ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 5, № 1 (2001) с. 7–13

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 5, No. 1 (2001) p. 7–13

ПРО ПОРІВНЯННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ ДІРАКА Й МАТІСОНА–ПАПАПЕТРУ В ПОЛІ ШВАРЦШІЛЬДА

Р. Пляцко
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України
вул. Наукова, 3-б, Львів, 79601, Україна

(Отримано 25 липня 2000 р.; в остаточному вигляді — 26 січня 2001 р.)

Обговорено актуальність пошуку та аналізу тих розв'язків загальноковаріянтного рівняння Дірака, що є відповідниками відомих ультрарелятивістичних розв'язків рівнянь Матісона–Папапетру, на поведінку яких суттєво впливає ґравітаційна спін-орбітальна взаємодія. Як перший крок у цьому напрямку розглянуто такий частковий розв'язок рівняння Дірака в полі Шварцшільда, який асоціюється з розв'язком рівнянь Матісона-Папапетру, що описує ультрарелятивістичну колову орбіту радіуса $3M$, де M — шварцшільдівська маса.

Ключові слова: Рівняння Дірака й Матісона–Папапетру, ультрарелятивістична ґравітація, ґравітаційна спін-орбітальна взаємодія.

PACS number(s): 04.20.Cv, 11.10.Qr, 95.30.Sf

I. ВСТУП

Уже через рік потому, як П. А. М. Дірак записав відоме релятивістичне хвильове рівняння для електрона, В. О. Фок, Д. Д. Іваненко та Ґ. Вайль узагальнили його на випадок наявности ґравітаційного поля, трактованого в сенсі загальної теорії відносности [1]. Ключовим моментом цього узагальнення було введення поняття паралельного переносу спінора, подібно до відомого раніше поняття паралельного переносу вектора, і відповідно коваріянтної похідної для спінора. Тому таке рівняння часто називають загальноковаріянтним рівнянням Дірака.

На відміну від звичайного рівняння Дірака, розв'язки якого почали активно досліджувати відразу по його одержанні і з успіхом застосовувати до опису квантових систем з електромагнетним полем, розв'язки загальноковаріянтного рівняння Дірака протягом декількох десятиліть не притягали помітної уваги. Основною причиною цього була надзвичайна малість прогнозованих ефектів впливу ґравітаційного поля на поведінку хвильової функції електрона.

Цікаво, що класичні (неквантові) рівняння для опису руху пробної частинки із внутрішнім обертанням ("спіном") у ґравітаційному полі загальної теорії відносности були одержані пізніше за відповідні квантові рівняння, а саме, у праці М. Матісона [2], яку повторив в основних моментах А. Папапетру [3]. Рівняння Матісона–Папапетру можна трактувати як загальноковаріянтні рівняння, узагальнюючи ті рівняння, які розглядав Я. Френкель при релятивістичному аналізі електродинаміки електрона, що обертається [4].

Хоч аналіз окремих розв'язків рівнянь Матісона–Папапетру у ґравітаційному полі Шварцшільда започаткували ще 1951 р. А. Папапетру та Е. Коріналдесі [5] і продовжили інші автори, усе ж ці дослідження мали значною мірою епізодичний характер, зокрема тому, що, як і загальноковаріянтне рівняння Дірака, не стимулювались практичними потребами. Однак на теоретичному рівні питання про зв'язок між рівняннями Матісона-Папапетру і рівнянням Дірака аналізували досить активно, особливо в 70–80 роки [6]. Оскільки сам факт існування зв'язку між цими рівняннями є природним унаслідок необхідности виконання принципу відповідности, основним моментом тут була конкретна реалізація процедури декватування загальноковаріянтного рівняння Дірака, вибору відповідного усереднення для хвильових характеристик, накладання додаткових умов. Зауважимо, що декватування звичайного рівняння Дірака і його зв'язок із рівняннями, які одержав М. Матісон, аналізували ще на початку 50-их років [7] (іноді останні рівняння при відсутності ґравітаційного поля називають рівняннями Вайсенгофа [8], покликаючись на працю [9]).

