (1)$$

$$-iF_3^* \exp(-i(\varepsilon_3 t - \alpha_3\Omega^{-1} \cos\Omega t)) \cdot a_3,$$

$$\frac{da_2}{dt} = -iF_2 \exp(i(\varepsilon_2 t - \alpha_2\Omega^{-1} \cos\Omega t)) \cdot a_1,$$

$$\frac{da_3}{dt} = -iF_3 \exp(i(\varepsilon_3 t - \alpha_3\Omega^{-1} \cos\Omega t)) \cdot a_1,$$

де  $F_2, F_3, \alpha_i$  — матричні елементи оператора взаємодії електромагнетного випромінювання із системою й оператора низькочастотного збурення, поділені на  $\hbar$  відповідно,  $\varepsilon_i$  — частота розстроювання резонансу при взаємодії електромагнетного випромінювання з  $i$ -тим рівнем,  $\Omega$  — частота низькочастотного збурення. Проведена вище заміна змінних не викликає зміни ймовірності перебування системи в станах 1–3. Величини  $\alpha_i$  характеризують амплітуду зміщення  $i$ -того енергетичного рівня з положення рівноваги. У системі зафіксовано нижній рівень ( $\alpha_1 = 0$ ), що не впливає на динаміку фізичних процесів, які відбуваються в ТС. При  $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$  можемо інтерпретувати отримані результати як взаємодію стаціонарної ТС з електромагнетним випромінюванням із модульованою частотою:

$$\mathbf{E}(t) = \frac{\mathbf{E}_0}{2} \exp\left[i\left(\omega t + \frac{\alpha}{\Omega} \cos\Omega t\right)\right] \quad (2)$$
$$+ \frac{\mathbf{E}_0}{2} \exp\left[-i\left(\omega t + \frac{\alpha}{\Omega} \cos\Omega t\right)\right].$$

Оскільки точні розв'язки системи (1) можуть бути знайдені тільки в граничних випадках  $F_i = 0$  чи  $\alpha_i = 0$ , то асимптотичний аналіз [11, 12] може дати корисну інформацію про динаміку квантових переходів у ТС. Згідно з [13] адіабатичність зміни  $\omega(t)$  означає, що  $d\omega(t)/dt \ll \omega^2(t)$ . Запишемо розв'язок системи (1) у вигляді:

$$a_1 = \sum_{j=1}^3 A_j \exp \int_0^t \omega_j dt, \quad (3)$$

$$a_i = \sum_{j=1}^3 \frac{-A_j F_i}{(\varepsilon_i + \alpha_i \sin \Omega t + \omega_j)} \times \exp \int_0^t (\varepsilon_i + \alpha_i \sin \Omega t + \omega_j) dt,$$

де  $A_j$  — залежні від часу величини, які визначаються з початкових умов. Будемо вважати, що всі  $\omega_j$ , як функції часу, змінюються адіабатично. Підставмо розв'язки системи (3) в (1). Тоді для  $\omega_j$  отримаємо кубічне рівняння:

$$\begin{aligned} \omega_j^3 + \omega_j^2 (\varepsilon_2 + \alpha_2 \sin \Omega t + \varepsilon_3 + \alpha_3 \sin \Omega t) \\ + \omega_j (\varepsilon_2 + \alpha_2 \sin \Omega t + \varepsilon_3 + \alpha_3 \sin \Omega t - F_2^2 - F_3^2) \\ - F_2^2 \varepsilon_3 - F_3^2 \varepsilon_2 = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

У будь-який момент часу коефіцієнти біля відповідних степенів  $\omega_j$  є такими, що завжди існують три різні дійсні розв'язки рівняння (4). Отримані з (4) вирази для  $\omega_j$  показують, що умова адіабатичності зміни  $\omega_j$  виконується тим ліше, чим менші  $\alpha_i$  і більші  $F_i$ . Тобто для будь-яких амплітуд модуляції положення рівнів завжди можна підібрати таку інтенсивність електромагнетного випромінювання, щоб виконувалась умова адіабатичного наближення.

