ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 5, № 1 (2001) с. 14–18

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 5, No. 1 (2001) p. 14–18

РЕЖИМ АНОМАЛЬНОЇ ДИФУЗІЇ В СТОХАСТИЧНИХ СИСТЕМАХ

Д. О. Харченко
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова 2, Суми, 40007, Україна
(Отримано 10 грудня 2000 р.)

Розглянуто систему зі скейлінґовим характером імовірности мікроскопічних переходів, що визначає основне кінетичне рівняння (master equation). Показано, що подібна апроксимація ймовірности приводить до дробоводиференційного рівняння Фоккера–Планка. Останнє зумовлює супердифузійний режим системи. Виявлено, що така аномальна поведінка визначається фрактальністю фазового простору системи з мультиплікативним шумом.

Ключові слова: стохастична система, аномальна дифузія, фрактальна вимірність.

PACS number(s): 05.40.+j, 05.70.Fh, 64.60.–i, 82.20.Fd

При описі стохастичної системи використовують один із двох підходів: мікро- або макроскопічний. Перший з них пов'язаний із властивостями руху окремої частинки, а другий ураховує весь статистичний ансамбль. Інформація про систему на мікроскопічному рівні дозволяє адекватно перейти на макроскопічний і навпаки. Однак в окремих випадках при конструюванні макроскопічного еволюційного рівняння доцільно провести аналіз мікроскопічних властивостей системи. Насамперед це стосується систем із аномальною поведінкою, наприклад, аномальною дифузією, для якої, замість звичайного дифузійного співвідношення, маємо $\langle x^2\rangle \propto t^{2/z}$, $z \neq 2$. Як було з'ясовано в праці [1], така картина пояснюється скейлінґовим характером густини ймовірности мікроскопічних переходів у системі. Причому субдифузії ($z > 2$) відповідає часовий скейлінґ самої густини ймовірности або її моментів [2]. Фізичним прикладом таких систем є перенесення заряду в аморфних матеріялах [3]. Математично субдифузійний процес відображається наявністю дробової похідної за часом у макроскопічному рівнянні еволюції [4] та скейлінґовою поведінкою за часом макроскопічного розподілу. Відомою моделлю супердифузії ($z < 2$) виступають "польоти Лєві" [5], для яких характерним є дискретність стрибків за часом та неперервність руху у просторі. Тут густина ймовірности мікроскопічних стрибків має степеневий вигляд, але, на відміну від попереднього випадку, залежно від координати. Як результат, звичайне дифузійне рівняння перетворюється на рівняння з дробовою похідною за координатою [1,6]. Зазначимо, що скейлінґ щодо густини ймовірности мікроскопічних переходів у "польотах Лєві" застосовується лише в границі великих значень координат $x \to \infty$ (на великих відстанях). На відміну від наведених прикладів, у багатьох стохастичних системах суттєвою є область $x \to 0$, де x відіграє роль змінної, що характеризує всю систему (амплітуда гідродинамічної моди тощо). Тому виникає питання про врахування мікроскопіки таких стохастичних систем при переході до макроскопічного рівня опису. У цій праці ми розглянемо клас стохастичних систем із фрактальною природою фазового простору. Покажемо, що останнє приводить до дробоводиференційного рівняння Фоккера–Планка, аналогічного рівнянню при "польотах Лєві". Буде також з'ясовано, що в таких системах реалізується супердифузійний режим.

Вихідною точкою нашого підходу виступає основне кінетичне рівняння (master equation) для густини ймовірности

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \int dy\,[W(y,x)P(y,t) - W(x,y)P(x,t)]\,, \quad (1)$$

де $W(x,y)$ є густиною розподілу мікроскопічних переходів із x в y. Розглядаючи систему із фрактальними властивостями, ми можемо припустити, що $W(x,y)$ є однорідною функцією. Тоді згідно з визначенням самоафінности покладемо [7]:

$$W(x,y) = x^{-\alpha}\vartheta(y/x), \quad (2)$$

де показник α буде визначено нижче. Про функцію ϑ зробимо припущення:

$$\int u^2\vartheta(1-u)du = \mathrm{const}, \quad (3)$$

так що ϑ спадає при зростанні її арґументу (функцією ϑ може бути Ґаусова функція). Тому при $x \to 0$ маємо скейлінг $W \sim x^{-\alpha}$. Виходячи з визначення W як густини ймовірности, слід урахувати такі властивості: $W(u) = W(-u)$, $\int W(u)du = 1$, де $u \equiv r - r'$. Це дозволяє переписати рівняння (1) у вигляді