Поруч із процедурою, яка встановлює перехід від загальноковаріянтного рівняння Дірака до рівнянь Матісона–Папапетру, що не вимагає розгляду конкретних розв'язків рівнянь, становить інтерес порівняння також і розв'язків власне рівняння Дірака (тобто без попереднього його декватування) з відповідними розв'язками рівнянь Матісона–Папапетру. Ця задача актуальна з декількох причин. По-перше, за останні 25 років досягнуто суттєвого проґресу в можливостях дослідження розв'язків рівняння Дірака у ґравітаційних полях Шварцшільда, Керра та інших, яким властива аксіяльна симетрія, оскільки вдалося розділити змінні [10,11]. По-друге, виявлено, що рівняння Матісона–Папапетру мають важливі розв'язки, які описують ультрарелятивістичні рухи пробної частинки зі спіном у ґравітаційних полях Шварцшільда й Керра [12]. Такі рухи зазнають суттєвого впливу ґравітаційної спін-орбітальної взаємодії, причому в ультрарелятивістичній ділянці додаткове негеодезійне прискорення стає настільки значним, викликаючи інтенсивне електромагнетне випромінювання класичного електрона, що послідовний опис вимагає врахування квантових ефектів і отже, розгляду відповідних розв'язків рівняння Дірака.

Серед ультрарелятивістичних розв'язків рівнянь Матісона-Папапетру в полі Шварцшільда важливе місце займають точні часткові розв'язки, що описуються компактними аналітичними виразами і містять нетривіяльну інформацію про ґравітаційну ультрарелятивістичну спін-орбітальну взаємодію. Саме для таких розв'язків розпочнемо пошуки відповідників серед розв'язків рівняння Дірака.

II. РІВНЯННЯ ДІРАКА В ПОЛІ ШВАРЦШІЛЬДА ПІСЛЯ РОЗДІЛЕННЯ ЗМІННИХ

Загальноковаріянтне рівняння Дірака можна записати у вигляді [11]

$$(i\gamma^\mu \nabla_\mu - m)\Psi = 0, \tag{1}$$

де Ψ — 4-компонентний спінор, m — маса частинки, γ^μ — залежні від координат матриці Дірака, що узагальнюють звичайні матриці Дірака для викривленого простору-часу, ∇_μ — спінорна коваріянтна похідна (використовується система одиниць, у якій швидкість світла у вакуумі, ґравітаційна стала та стала Планка чисельно дорівнюють 1). Явний вигляд матриць γ^μ залежить від вибору локального координатного базису; і виявляється, що саме у формалізмі Ньюмена–Пенроуза, коли введено ізотропний базис, вдається досягнути повного розділення змінних у рівнянні (1) для ґравітаційних полів Шварцшільда, Керра та деяких інших. Після розділення змінних у рівнянні Дірака в полі Шварцшільда вирази для компонент 4-спінора набувають вигляду [10,11]

$$\Psi_1 = \frac{1}{r\sqrt{2}} R_{-1/2}(r) S_{-1/2}(\theta) \exp[i(\sigma t + m'\varphi)],$$

$$\Psi_2 = R_{+1/2}(r) S_{+1/2}(\theta) \exp[i(\sigma t + m'\varphi)],$$

$$\Psi_3 = -R_{+1/2}(r) S_{-1/2}(\theta) \exp[i(\sigma t + m'\varphi)],$$

$$\Psi_4 = -\frac{1}{r\sqrt{2}} R_{-1/2}(r) S_{+1/2}(\theta) \exp[i(\sigma t + m'\varphi)], \tag{2}$$

де змінні r, θ, φ, t є стандартними шварцшільдівськими координатами, σ — частота відповідної хвилі, m' — ціле число, що визначає періодичність за кутом φ; $S_{+1/2}$ і $S_{-1/2}$ — відомі спінові сферичні функції, $R_{+1/2}(r)$ і $R_{-1/2}(r)$ — невідомі радіяльні функції. Тобто, щоб одержати остаточні явні вирази для компонент 4-спінора, лишається знайти явні вирази для двох функцій $R_{+1/2}(r)$, $R_{-1/2}(r)$. Замість рівнянь, для цих функцій зручно розглянути рівняння для іншої пари функцій радіяльної координати, $\psi_{+1/2}(r)$, $\psi_{-1/2}(r)$ (у позначеннях [10]), пов'язаних з $R_{+1/2}(r)$, $R_{-1/2}(r)$ співвідношеннями

$$R_{+1/2}(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2Mr}} \psi_{+1/2}(r) \exp\left(-\frac{i}{2} \arctan \frac{mr}{\lambda}\right),$$

$$R_{-1/2}(r) = \psi_{-1/2}(r) \exp\left(+\frac{i}{2} \arctan \frac{mr}{\lambda}\right), \tag{3}$$

