АНАЛІТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ПРОПАҐАТОРА В ТОЧНО РОЗВ'ЯЗУВАНІЙ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

О. О. Лісовий
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, фізичний факультет,
пр. академіка Глушкова, 6, Київ, 03022, Україна
(Отримано 16 жовтня 2000 р.)

У праці подано інтерпретацію результатів точного розв'язку $2D$ моделі Ізинґа з погляду квантової теорії поля. Знайдено імпульсне зображення 2-точкової кореляційної функції та його аналітичне продовження на часоподібну область $p^2 < 0$. Показано, що в парамагнетній фазі пропаґатор моделі Ізинґа має простий полюс у точці $p^2 = -m^2$, а також лоґарифмічні точки галуження при $p^2 = -9m^2, -25m^2, \ldots$, що відповідають порогам народження n-частинкових проміжних станів. Досліджено поведінку скачка пропаґатора на порогах і його асимптотичну поведінку при $|p^2| \to \infty$.

Ключові слова: квантова теорія поля, модель Ізинґа, кореляційна функція, пропаґатор.

PACS number(s): 05.50.+q, 11.10.–z

I. ВСТУП

Після обчислення вільної енерґії і двоточкової кореляційної функції в працях [1–3] модель Ізинґа широко застосовували в теорії твердого тіла в описі критичних явищ. При цьому звичайно розглядали феромагнетну фазу в скейлінґовій ділянці (див. напр. [4]). Однак ці результати можуть бути використані й у квантовій теорії поля. Шуканими величинами в цьому випадку є одночастинково-незвідні функції Ґріна $\Gamma^{(n)}$.

Розгляньмо, наприклад, евклідову теорію φ^4 з від'ємним квадратом маси й дією

$$S[\varphi] = \int \mathrm{d}^d x \left(\frac{1}{2}\, \partial_\mu \varphi\, \partial_\mu \varphi - \frac{m^2}{2}\, \varphi^2 + \frac{g}{4}\, \varphi^4 \right).$$

Кореляційні функції полів виражаються через функціональні інтеґрали

$$\langle \varphi_1 \cdots \varphi_n \rangle = \frac{\int \mathrm{d}[\varphi]\, \mathrm{e}^{-S[\varphi]} \varphi_1 \cdots \varphi_n}{\int \mathrm{d}[\varphi]\, \mathrm{e}^{-S[\varphi]}}.$$

Якщо замінити інтеґрування за координатами підсумовуванням за ґраткою, то функціональні інтеґрали перейдуть у багатократні інтеґрали за полями у вузлах ґратки

$$\int \mathrm{d}[\varphi]\, \mathrm{e}^{-S[\varphi]} \to \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \prod_r \mathrm{d}\varphi_r \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\varphi_r \hat{L}\, \varphi_r \right) - g\, a^d \left(\frac{1}{4}\, \varphi_r^4 - \frac{m^2}{2g}\, \varphi_r^2 \right) \right],$$

$$\hat{L} = a^{d-2} \sum_{j=1}^{d} (\nabla_{r+\hat{x}_j} + \nabla_{r-\hat{x}_j} - 2).$$

Тут r нумерує вузли ґратки, ∇ — оператор зсуву, $\hat{x}_j$ — одиничні вектори вздовж кожної з координатних осей, a — крок ґратки.

Розгляньмо випадок, коли $(ga^2) \gg 1$, а m^2/g — скінченна додатна величина. Тоді в першому наближенні за $1/(ga^2)$ інтеґрал за $[\varphi_r]$ можна обчислити методом перевалу

$$\int \mathrm{d}[\varphi]\, \mathrm{e}^{-S[\varphi]} \varphi_1 \cdots \varphi_n \to C \sum_{[\widetilde{\varphi}_r]} \widetilde{\varphi}_1 \cdots \widetilde{\varphi}_n \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_r\, \widetilde{\varphi}_r\, a^{d-2} \sum_{j=1}^{d} (\nabla_{r+\hat{x}_j} + \nabla_{r-\hat{x}_j})\, \widetilde{\varphi}_r \right]. \tag{1.1}$$

У формулі (1.1) підсумовування проведено за всіма конфіґураціями $[\widetilde{\varphi}_r]$, що відповідають максимуму показника експоненти $\widetilde{\varphi}_r = \pm\sqrt{m^2/g}$.

Таким чином, ми отримали, що за наведених умов на m^2 і g кореляційні функції теорії $g\varphi^4$ та моделі Ізинґа зі взаємодією найближчих сусідів збігаються з точністю до сталих множників у просторі довільної вимірности. Ці міркування узагальнюються й на потенціял довільної форми з двома різкими, симетрично розташованими мінімумами однакової глибини.