Виберімо початкові умови, так що  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 0$ ,  $a_3 = 0$ . Тоді зі системи алгебраїчних рівнянь отримаємо вирази для  $A_j$ . Квадрат амплітуди  $|a_i|^2$  визначає ймовірність перебування системи в станах 2 і 3:

$$\begin{aligned} |a_i|^2 = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{A_j A_k F_i^2}{(\varepsilon_i + \alpha_i \sin \Omega t + \omega_j) (\varepsilon_i + \alpha_i \sin \Omega t + \omega_k)} \\ \times \cos \int_0^t (\omega_j - \omega_k) dt, \end{aligned} \quad (5)$$

а ймовірність перебування системи в початковому стані 1 має вигляд:

$$|a_1|^2 = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 A_j A_k \cdot \cos \int_0^t (\omega_j - \omega_k) dt. \quad (6)$$

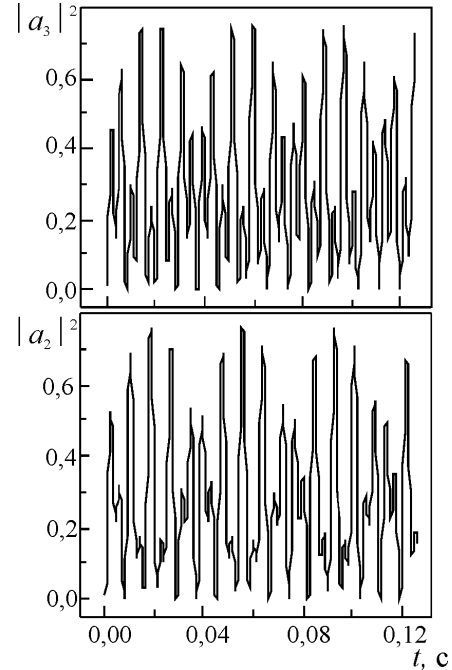


Рис. 1. Часова залежність імовірності перебування системи в станах 2 і 3 за відсутності модуляції параметрів ( $\alpha_i=0$ ).

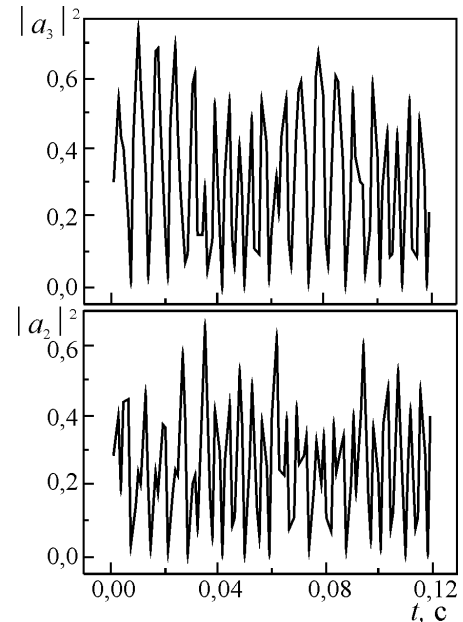


Рис. 2. Залежність від часу ймовірності перебування системи в станах 2 і 3 при антифазній та несиметричній зміні положення енергетичних рівнів.

Розглянемо випадок відсутності зовнішньої модуляції ( $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ ). Тоді в системі виникає власна

модуляція амплітуди й частоти переходів за рахунок різного енергетичного положення рівнів (рис. 1). Тільки при рівних за модулем і протилежних за знаком  $\varepsilon_i$  ( $|\varepsilon_2| = |\varepsilon_3|$ ) амплітудна обвідна й частота переходів не залежать від часу.