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \int du\,[P(x+u,t) - P(x,t)]\,W(u), \quad (4)$$

у фур'є-просторі рівняння (4) стає диференційним

$$\frac{\partial P(k)}{\partial t} = [W(k) - 1]\,P(k), \quad (5)$$

де

$$W(k) = \mathcal{F}(W(x), k) = \int_0^\infty e^{ikx} W(x) dx. \qquad (6)$$

Використовуючи аналітичне продовження гамма-функції $\Gamma(\ldots)$ для фур'є-компоненти, (6) одержуємо

$$W(k) = \int_0^\infty x^{-\alpha} e^{ikx} dx = (ik)^{\alpha-1} \int_0^\infty z^{-\alpha} e^{-z} dz$$
$$= \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha-1} (ik)^{\alpha-1}. \qquad (7)$$

При переході до x-простору застосуємо визначення дробової похідної

$$\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} \Phi(x) = \int dk (ik)^\nu \Phi(k) e^{-ikx}, \qquad (8)$$

що перетворює (5) у дробоводиференційне рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x,t) = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha-1} \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial x^{\alpha-1}} P(x,t) - P(x,t). \qquad (9)$$

Останній член рівняння (9) задає релаксацію і для систем без адсорбуючих процесів має бути опущений.

При розв'язанні макроскопічного рівняння (9) скористаймось методом Фур'є, який дозволяє покласти $P(x,t) = \phi(x)\psi(t)$. Далі, йдучи за [8], замість (9) маємо:

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(x)\psi(t) = \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha-1} \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial x^{\alpha-1}} \phi(x)\psi(t) - \phi(x)\psi(t). \qquad (10)$$

Часова залежність набуває експоненційного характеру

$$\psi(t) = \psi(0) e^{-\lambda_0 t}. \qquad (11)$$

Для функції $\phi(x)$ одержуємо рівняння

$$\frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial x^{\alpha-1}} \phi(x) = -\gamma \phi(x), \qquad \gamma \equiv \frac{(1-\lambda_0)(\alpha-1)}{\Gamma(2-\alpha)}. \qquad (12)$$

При розв'язанні рівняння (12) застосовуємо техніку перетворень Лапласа–Мелліна [9], так що

$$\phi(u) = \mathcal{L}(\phi(x), u) = \int_0^\infty \phi(x) e^{-ux} dx, \qquad (13)$$

$$\phi(s) = \mathcal{M}(\phi(x), s) = \int_0^\infty \phi(x) x^{s-1} dx \qquad (14)$$

є відповідними трансформантами. Зв'язок між ними задається формулою

$$\mathcal{M}(\phi(x), s) = \frac{1}{\Gamma(1-s)} \mathcal{M}(\mathcal{L}(\phi(x), u), 1-s), \qquad (15)$$

у загальному випадку

$$\mathcal{M}(\Phi(cx^d), s) = \frac{1}{d} c^{-s/d} \mathcal{M}(\Phi(x), s/d), \qquad c, d > 0. \qquad (16)$$

Відповідно до (12) інтеґрал (13) дає

$$\phi(u) = \frac{\phi(0)}{\gamma + u^{\alpha-1}}, \qquad \phi(0) = \mathrm{const}. \qquad (17)$$

Унаслідок використання зв'язку (15) трансформанта Мелліна набуває вигляду

$$\phi(s) = \gamma^{-1} \phi(0) \left\{ \frac{\gamma^{(1-s)/\alpha-1}}{\alpha-1} \; \frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha-1} - \frac{s}{\alpha-1}) \Gamma(1 - \frac{1}{\alpha-1} + \frac{s}{\alpha-1})}{\Gamma(1-s)} \right\}, \qquad (18)$$

де відповідно до (16) $\alpha > 1$, $\gamma > 0$. Інвертуючи (18), переходимо до звичайного простору, в якому залежність від x задається виразом [8]

$$\phi(x) = \frac{\phi(0) x^{\alpha-2}}{\alpha-1} H_{11}^{12} \left(\gamma^{1/(\alpha-1)} x \middle| \begin{matrix} (0, 1/(\alpha-1)) \\ (0, 1/(\alpha-1))(2-\alpha, 1) \end{matrix} \right), \qquad (19)$$