де M — шварцшільдівська маса, λ — параметр розділення, залежний від значення орбітального моменту. Функції $\psi_{+1/2}(r)$, $\psi_{-1/2}(r)$ знаходимо як розв'язки системи двох лінійних диференціяльних рівнянь

$$\left(\frac{d}{d\hat{r}_*} - i\sigma\right) \psi_{+1/2} = W \psi_{-1/2}, \tag{4}$$

$$\left(\frac{d}{d\hat{r}_*} + i\sigma\right) \psi_{-1/2} = W \psi_{+1/2}, \tag{5}$$

де, замість радіяльної координати r, уведено нову незалежну змінну $\hat{r}_*$, причому зв'язок між r і $\hat{r}_*$ визначаємо співвідношеннями

$$\hat{r}_* = r_* + \frac{1}{2\sigma} \arctan \frac{mr}{\lambda}, \tag{6}$$

де своєю чергою

$$\frac{dr_*}{dr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}. \tag{7}$$

Функція W, залежна від r, σ, λ, має вигляд

$$W = \frac{(r^2 - 2Mr)^{1/2} (\lambda^2 + m^2 r^2)^{3/2}}{r^2(\lambda^2 + m^2 r^2) + (\lambda m / 2\sigma)(r^2 - 2Mr)}. \tag{8}$$

Розглядаючи рівняння (4), (5) для лінійної комбінації функцій $\psi_{+1/2}$, $\psi_{-1/2}$

$$Z_+ = \psi_{+1/2} + \psi_{-1/2}, \tag{9}$$

$$Z_- = \psi_{+1/2} - \psi_{-1/2},$$

одержуємо систему рівнянь

$$\left(\frac{d}{d\hat{r}_*} - W\right) Z_+ = i\sigma Z_-, \tag{10}$$

$$\left(\frac{d}{d\hat{r}_*} + W\right) Z_- = i\sigma Z_+.$$

Отже, аналізуючи розв'язки рівнянь (10), можна вивчати поведінку хвильової функції частинки зі спіном 1/2 в полі Шварцшільда при різних значеннях її енерґії та орбітального квантового числа.

III. ТОЧНІ ЧАСТКОВІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯНЬ МАТІСОНА–ПАПАПЕТРУ В ПОЛІ ШВАРЦШІЛЬДА

Найпростішим із відомих розв'язків рівнянь Матісона–Папапетру в полі Шварцшільда є той, що описує радіяльний рух пробної частинки зі спіном. Виявляється, що світова лінія для такого руху точно збігається з відповідною геодезійною світовою лінією, тобто спін частинки зовсім не впливає на її поступальний рух. Такий вплив проявляється лише тоді, коли частинка має відмінний від нуля орбітальний момент, тобто ненульову танґенціяльну компоненту швидкости, що означає включення ґравітаційної спін-орбітальної взаємодії. Оскільки саме ця взаємодія визначає кількісні параметри впливу спіну частинки на її рух, доцільно розглянути ті розв'язки рівнянь Матісона–Папапетру в полі Шварцшільда, що описують колові орбіти. З одного боку, на ці орбіти, на відміну від радіяльних, уже впливає ґравітаційна спін-орбітальна взаємодія, з іншого — аналіз відповідних розв'язків рівнянь Матісона–Папапетру можна зробити найбільш повно. Справді, досліджуючи екваторіяльні колові орбіти в площині $\theta = \pi/2$ стандартних шварцшільдівських координат, коли спін частинки ортогональний до площини руху, приходимо до такого рівняння, що визначає залежність орбітальної компоненти 4-швидкости $u_\perp = r\dot{\varphi}$ від маси джерела поля M і частинки m, радіуса орбіти $r = \mathrm{const}$ і єдиної відмінної від нуля компоненти 3-вектора спіну S_θ [13, с. 116]:

$$u_\perp^3 \left(1 - \frac{3M}{r}\right)^2 \frac{S_\theta}{mr^2} - u_\perp^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 - \frac{3M}{r}\right) + u_\perp \frac{M}{r}\left(2 - \frac{3M}{r}\right)\frac{S_\theta}{mr^2} + \frac{M}{r}\left(1 - \frac{2M}{r}\right) = 0. \tag{11}$$