При модуляції положення енергетичних рівнів ймовірності перебування системи в станах 1–3 є осцилюючими в часі функціями зі змінною амплітудою та частотою. На рис. 2 наведені графіки ймовірності перебування системи в станах 2, 3 при антифазній реакції рівнів на низькочастотне збурення, коли  $\alpha_2 = 100 \text{ с}^{-1}$ ,  $\alpha_3 = 500 \text{ с}^{-1}$ ,  $\varepsilon_2 = 0$ ,  $\varepsilon_3 = 500 \text{ с}^{-1}$  і рівних  $F_2 = F_3 = 500 \text{ с}^{-1}$ . Після усереднення швидкоосцилюючих доданків у розв'язках системи (1) отримуємо часово залежну величину  $a_i(t)$  для  $|a_i|^2$ . На рис. 3 показано  $a_i(t)$  для відповідних (рис. 2) ймовірностей переходів  $|a_i|^2$ .

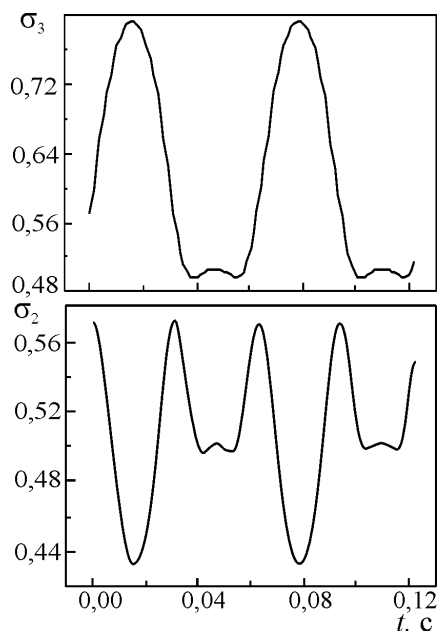


Рис. 3. Динаміка ймовірності переходів  $a_i(t)$  в ТС при усередненні швидкоосцилюючих доданків.

Дослідимо низькочастотний відгук  $\Delta\alpha$  на синфазній гармоніці суми  $a_2(t)$  і  $a_3(t)$ . Відомо, що при взаємодії електромагнетного випромінювання з дворівневою квантовою системою точному резонансові відповідає нульовий низькочастотний відгук на синфазній гармоніці та максимальний на  $\cos 2\Omega t$ . Таке співвідношення реалізується в ТС лише у випадку синфазного і з однаковими амплітудами зміщення рівнів із положення рівноваги при однакових  $F_2 = F_3$ . Тоді на графіку  $\Delta\alpha(\omega)$  точка  $\Delta\alpha(\omega) = 0$  відповідає середині енергетичного положення між рівнями 2 і 3. Несиметрична зміна будь-якого параметра  $F_2 \neq F_3$  чи  $\alpha_2 \neq \alpha_3$  значно ускладнює характер залежності  $\Delta\alpha(\omega)$ . Відбувається такий перерозподіл між двома основними гармоніками  $\sin \Omega t$  і  $\cos 2\Omega t$ , що ні нульовій, максимальній чи мінімальній величині  $\Delta\alpha(\omega)$  не

можна поставити у відповідність енергетичного положення рівня.

На рис. 4 показано спектральну залежність  $\Delta\alpha(\omega)$  для різних  $F_i$ , а також  $\alpha_i$  і  $\varepsilon_i$ , що відповідають ймовірностям переходів, зображених на рис. 2. Точки 2, 3 відповідають енергетичному положенню відповідних рівнів. Розрізнити два рівні, що антифазно зміщуються, можна лише за наявності ділянки від'ємного  $\Delta\alpha(\omega)$  між ними (рис. 4, суцільна крива,  $F_2 = F_3 = 200 \text{ с}^{-1}$ ) або, навпаки, ділянки додатного відгуку між ними, якщо фаза зміщення рівнів змінюється на протилежну. Збільшення матричного елемента одного з переходів, наприклад  $F_2 = 500 \text{ с}^{-1}$ , приводить до збільшення синфазного відгуку в околі цього рівня і зменшення його в околі іншого рівня (рис. 4, пунктирна крива). Крім того, збільшення напруженості поля ефективно поширює переходи між рівнями і взагалі унеможливує ідентифікацію положення рівнів (рис. 4, штрих-пунктирна крива,  $F_2 = F_3 = 500 \text{ с}^{-1}$ ). Дослідження низькочастотного відгуку на зсунутій по фазі на  $\pi/2$  гармоніці показали, що в усіх випадках він дорівнює нулеві.