де H_{11}^{12} визначається як функція Фокса (обернене перетворення Мелліна [10], див. додаток). Розкладаючи в ряд функцію Фокса, одержуємо

$$\phi(x) = \gamma x^{\alpha-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k(\alpha-1)+\alpha-1)} (-\gamma x^{\alpha-1})^k. \tag{20}$$

Так що в границі $x \to 0$ маємо скейлінґ

$$\phi(x) \propto x^{\alpha-2}. \tag{21}$$

Сума в (20) подається як узагальнена функція Міттаґа–Лєфлєра $E_{\alpha-1,\alpha-1}(z)$ [11], де її арґументом виступає $-\gamma x^{\alpha-1}$. Таким чином, загальний розв'язок дробоводиференційного рівняння Фоккера–Планка має вигляд

$$P(x,t) = Z^{-1} e^{-\lambda_0 t} x^{\alpha-2} E_{\alpha-1,\alpha-1} \left(-\frac{(1-\lambda_0)(\alpha-1)}{\Gamma(2-\alpha)} x^{\alpha-1} \right). \tag{22}$$

У стаціонаному випадку безадсорбуючої системи він збігається із залежністю (21) [12], тобто $P_s(x) \propto x^{\alpha-2}$.

Величину показника α та його фізичне значення можна з'ясувати із часових залежностей для x. Для цього доцільно перейти до рівняння Фоккера–Планка завдяки зображенню його у вигляді ряду Крамерса–Мойала [13]

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^k M_k P(x,t), \tag{23}$$

де для перших двох моментів маємо визначення

$$M_1 = \int W(x,y) y \, dy, \tag{24}$$

$$M_2 = \int W(x,y) y^2 \, dy. \tag{25}$$

Апроксимуючи ϑ ґаусіяном

$$\vartheta(1-u) = (2\pi\sigma_0^2)^{-1/2} \exp(-u^2/2\sigma_0^2) \tag{26}$$

та враховуючи визначення детерміністичної сили еволюції $f(x) = -M_1$ й ефективного коефіцієнта дифузії $\sigma^2 \mathcal{D} = M_2$ ($\sigma = \text{const}$), одержуємо [7]

$$f(x) = -\epsilon x^{2-\alpha}, \qquad \epsilon = 2\sigma/\sqrt{\pi}, \qquad \sigma^2 = \sigma_0^2/2, \tag{27}$$

$$\mathcal{D}(x) = x^{3-\alpha}. \tag{28}$$

Складові (27), (28) дозволяють записати відповідне рівняння Ланжевена

$$\frac{d}{dt} x = f(x) + \sigma \sqrt{\mathcal{D}(x)} \xi(t), \tag{29}$$

де $\xi(t)$ є білим шумом із стандартними властивостями $\langle \xi(t) \rangle = 0$, $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t-t')$. Згідно з результатами, що викладені в огляді [7], сила (27) є нічим іншим, аніж ефективним дрейфом, викликаним урахуванням фрактальних особливостей фазового простору системи. Таким чином, дробоводиференційному рівнянню Фоккера–Планка (9) та його еквівалентові (23) з визначеннями (24), (25) відповідає рівняння Ланжевена з мультиплікативним шумом (29).

Розгляньмо часову поведінку перших двох моментів системи, що описується рівнянням (29). Проводячи усереднення рівняння Ланжевена, маємо:

$$\langle \dot{x} \rangle = -\epsilon_0 \langle x^{2-\alpha} \rangle, \tag{30}$$

де застосовано заміну $t \to t' = \sigma t$, $\epsilon_0 = \epsilon/\sigma$. Водночас для створення рівняння еволюції другого моменту слід урахувати визначення стохастичного диференціяла [14] та зображення $dx^2 = 2x\,dx + (dx)^2$. У результаті еволюція другого моменту задається рівнянням

$$\langle \dot{x^2} \rangle = (1 - 2\epsilon_0) \langle x^{3-\alpha} \rangle. \tag{31}$$