Підкреслимо, що рівняння (11) є наслідком рівнянь Матісона–Папапетру з доповняльною умовою, відомою як умова Пірані. Роль цієї умови полягає у виділенні руху центра маси частинки, що обертається. Однак у релятивістичній механіці, на відміну від ньютонівської, положення центра маси тіла, що має внутрішнє обертання, залежить від системи відліку, й умову Пірані задовольняє не лише власний центр маси як найближчий аналог ньютонівського центра маси (наприклад, для тіла у вигляді кулі однорідної густини маси ним є геометричний центр кулі), але й деяка сукупність інших центрів маси, що рухаються стосовно власного центра маси [14, с. 130]. Зокрема, такі рухи відображені в рівнянні (11). Справді, покладаючи в (11) $M = 0$, знаходимо розв'язок

$$u_\perp = \frac{mr^2}{S_\theta}, \tag{12}$$

що відповідає коловим рухам невласних центрів маси, які ще називають вайсенгофськими коловими орбітами [9]. Тобто цей розв'язок описує ситуацію, коли власний центр маси й частинка як ціле нерухомі в просторі Мінковського, а невласні центри маси циркулюють щодо єдиного власного центра маси коловою орбітою радіуса r. Відповідний розв'язок рівняння (11) існує і в полі Шварцшільда. Наприклад, у слабкому ґравітаційному полі $M/r \ll 1$, замість (12) з рівняння (11) одержуємо

$$u_\perp = \frac{mr^2}{S_\theta}\left[1 + \frac{M}{r}\left(1 - 3\frac{S_\theta^2}{M^2 r^4}\right)\right]. \tag{13}$$

Якщо ж умова $M/r \ll 1$ не виконується, то є сенс розглядати рівняння (11) лише з урахуванням умови пробности частинки [15], яка в нашому випадку набуває вигляду

$$\frac{S_\theta^2}{M^2 r^4} \ll 1, \tag{14}$$

оскільки самі рівняння Матісона–Папапетру одержані з урахуванням умови пробности. Сенс цієї умови в тому, що в межах розмірів частинки ґравітаційне поле повинно змінюватись мало.

Отже, розгляньмо розв'язки рівняння (11) з урахуванням умови (14). Спочатку зауважимо, що коли $S_\theta = 0$, тобто частинка безспінова, то два корені рівняння (11) мають вигляд

$$u_\perp = \pm\sqrt{\frac{M}{r}}\left(1 - \frac{3M}{r}\right)^{-1/2}, \tag{15}$$

тобто, як і повинно бути, збігаються з відповідними розв'язками рівнянь геодезійних ліній, що описують колові рухи у двох протилежних напрямках за кутом φ. Із (15) випливає відомий факт, що колові неізотропні геодезійні орбіти в полі Шварцшільда існують лише при $r > 3M$. Якщо ж $S_\theta \neq 0$, але виконується умова (14), то при $r > 3M$ рівняння (11) має три корені. Два з них є аналогами (15):

$$u_\perp = \pm\sqrt{\frac{M}{r}}\left(1 - \frac{3M}{r}\right)^{-1/2} \tag{16}$$

$$+\frac{3}{2}\frac{S_\theta}{mr^2}\frac{M}{r}\left(1-\frac{3M}{r}\right)^{-1},$$

тобто дають спінову поправку до кутової швидкости руху частинки по коловій орбіті. Третій корінь рівняння (11) при $r > 3M$ є формальним продовженням виразу (13), справедливого при $M/r \ll 1$, на всю ділянку значень r: від $M/r \ll 1$ до $r > 3M$.