При $T > T_c$ (парамагнетна фаза) спінова кореляційна функція $2D$ моделі Ізинґа має простий полюс у площині імпульсу і відповідає пропаґаторові теорії скалярного взаємодіючого поля з потенціялом Ландау–Ґінзбурґа при великій константі зв'язку. Відповідна одночастинково-незвідна функція $\Gamma^{(2)}$ може бути обчислена поза рамками теорії збурень.

Аналітичні властивості пропаґатора в комплексній площині імпульсу є наслідками властивостей взаємодії. Ми знайдемо імпульсне зображення цього пропаґатора та дослідимо порогову й асимптотичну поведінку його скачка.

II. ІМПУЛЬСНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ПРОПАҐАТОРА

Статистична сума моделі Ізинґа зі взаємодією найближчих сусідів на прямокутній ґратці розміром $M \times N$ (див. рис. 1) має вигляд

$$Z = \sum_{[\sigma]} e^{-\beta H[\sigma]}, \tag{2.1}$$

де $H[\sigma]$ – гамільтоніян моделі

$$-\beta H[\sigma] = \sum_r K(\sigma_r \sigma_{r+\hat{x}} + \sigma_r \sigma_{r+\hat{y}}). \tag{2.2}$$

Ізинґівський спін σ набуває значення ± 1, суму в (2.1) узято за всіма конфіґураціями спінів, K — параметр зв'язку.

Далі ми розглянемо спінову кореляційну функцію

$$\langle \sigma_0 \sigma_R \rangle = Z^{-1} \sum_{[\sigma]} \sigma_0 \sigma_R \exp(-\beta H[\sigma])$$

у випадку, коли спіни σ_0 і σ_R знаходяться на одній лінії (див. рис. 1). Відомо [5,6], що статистичну суму й кореляційну функцію $2D$ моделі Ізинґа можна подати у вигляді функціональних інтеґралів за дійсним ґрасмановим чотирикомпонентним полем

$$Z = (2\cosh^2 K)^{MN} \int \mathrm{d}[\psi] \exp\left(S[\psi]\right), \tag{2.3}$$

$$\langle \sigma_0 \sigma_R \rangle = t^{-R} \frac{\int \mathrm{d}[\psi] \exp\left(S_{def}[\psi]\right)}{\int \mathrm{d}[\psi] \exp\left(S[\psi]\right)}, \tag{2.4}$$

$$t = \tanh K.$$

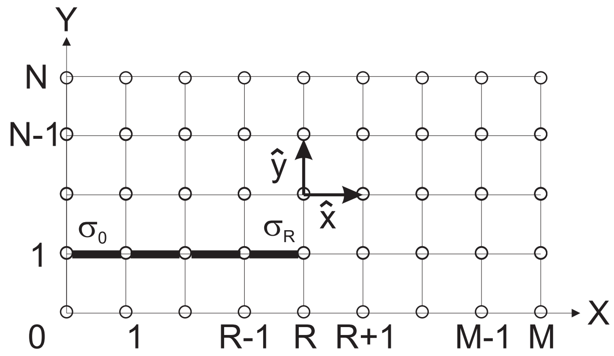

Рис. 1. Нумерація вузлів ґратки. Жирною лінією відзначено зв'язки з деформованою константою взаємодії.

Дія у формулі (2.4) має вигляд

$$S[\psi] = \frac{1}{2}(\psi, \hat{D}\psi) = \frac{1}{2}\sum_r \sum_{\alpha=1}^{4} \sum_{\beta=1}^{4} \psi_r^\alpha D_{\alpha\beta} \psi_r^\beta,$$

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 + t\nabla_x & 1 & 1 \\ -1 - t\nabla_{-x} & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 + t\nabla_y \\ -1 & -1 & -1 - t\nabla_{-y} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тут ∇_x, ∇_y — оператори зсуву на одиничний вектор уздовж осей OX та OY ($\nabla_x \psi_r^\alpha = \psi_{r+\hat{x}}^\alpha$, $\nabla_y \psi_r^\beta = \psi_{r+\hat{y}}^\beta$). Деформована дія S_{def} відрізняється від S дефектом на лінії, що з'єднує спіни у вузлах $(0,0)$ та $(R,0)$

$$S_{\text{def}}[\psi] - S[\psi] = (t^2 - 1) \sum_{j=0}^{R-1} \psi_{j,0}^1 (\psi_{j,0}^2 + \psi_{j,0}^3 + \psi_{j,0}^4).$$