При визначенні дробових моментів у (30), (31) скористаймось стаціонарним розподілом системи (розв'язком рівняння Фоккера–Планка (23)), який збігається з (21). Ураховуючи умову нормування

$$\lim_{X \to \infty} \int_0^X P(x) dx = 1, \tag{32}$$

одержуємо

$$P(x) = Z^{-1} x^{\alpha-2}, \tag{33}$$

$$Z = (\alpha-1) X^{1-\alpha}, \quad X \to \infty. \tag{34}$$

Далі ми використовуємо припущення щодо скейлінґу моментів із урахуванням найбільшого внеску, так що

$$\langle x^\nu \rangle = \mathcal{A}(\nu,n)\langle x^n\rangle^{\gamma(\nu,n)}, \qquad n=1,2. \tag{35}$$

Згідно з означенням $\langle x^\nu\rangle$ та $\langle x^n\rangle$ за розподілом (32) показник $\gamma(\nu,n)$ та константа $\mathcal{A}(\nu,n)$ набувають вигляду

$$\gamma(\nu,n)=\nu/n, \qquad \mathcal{A}(\nu,n)=\frac{\alpha-1}{\alpha+\nu-1}\left(\frac{\alpha+n-1}{\alpha-1}\right)^{\nu/n}, \tag{36}$$

де $\mathcal{A}(\nu,n)$ враховує нормування розподілу та значення відповідних інтеґралів на верхній границі. Виходячи з припущення (35), що є відголоском звичайного макроскопічного співвідношення $\langle x^\nu\rangle \simeq \langle x\rangle^\nu$, для рівняння (30) маємо

$$\langle \dot{x}\rangle = -\epsilon_0\mathcal{A}(2-\alpha,1)\langle x\rangle^{2-\alpha}. \tag{37}$$

Розв'язок рівняння (37) набуває вигляду цаллісівської експоненти

$$\langle x(t)\rangle = \left(1-\epsilon_0(\alpha-1)\mathcal{A}(2-\alpha,1)t\right)^{1/(\alpha-1)}. \tag{38}$$

Згідно з апроксимацією процесу $\langle x(t)\rangle$ співвідношенням Герста $\langle x(t)\rangle \propto t^H$, де H— показник Гьольдера, пов'язаний із внутрішньою фрактальною вимірністю $D=H^{-1}$ [15], випливає співвідношення

$$\alpha = 1+D. \tag{39}$$

Відповідно розв'язок рівняння еволюції другого моменту має вигляд

$$\langle x^2(t)\rangle = \left(1-2D^{-1}(1-2\epsilon_0)\mathcal{A}(2-D,2)t\right)^{2/D}. \tag{40}$$

Таким чином, згідно з (40), у границі $t\to\infty$ одержуємо $\langle x^2(t)\rangle \propto t^{2/D}$. Випадку звичайної дифузії відповідає вимірність фазового простору $D=2$. Для систем із $D<2$, виключаючи випадки $D=1$, $D=0$, які визначають полюси гамма-функції, реалізується супердифузійний режим. Окрім того, із наведеного вище випливає, що системи з амплітудою мультиплікативного шуму, яка апроксимується функцією типу $x^a(t)$, $a\in[0,1]$, реалізується супердифузійний режим, де $D=2(1-a)$. Системи такого типу проаналізовані в працях [16,17], де було з'ясовано, що аналогічний характер має часова залежність для найбільш імовірного значення стохастичної змінної x у границі $x\to 0$.

ДОДАТОК: ВИЗНАЧЕННЯ H ФУНКЦІЇ ФОКСА

Узагальнена H функція визначається як обернена трансформанта Мелліна [10]:

$$H^{mn}_{PQ}\left(z\left|\begin{matrix}(a_1,A_1)\cdots(a_P,A_P)\\(b_1,B_1)\cdots(b_P,B_P)\end{matrix}\right.\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{G}}\frac{\prod\limits_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+B_js)\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j-A_js)}{\prod\limits_{j=m+1}^{Q}\Gamma(1-b_j-B_js)\prod\limits_{j=n+1}^{P}\Gamma(a_j+A_js)}z^{-s}ds. \tag{A.1}$$

Контур інтеґрування $\mathcal{G}$ вибрано так, щоб розділити полюси $\Gamma(b_j+B_js)$ та $\Gamma(1-a_j-A_js)$. Пустий добуток інтерпретується як 1. Цілочисельні змінні m,n,P,Q задовольняють умови: $0\le m\le Q$, $0\le n\le P$, коефіцієнти A_j, B_j є позитивними, параметри a_j, b_j вилучають збіг полюсів у підінтеґральній функції. Інтеґрал (A.1) збігається за умови

$$\Xi=\sum_{j=1}^{n}A_j-\sum_{j=n+1}^{P}A_j+\sum_{j=1}^{m}B_j-\sum_{j=m+1}^{Q}B_j>0, \tag{A.2}$$