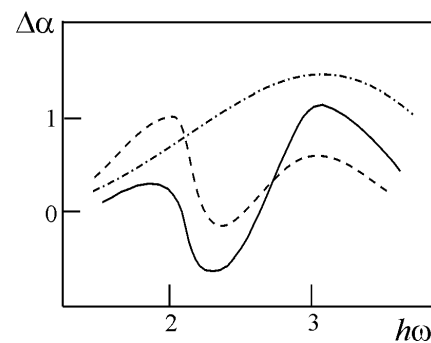


Рис. 4. Спектральний розподіл  $\Delta\alpha$  при різних  $F$ .

Перейдімо до розгляду властивостей системи з  $N_0$  однакових незваємодіючих частинок. Розглянемо 2 випадки: перший, коли електромагнетне поле квазірезонансно взаємодіє з відповідними парами рівнів  $1 \rightarrow 2$  і  $1 \rightarrow 3$ , і другий, коли рівень 2 квазірезонансно не взаємодіє з електромагнетним полем, а через нього відбувається релаксація частинок із рівня 3 на рівень 1. Зміну динаміки квантових переходів у ТС при врахуванні різного часу життя збуджених рівнів дослідимо за допомогою кінетичних рівнянь для заселеностей рівнів. За наявності електромагнетного випромінювання в розглянутих системах динаміка заселеності рівнів  $N_i$  визначається такими процесами: вимушеними та індукованими переходами зі швидкістю  $P_i(t) = \left| \frac{d|a_i|^2}{dt} \right|$  (параметри  $F_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $\varepsilon_i$  дорівнюють відповідним числовим значенням для рис. 2) та релаксаційними процесами, що характеризуються відповідними оберненими часами життя рівнів  $A_{21}$ ,  $A_{31}$ ,  $A_{32}$ . Система рівнянь (7) описує динаміку заселеностей рівнів у першому випадку

$$\frac{dN_1}{dt} = -N_1 (P_2(t) + P_3(t)) + N_2 \cdot A_{21} + N_3 \cdot A_{31}, \quad (7)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = N_1 P_2(t) + N_2 (A_{32} - A_{21}),$$

$$\frac{dN_3}{dt} = N_1 P_3(t) - N_3 (A_{31} + A_{32}),$$

а система рівнянь (8) — у другому:

$$\frac{dN_1}{dt} = -N_1 P_3(t) + N_2 \cdot A_{21} + N_3 (A_{31} + P_3(t)), \quad (8)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = -N_2 A_{21} + N_3 A_{32},$$

$$\frac{dN_3}{dt} = N_1 P_3(t) - N_3 (A_{31} + A_{32} + P_3(t)).$$

На рис. 5а наведені чисельні розв'язки системи (7) при однакових часах життя рівнів  $A_{21} = A_{31} = 500 \text{ с}^{-1}$ ,  $A_{32} = 0$ . Пунктирна крива ілюструє заселеність рівня 2, суцільна — рівня 3. Порівняння отриманих заселеностей рівнів із відповідними  $a_i(t)$  й аналіз низькочастотної динаміки заселеностей рівнів показав, що однакові часи життя рівнів не змінюють спектрального розподілу  $\Delta\alpha(\omega)$ , а лише його абсолютне значення. Крім того, різні часи життя рівнів можуть бути враховані аналогічно, як при різних  $F_i$ .

На рис. 5б подані чисельні розв'язки системи (8) при  $A_{21} = 150 \text{ с}^{-1}$ ,  $A_{31} = 200 \text{ с}^{-1}$ ,  $A_{32} = 250 \text{ с}^{-1}$ . Пунктирна крива ілюструє заселеність рівня 2, суцільна — рівня 3. Як видно з рис. 5б, за наявності в системі релаксації через проміжний рівень виникає зсув фаз між низькочастотним зовнішнім збуренням і відгуком на

нього. Зсув фаз є тим більшим, чим більше відношення  $A_{32}/A_{21}$ .