Користуючись формулою (2.4), кореляційну функцію в парамагнетній ділянці можна записати через визначник й обернені елементи матриці Тепліца розмірністю $R+1$:

$$\langle \sigma_0 \sigma_R \rangle = |A|\, A_{0R}^{-1},$$

$$A_{xx'} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z}\, z^{x'-x} \left[\frac{(1-\alpha z^{-1})(1-\beta z^{-1})}{(1-\alpha z)(1-\beta z)}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\alpha = t\, e^{2K}, \quad \beta = t\, e^{-2K}.$$

Точці фазового переходу відповідає $\alpha = 1$. Під скейлінґовою границею ми розумітимемо границю

$$1 - \alpha = m \cdot a \to 0, \quad R \to \infty$$

при умові, що скейлінґова відстань $s = (1-\alpha)R$ залишається скінченною величиною. У цьому випадку Палмер і Трейсі в праці [7] знайшли зображення для $\langle \sigma_0 \sigma_R \rangle$ у вигляді ряду

$$\langle \sigma_0 \sigma_R \rangle = \chi \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+1}(s),$$

де

$$\chi = [(1-\alpha^2)(1-\beta^2)(1-\alpha\beta)^2]^{\frac{1}{4}},$$

$$F_n(s) = \frac{1}{n!} \int\limits_0^{\infty} \cdots \int\limits_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}u_1}{2\pi u_1} \cdots \frac{\mathrm{d}u_n}{2\pi u_n} \prod_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{-\frac{s}{2}(u_j + u_j^{-1})} \prod_{1 \le i < j \le n} \left(\frac{u_i - u_j}{u_i + u_j} \right)^2. \tag{2.5}$$

Розгляньмо вираз

$$A_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}x_n \mathrm{d}y_n}{\prod\limits_{j=1}^{n} (1 + x_j^2 + y_j^2)} \prod_{1 \le i < j \le n} \left(\frac{x_i - x_j}{y_i + y_j} \right)^2 \prod_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{i\overline{M}x_j + i\overline{N}y_j}. \tag{2.6}$$

Після інтеґрування за всіма y_j і заміни $x_j = \sinh \varphi_j$ він зводиться до

$$A_n = \pi^n \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\varphi_1 \cdots \mathrm{d}\varphi_n \prod_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{-\sqrt{\overline{M}^2 + \overline{N}^2} \cosh \varphi_j} \prod_{1 \le i < j \le n} \left(\frac{1}{i} \tanh \frac{\varphi_i - \varphi_j}{2} \right)^2.$$

Легко бачити, що цей вираз інваріянтний щодо обертань у площині $(\overline{M}, \overline{N})$. Після заміни $u_i = \mathrm{e}^{\varphi_i}$ в (2.5) одержимо

$$F_n = \frac{1}{(2\pi)^n\, n!} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\varphi_1 \cdots \mathrm{d}\varphi_n \prod_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{-s \cosh \varphi_j} \prod_{1 \le i < j \le n} \tanh^2 \left(\frac{\varphi_i - \varphi_j}{2} \right).$$

Бачимо, що коли вибрати

$$s = \sqrt{\overline{M}^2 + \overline{N}^2}, \tag{2.7}$$

то вирази для F_n і A_n відрізнятимуться тільки сталими множниками:

$$F_n = \frac{i^{n(n-1)}}{(2\pi^2)^n\, n!} A_n.$$

Перевага (2.6) в тому, що від A_n легко обчислити фур'є-перетворення. Справді, уведемо розмірні відстань і масу

$$\overline{M} = mx\,, \quad \overline{N} = my.$$

Унаслідок інваріянтности (2.7) щодо обертань фур'є-зображення є функцією квадрата імпульсу $p^2 = p_x^2 + p_y^2$ і дорівнює

$$\widetilde{A}_n(p_x, p_y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, A_n(p_x, p_y)\, \mathrm{e}^{-ip_x x - ip_y y} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}x_n \mathrm{d}y_n}{\prod\limits_{j=1}^{n} (1 + x_j^2 + y_j^2)} \prod_{1 \le i < j \le n} \left(\frac{x_i - x_j}{y_i + y_j} \right)^2$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\exp\left[ix\left(\sum_{j=1}^{n} mx_j - p_x\right) + iy\left(\sum_{j=1}^{n} my_j - p_y\right)\right]$$

$$= 2\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\vec{p}_1\cdots\mathrm{d}\vec{p}_n}{\prod\limits_{j=1}^{n}(m^2+p_j^2)} \prod_{1\le i<j\le n}\left(\frac{p_i^x - p_j^x}{p_i^y + p_j^y}\right)^2 \delta\left(p_y - \sum_{j=1}^{n} p_j^y\right) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\,\exp\left[ix\left(\sum_{j=1}^{n} p_j^x - p_x\right)\right].$$