так що функція H визначається в секторі $|\arg z|<\Xi\pi/2$. Функція Фокса визначається також при

$$\Lambda=\sum_{j=1}^{Q}B_j-\sum_{j=1}^{P}A_j>0 \text{ коли } 0<|z|<\infty \tag{A.3}$$

або

$$\Lambda = 0 \text{ та } 0 < |z| < R = \prod_{j=1}^{P} A_j^{-A_j} \prod_{j=1}^{Q} B_j^{B_j}. \tag{A.4}$$

Розкладання H функції в ряд стає можливим за умови $\Lambda \geq 0$:

$$H_{PQ}^{mn}\left(z \middle| \begin{matrix} (a_1, A_1) \cdots (a_P, A_P) \\ (b_1, B_1) \cdots (b_P, B_P) \end{matrix}\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod\limits_{j=1, j\neq i}^{m} \Gamma\left(b_j - (b_i + k)\frac{B_j}{B_i}\right) \prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma\left(1 - a_j + (b_i + k)\frac{A_j}{B_i}\right)}{\prod\limits_{j=m+1}^{Q} \Gamma\left(1 - b_j + (b_i + k)\frac{B_j}{B_i}\right) \prod\limits_{j=n+1}^{P} \Gamma\left(a_j - (b_i + k)\frac{A_j}{B_i}\right)} \frac{(-1)^k z^{(b_i+k)/B_i}}{k! B_i}, \tag{A.5}$$

де вважається $B_k(b_j + l) \neq B_j(b_k + s)$ для $j \neq k$, $j \geq 1$, $k \leq m$ та $l, s = 0, 1, \ldots$

[1] К. В. Чукбар, Журн. эксп. теор. физ. **108**, 5(11), 1875, (1995).
[2] G. Jumarie, Chaos, Solitons and Fractals **11**, 1097, (2000).
[3] E. W. Montroll, M. F. Shlesinger, in *Studies in Statistical Mechanics, Vol. 11*, edited by J. Lebowitz, E. W. Montroll (North-Holland, Amsterdam, 1984), p. 1.
[4] R. Hilfer, Chaos, Solitons and Fractals **5**, 1475, (1995).
[5] J.-P. Bouchand, A. Georges, Phys. Rep. **195**, 127, (1990).
[6] P. Castiglione, A. Mazzino, P. Muratore-Ginanneschi, A. Vulpani, Physica D **134**, 75, (1999).
[7] А. И. Олемской, Усп. физ. наук **168**, 287, (1998).
[8] S. A. El-Wakil, M. A. Zahran, Chaos, Solitons and Fractals **11**, 791, (2000).
[9] W. Schneider, W. Wyss, J. Math. Phys. **25**, 134, (1988).
[10] A. Prudnikov, Y. Brychkov, O. Marichev, *Inegrals and series, Vol. 3* (Gordon and Breach, New York, 1990).
[11] A. Erdelyi *et al.*, *Higher Transcendental Functions. Vol. III.* (Kriger, Malabar, 1981).
[12] R. Hilfer, Phys. Rev. E **48**, 2466, (1993) .
[13] H. Risken, *The Fokker–Plank equation* (Springer–Verlag, Berlin Heidelberg, 1989).
[14] В. Хорстхемке, Р. Лефевр, *Индуцированные шумом переходы* (Мир, Москва, 1990).
[15] Е.Федер, *Фракталы*, (Мир, Москва, 1991).
[16] Д. О. Харченко, Журн. фіз. досл. **3**, 415, (1999).
[17] А. И. Олемской, Д. О. Харченко, Физ. тверд. тела **42**, 520, (2000).

CONDITIONS OF THE ANOMALOUS DIFFUSION IN STOCHASTIC SYSTEMS

D. O. Kharchenko
Sumy State University
2 Ryms'kyi–Korsakov Str., Sumy, UA–40007, Ukraine

A system with a probability for the microscopic transition of scaling character entering the master equation is considered. We show that such a kind of approximation reduces to a fractional order the Fokker–Planck equation. It provides for the appearance of the superdiffusion conditions. Such an anomalous behaviour is explained by the fractal phase space of the system with multiplicative noise.