Окремим є випадок $r = 3M$. Зауважимо, що колова орбіта такого радіуса особлива вже в контексті досліджень розв'язків рівнянь геодезійних ліній у полі Шварцшільда, оскільки по ній може рухатись лише світловий промінь, тобто вона є ізотропною.

Зразу видно, що при $r = 3M$ рівняння (11) має єдиний корінь

$$u_\perp = -\frac{3mM}{S_0}. \tag{17}$$

За умовою пробности (14) згідно з (17) маємо $u_\perp^2 \gg 1$, тобто швидкість руху частинки по цій орбіті є ультрарелятивістичною. Світова лінія пробної частинки зі спіном, яка відповідає орбіті $r = 3M$, неізотропна, на відміну від геодезійної колової орбіти такого ж радіуса. Цікаво, що розв'язок (17), як легко переконатись, є спільним для (11) і відповідного вкороченого варіянта рівнянь Матісона–Папапетру з умовою Пірані, у якому відсутні члени з вищими похідними [13]. Укорочені рівняння Матісона–Папапетру не містять розв'язків, що описують рухи невласних центрів маси. Отже, розв'язок (17) описує рух власного центра маси пробної частинки зі спіном, і саме на цьому розв'язку зовсім не відбивається підміна точних рівнянь Матісона–Папапетру вкороченими (що, звичайно, не так для загальних випадків руху). До речі, співвідношення (17) з урахуванням (14) збігається також із відповідним розв'язком точних рівнянь Матісона–Папапетру з доповняльною умовою Тульчиєва–Діксона [16], яку іноді розглядають як альтернативу умові Пірані з метою виключення розв'язків для невласних центрів маси.

Рух по коловій орбіті радіуса $3M$ з 4-швидкістю (17) привертає увагу з двох причин. З одного боку, він достатньо близький до геодезійного руху в тому сенсі, що для нього вирази інтеґрала енерґії E і моменту кількости руху Φ збігаються з відповідними виразами для геодезійного руху (див. [13]; колові орбіти з $r \neq 3M$ такої властивости не мають). З іншого боку, ґравітаційна спін-орбітальна сила, яка з погляду супутнього спостерігача відхиляє рух частинки від стану геодезійного вільного падіння, має вже суттєво ультрарелятивістичний характер. Під цим розуміємо, що, завдяки впливові релятивістичного γ — фактора Лоренца, спін-орбітальна сила на орбіті $r = 3M$ є значно більшою за абсолютною величиною, ніж на будь-якій неультрарелятивістичній коловій орбіті частинки зі спіном. Справді, використовуючи вирази і процедуру розрахунків, наведених у [17], для величини цієї сили $|\mathbf{F}_{\text{с.-о.}}|$ у випадку колової орбіти $r = 3M$ неважко знайти

$$|\mathbf{F}_{\text{с.-о.}}| = \sqrt{3}\frac{mM}{r^2}. \tag{18}$$

(При цьому сила спрямована радіяльно, тобто перпендикулярно до напрямку руху частинки по орбіті; співвідношення (18) справджується як у лінійному за спіном наближенні, так і при врахуванні всіх спінових членів). Тоді як для всіх (як колових, так і будь-яких неколових) неультрарелятивістичних орбіт відповідні вирази домножуються ще на величину, значно меншу від 1, пов'язану з параметром пробности частинки зі спіном [17].

Отже, оскільки на коловій орбіті $r = 3M$ уже проявляється специфіка ґравітаційної спін-орбітальної взаємодії в ультрарелятивістичному діяпазоні швидкости, доцільно саме для цієї орбіти знайти відповідник серед розв'язків рівняння Дірака в полі Шварцшільда.