Поміняймо місцями порядок інтеґрування за $[p_j^x]$ і за x в останньому виразі та проінтеґруймо його за $[p_j^x]$:

$$\widetilde{A}_n(p_x,p_y) = (2\pi)^{n+1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}p_1^y\cdots\mathrm{d}p_n^y}{\prod\limits_{j=1}^{n} 2\sqrt{m^2+(p_j^y)^2}}\,\delta\left(p_y - \sum_{j=1}^{n} p_j^y\right)$$

$$\times \prod_{1\le i<j\le n}\left[\frac{\sqrt{m^2+(p_i^y)^2} - \sqrt{m^2+(p_j^y)^2}}{i(p_i^y+p_j^y)}\right]^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\exp\left[ixp_x - |x|\sum_{j=1}^{n}\sqrt{m^2+(p_j^y)^2}\right]. \tag{2.8}$$

Після позначення $\omega_i = \sqrt{p_i^2+m^2}$ та інтеґрування за x в (2.8) маємо

$$\widetilde{A}_n(p_x,p_y) = (2\pi)^{n+1} i^{n(n-1)} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}p_1\cdots\mathrm{d}p_n}{\prod\limits_{j=1}^{n} 2\omega_j}\,\delta\left(p_y - \sum_{j=1}^{n} p_j\right)$$

$$\times \prod_{1\le i<j\le n}\left(\frac{\omega_i-\omega_j}{p_i+p_j}\right)^2\left(\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_j - ip_x} + \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_j + ip_x}\right).$$

Остаточний вираз для фур'є-зображення $\widetilde{F}_n(\varepsilon,p)$ має вигляд

$$\widetilde{F}_n(\varepsilon,p) = \frac{2\pi}{\pi^n\, n!}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}p_1\cdots\mathrm{d}p_n}{\prod\limits_{j=1}^{n}2\omega_j}\,\delta\left(p - \sum_{j=1}^{n}p_j\right)\prod_{1\le i<j\le n}\left(\frac{\omega_i-\omega_j}{p_i+p_j}\right)^2\left(\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_j - i\varepsilon} + \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_j + i\varepsilon}\right). \tag{2.9}$$

Це є не що інше, як імпульсне зображення пропаґатора, записане в стандартній для квантової теорії поля формі. При $\varepsilon = iE$ підінтеґральний вираз у (2.9) стає синґулярним. Скачок пропаґатора на розрізі дорівнює

$$\widetilde{H}_n(E,p) = [\widetilde{F}_n(\varepsilon = iE+\delta,p) - \widetilde{F}_n(\varepsilon = iE-\delta,p)]_{\delta\to+0}$$

$$= i\frac{4\pi^2}{\pi^n\, n!}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}p_1\cdots\mathrm{d}p_n}{\prod\limits_{j=1}^{n}2\omega_j}\delta\left(p-\sum_{j=1}^{n}p_j\right)\delta\left(E-\sum_{j=1}^{n}\omega_j\right)\prod_{1\le i<j\le n}\left(\frac{\omega_i-\omega_j}{p_i+p_j}\right)^2. \tag{2.10}$$

III. ПОРОГОВА Й АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА СКАЧКА ПРОПАҐАТОРА

Нагадаймо, що ми отримали зображення для скачка пропаґатора у вигляді ряду

$$\widetilde{H}(E,p) = \chi\sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{H}_{2k+1}(E,p),$$

де $\widetilde{H}_{2k+1}(E,p)$ обчислюється за формулою (2.10). Кожному з доданків $\widetilde{H}_{2k+1}(E,p)$ відповідає синґулярність пропаґатора в точці $E^2=[(2k+1)m]^2+p^2$.

Розгляньмо систему центра мас ($p=0$) й обчислім $\widetilde{H}_n(E,p)$ при $E=nm+\varepsilon$, $\varepsilon\ll m$ (на порозі):

$$\widetilde{H}_n(\varepsilon)\approx i\frac{4\pi^2}{\pi^n\, n!}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}p_1\cdots\mathrm{d}p_n}{2^n\, m^n}\delta\left(\sum_{j=1}^{n}p_j\right)\delta\left(\varepsilon-\sum_{j=1}^{n}\frac{p_j^2}{2m}\right)\prod_{1\le i<j\le n}\left(\frac{p_i-p_j}{2m}\right)^2.$$