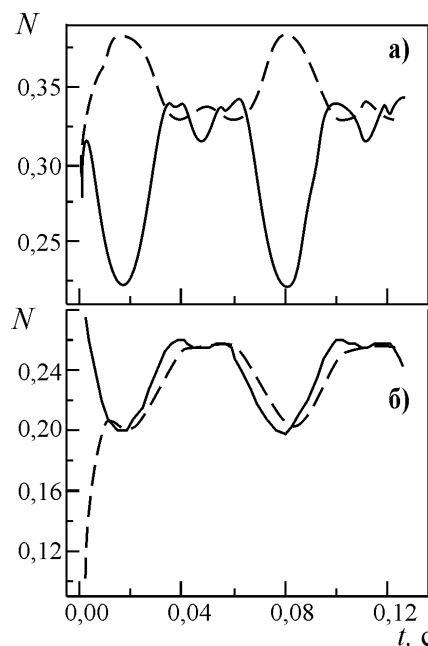


Рис. 5. Залежність від часу заселеності рівнів  $N$ , які є розв'язками: а) системи (7); б) системи (8).

Отже, зсунутий за фазою відгук, що реєструється в експериментах, може бути зумовлений релаксацією через проміжний рівень і не виникає внаслідок різних часів життя рівнів, антифазного та несиметричного зміщення рівнів у результаті низькочастотного збурення.

[1] М. Кардона, *Модуляционная спектроскопия* (Мир, Москва, 1977).  
 [2] Н. Mathieu, J. Allerge, В. Gil, *Phys. Rev.* **43**, 2218 (1991).  
 [3] Л. С. Демків, Р. Й. Стахіра, *Вісн. Львів. ун-ту, сер. фіз.* **31**, 38 (1998).  
 [4] Й. М. Стахіра, Л. С. Демків, *Укр. фіз. журн.* **45**, 1240 (2000).  
 [5] В. С. Летохов, В. П. Чеботарев, *Нелинейная лазерная спектроскопия сверхвысокого разрешения* (Наука, Москва, 1990).  
 [6] С. Г. Пржибельский, В. А. Ходовой, *Опт. спектроскоп.* **32**, 237 (1972).

[7] J. G. Banaclone, Y. Li, S. Jin, M. Xiao, *Phys. Rev. A* **51**, 576 (1995).  
 [8] M. Xiao, Y. Li, S. Jin, J. G. Banaclone, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 666 (1995).  
 [9] F. A. Montes, M. Xiao, *Phys. Rev. A* **62**, 023818 (2000).  
 [10] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика* (Наука, Москва, 1989).  
 [11] M. Sebawe Abdalla, *Phys. Rev* **33**, 2870 (1986).  
 [12] G. Dattoli, S. Solimeno, A. Torre, *Phys. Rev.* **34**, 2646 (1986).  
 [13] Я. Б. Зельдович, А. Д. Мышкис, *Элементы прикладной математики* (Наука, Москва, 1972).

**QUAZIRESONANCE INTERACTION OF THREE-LEVEL DYNAMICAL QUANTUM  
SYSTEM WITH ELECTROMAGNETIC RADIATION**

J. M. Stakhira, L. S. Demkiv

*Chair of Physics of Semiconductors, Ivan Franko National University of Lviv,  
50 Drahomanov Str., Lviv, UA-79005, Ukraine  
e-mail: demkiv@wups.lviv.ua*

From a non-stationary Schrödinger equation in an adiabatic approximation the analytical expressions for the probabilities of transition under the influence of electromagnetic radiation in a three-level quantum system are obtained, the energy position of whose levels varies in time according to the harmonic law. The influence of a lifetime and amplitude of modulation of the levels position on their population dynamics and spectral distribution of a low-frequency response of the system is explored.