IV. РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯННЯ ДІРАКА, АСОЦІЙОВАНИЙ З КОЛОВОЮ ОРБІТОЮ $r = 3M$

У дослідженнях розв'язків рівняння Дірака в полі Шварцшільда (а також в інших полях) основну увагу приділяли випадкові, коли ґравітаційний радіус джерела поля сумірний з комптонівською довжиною хвилі протона чи електрона, що властиве гіпотетичним мікроскопічним чорним дірам [11], оскільки саме в такій ситуації можуть бути суттєвими квантові ефекти. Тут виконується співвідношення

$$mM \ll 1. \tag{19}$$

Розгляньмо інший випадок, коли чорна діра є звичайною (макроскопічною), тобто її маса дорівнює декільком значенням маси Сонця чи навіть значно більша. Тоді замість (19) маємо

$$mM \gg 1. \tag{20}$$

За такої умови відповідні розв'язки рівняння Дірака в полі Шварцшільда повинні мати квазікласичний характер, коли можна вести мову, наприклад, про світову лінію чи траєкторію частинки. Водночас ці розв'язки повинні давати точніший опис порівняно з розв'язками рівнянь Матісона–Папапетру, оскільки враховуватимуть квантові ефекти, що особливо важливо для ультрарелятивістичних рухів частинки зі спіном.

Як зазначено вище, для дослідження поведінки будь-якого розв'язку рівняння Дірака в полі Шварцшільда, в тому числі й того, що нас зараз цікавить — квантовомеханічного відповідника класичної колової орбіти $r = 3M$, необхідно розглянути розв'язки системи рівнянь (10) і врахувати (2). У свою чергу, визначальним у рівняннях (10) є явний вигляд функції W з (8). Саме різні значення параметрів σ і λ в (8), енерґії і моменту кількости руху частинки, відповідають різним випадкам її руху. Перше завдання полягає в тому, щоб указати ті конкретні значення σ і λ, що відповідають орбіті $r = 3M$. Логічно припустити, що ці значення σ і λ близькі до відповідних класичних значень, які визначаються рівняннями Матісона–Папапетру, тобто $\sigma \approx E$, $\lambda \approx \Phi$. Подальші обчислення, які наведемо нижче, вкажуть на прийнятність цього припущення.

Для колової орбіти $r = 3M$ маємо [13]

$$E = 3^{-1/4}\frac{m}{\sqrt{\varepsilon}}, \qquad \Phi = -3^{5/4}\frac{mM}{\sqrt{\varepsilon}}, \tag{21}$$

де

$$\varepsilon \equiv \frac{S_0}{Mm} \ll 1, \tag{22}$$

S_0 — абсолютна величина спіну (зв'язок між компонентами спіну S_θ і S_0 має вигляд $S_\theta = ru_4S_0$ [13, с. 115]; для визначености вважаємо $S_\theta > 0$), причому нерівність у (22) є наслідком умови пробности частинки [15]. Уважатимемо, що в основному наближенні параметри σ і λ дорівнюють відповідним правим частинам співвідношень (21).

Нас цікавить поведінка розв'язків рівняння Дірака в ділянці простору, не надто віддаленій від чорної діри, де r за порядком величини не є значно більшим від M. Точніше, розглядатимемо випадок, коли виконується нерівність

$$\lambda^2 \gg m^2r^2, \tag{23}$$

яка згідно з (21), (22) забезпечується малістю параметра ε за умови, що відношення r/M не компенсує малість ε. Ураховуючи (23) і (20)-(22), для функції W з (8) маємо

$$W = \frac{(r^2 - 2Mr)^{1/2}}{r^2}\lambda. \tag{24}$$

Оскільки в реальних ситуаціях (наприклад, для електрона в полі макроскопічної чорної діри) виконується не лише нерівність (20), але й $\sqrt{mM} \gg 1$ (і відповідно в (22) $\sqrt{\varepsilon} \ll 1$), то згідно з (6) $\hat{r}_* \approx r_*$. У цьому наближенні з рівнянь (10) одержуємо

$$\frac{d^2Z_\pm}{dr_*^2} + \left[\sigma^2 - \frac{r - 2M}{r^3}\lambda^2\right] Z_\pm = 0. \tag{25}$$

Ураховуючи (6) і вирази (21), рівняння (25) зручно переписати в термінах безрозмірних величин:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{-2}\left(1 - \frac{3}{x}\right)^2\left(1 + \frac{6}{x}\right)Ay = 0, \tag{26}$$