Після заміни $p_j=\sqrt{2\varepsilon m}\,u_j$ легко бачити, що

$$\widetilde{H}_n(\varepsilon)\sim\varepsilon^{(n^2-3)/2}.$$

При великих енерґіях ($E\gg nm$) $\widetilde{H}_n$ також можна обчислити:

$$\widetilde{H}_n(E)\approx i\frac{4\pi^2}{\pi^n\, n!}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}p_1\cdots\mathrm{d}p_n}{2|p_1|\cdots2|p_n|}\delta\left(\sum_{j=1}^{n}p_j\right)\delta\left(E-\sum_{j=1}^{n}|p_j|\right)\prod_{1\le i<j\le n}\left(\frac{|p_i|-|p_j|}{p_i+p_j}\right)^2. \tag{3.1}$$

Зробивши в (3.1) заміну змінних $p_j=E\,x_j$, одержимо

$$\widetilde{H}_n(E)\sim E^{-2}.$$

Зауважимо, що оскільки в нашому випадку $n=2k+1$, то на порозі $\widetilde{H}_n(\varepsilon)\sim\varepsilon^l$, де l – ціле число $(3,11,23,\dots)$. Синґулярності пропаґатора, що дають таку порогову поведінку його скачка, повинні бути лоґарифмічними:

$$\widetilde{F}_n(\varepsilon)\sim\varepsilon^{(n^2-3)/2}\ln(-\varepsilon).$$

IV. ВИСНОВКИ

Відомо, що квантовопольова густина енерґії $\varepsilon_m(T)$ як функція температури, обчислена на основі точного розв'язку для статистичної суми, має вигляд, що збігається з густиною енерґії газу вільних ферміонів

$$\varepsilon_m(T)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\,\frac{\omega}{\mathrm{e}^{\omega/T}+1},\quad \omega=\sqrt{p^2+m^2}.$$

Це послужило одним із арґументів на користь того, що модель Ізинґа еквівалентна системі вільних ферміонів і тому не становить особливого інтересу як модель для квантової теорії поля. Проте дослідження двоточкової функції Ґріна показує помилковість подібних тверджень і свідчить про наявність нетривіяльної динаміки. Так, зокрема, отриманий у цій роботі результат щодо структури синґулярностей пропаґатора в комплексній площині квадрата імпульсу вказує на те, що в моделі присутні й інші n-точкові функції Ґріна, на жаль, поки що не обчислені. Наприклад, точний розв'язок для 4-точкової кореляційної функції в моделі Ізинґа міг би дати відповідь на питання про те, чи насправді перенормовані асимптотичні стани системи мають властивості квантових солітонів, на що вказує аналіз точно інтеґрованих двовимірних моделей квантової теорії поля.

Я вдячний А. І. Бугрієві і В. М. Шадурі за допомогу та підтримку при написанні цієї праці, а також В. В. Куртєву за корисні обговорення.

Ця робота була підтримана програмою INTAS (ґрант INTAS-97-1312).

[1] L. Onsager, Phys. Rev. **65**, 117 (1944).
[2] E. W. Montroll, R. A. Potts, J. C. Ward, J. Math. Phys. **4**, 308 (1963).
[3] T. T. Wu, B. M. McCoy, C. A. Tracy, E. Barouch, Phys. Rev. B **13**, 316 (1976).
[4] C. Tracy, B. McCoy, Phys. Rev. Lett. **31**, 1500 (1973).
[5] Ф. А. Березин, Усп. мат. наук **24**, 3 (1969).
[6] А. И. Бугрий, В. Н. Шадура, Журн. эксп. теор. физ. **109**, 1024 (1996).
[7] J. Palmer, C. Tracy, Adv. Appl. Math. **2** 329 (1981).

ANALYTICAL PROPERTIES OF THE PROPAGATOR IN THE EXACTLY SOLVABLE QUANTUM FIELD THEORY

O. O. Lisovy
Taras Shevchenko Kyiv National University, Department of Physics,
6 acad. Glushkova Pr., Kyiv, UA–03022, Ukraine

The quantum field theory interpretation of the exact solution of $2D$ Ising model is given. The momentum representation of the two-point correlation function is obtained and its analytic continuation on the time-like region ($p^2 < 0$) is fulfilled. It is shown that the propagator corresponding to the Ising model paramagnetic phase has the simple pole at $p^2 = -m^2$ and the logarithmic branch points at $p^2 = -9m^2$, $-25m^2$, $\ldots$. These branch points correspond to the thresholds of the creation of n-particles intermediate states. Threshold and asymptotic behaviour of the propagator's discontinuity is evaluated.