де $x \equiv r/M$, $A \equiv m^2M^2/\varepsilon\sqrt{3}$; тут пишемо змінну y замість Z_+ чи Z_-. Унаслідок (20), (22) має місце $A \gg 1$, тому множник при функції y в (26) значно більший від 1 завжди (оскільки розглядаємо ділянку поза поверхнею горизонту, то $x > 2$), за винятком малого околу значення $x = 3$. Проаналізуймо рівняння (26) окремо саме в цьому околі. Коли $|x - 3| \ll 1$, з рівняння (26) випливає

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3A(x - 3)^2y = 0. \tag{27}$$

Це рівняння є частковим випадком того рівняння, розв'язки якого описані, наприклад, в [18]. У малому околі $|x - 3| \ll 1$ маємо такий загальний розв'язок рівняння (27):

$$\begin{aligned} y = {} & C_1\left[1 - \frac{i}{2}\sqrt{3A}(x - 3)^2 - \frac{5}{8}A(x - 3)^4\right] \\ & \times \exp\left[\frac{i}{2}\sqrt{3A}(x - 3)^2\right] \\ & + C_2\left[1 + \frac{i}{2}\sqrt{3A}(x - 3)^2 - \frac{5}{8}A(x - 3)^4\right] \\ & \times \exp\left[-\frac{i}{2}\sqrt{3A}(x - 3)^2\right], \end{aligned} \tag{28}$$

де C_1, C_2 — сталі інтеґрування.

Отже, з урахуванням прийнятих позначень функції Z_+, Z_-, як розв'язки рівняння (25) у малому околі значення $r = 3M$, мають вигляд (28). Ураховуючи рівняння (4), (5) і співвідношення (9), (28), знаходимо

$$\begin{aligned} \psi_{+1/2} &= C\left[1 - \frac{A}{4}(x - 3)^4\right], \\ \psi_{-1/2} &= iC\left[1 - \frac{A}{4}(x - 3)^4\right], \end{aligned} \tag{29}$$

де C — стала інтеґрування.

Отож, у достатньо малому околі значення $r = 3M$, коли $|x - 3| \ll 1$ і $A(x - 3)^4 \ll 1$, функції $\psi_{+1/2}(r)$, $\psi_{-1/2}(r)$ ведуть себе згідно з (29), де $x = r/M$. Звідси, зокрема, помічаємо, що $|\psi_{+1/2}(r)|$ і $|\psi_{-1/2}(r)|$ мають локальний максимум у точці $r = 3M$. Для подальшого дослідження поведінки цих функцій повернімося до рівнянь (4), (5), які з урахуванням прийнятих позначень при $r > 2M$ набувають вигляду:

$$\frac{d\psi_{+1/2}}{dx} - iA\left(1 - \frac{2}{x}\right)^{-1}\psi_{+1/2} \tag{30}$$

$$+3^{3/2}\frac{A}{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-1/2}\psi_{-1/2}=0,$$

$$\frac{d\psi_{-1/2}}{dx}+iA\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-1}\psi_{-1/2}$$

$$+3^{3/2}\frac{A}{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-1/2}\psi_{+1/2}=0.$$

Комп'ютерні розрахунки показують, що функції $|\psi_{+1/2}(r)|$ і $|\psi_{-1/2}(r)|$ як розв'язки рівнянь (30) мають при $r=3M$ не тільки локальний, але й абсолютний максимум, причому виражений тим різкіше, чим більше значення параметра A. При цьому зберігається властивість, що проявилась у виразах (29), а саме, виконується рівність $|\psi_{+1/2}(r)|=|\psi_{-1/2}(r)|$. Рис. 1 ілюструє залежність $|\psi_{+1/2}(r)|^2$ і $|\psi_{-1/2}(r)|^2$ від r/M при $A=10^9$, якщо сталу нормування C, що фіґурує в (29), покласти рівною 1. (Як побачимо нижче, саме через $|\psi_{+1/2}(r)|^2$ і $|\psi_{-1/2}(r)|^2$ виражаються компоненти вектора струму). Тобто ці функції відмінні від нуля лише в малому інтервалі значення $r=3M$.

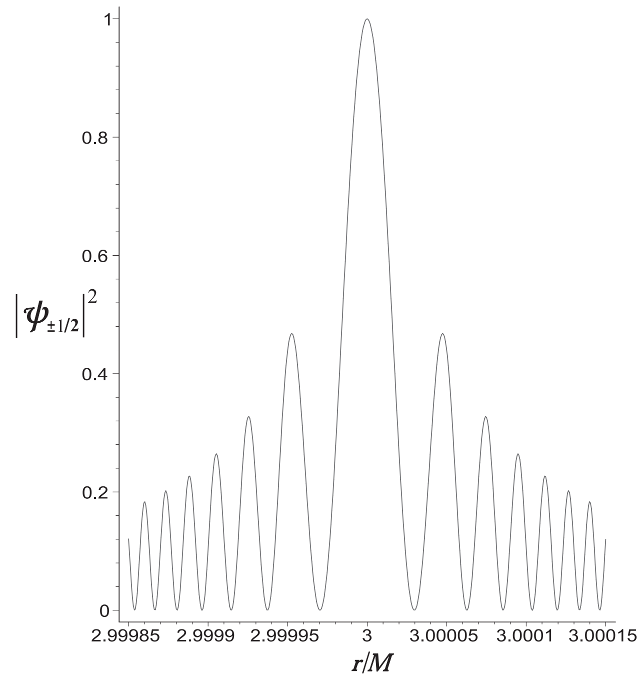

Рис. 1. Залежність $|\psi_{\pm1/2}|^2$ від r/M при $A=10^9$.

Розгляньмо компоненти вектора струму J^μ для діраківської частинки, хвильова функція якої визначається співвідношеннями (2), (3). Використаймо відомий вираз для цього вектора [11]

$$J^\mu=\sqrt{2}\left[l^\mu(|\Psi_1|^2+|\Psi_4|^2)+n^\mu(|\Psi_2|^2+|\Psi_3|^2)\right.$$

$$\left.-\,m^\mu(\Psi_1\Psi_2^*-\Psi_3\Psi_4^*)-m^{*\mu}(\Psi_1^*\Psi_2-\Psi_3^*\Psi_4)\right], \quad (31)$$

де $l^\mu, n^\mu, m^\mu, m^{*\mu}$ — відповідні ізотропні вектори у формалізмі Ньюмена–Пенроуза, причому в стандартних шварцшільдівських координатах компоненти цих векторів є такими [11]:

$$l^\mu=\left\{1,\quad 0,\quad 0,\quad \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\right\},$$

$$n^\mu=\left\{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}\right),\quad 0,\quad 0,\quad \frac{1}{2}\right\},$$

$$m^\mu=\left\{0,\quad \frac{1}{r\sqrt{2}},\quad \frac{i}{r\sqrt{2}\sin\theta},\quad 0\right\},$$

$$m^{*\mu}=\left\{0,\quad \frac{1}{r\sqrt{2}},\quad \frac{-i}{r\sqrt{2}\sin\theta},\quad 0\right\}. \qquad (32)$$

Ураховуючи співвідношення (2), (3), (31), (32), а також рівність $|\psi_{+1/2}(r)|=|\psi_{-1/2}(r)|$, неважко переконатись, що відмінними від нуля є лише компоненти $J^3\equiv J^\varphi$ та $J^4\equiv J^t$, тоді як $J^1\equiv J^r=0$, $J^2\equiv J^\theta=0$. Це означає, що струм циркулює по колу, причому, згідно із зазначеним вище про залежність $|\psi_{+1/2}|$ і $|\psi_{-1/2}|$ від r, відмінні від нуля компоненти струму мають різкий максимум при $r=3M$. Це дозволяє констатувати, що розглянутий частковий розв'язок рівняння Дірака є квантовим відповідником колової орбіти радіуса $r=3M$, яка описується рівняннями Матісона–Папапетру.

V. ВИСНОВКИ

Ми розглянули часткові розв'язки рівнянь Матісона–Папапетру і Дірака, між якими існує відповідність у тому сенсі, що в одному випадку описується колова траєкторія радіуса $3M$, а в другому — квантовий стан діраківського електрона, коли він зосереджений у малому околі саме такого значення радіяльної координати, що дорівнює $3M$. При цьому квантове значення енерґії електрона збігається з класичним, тобто у прийнятих позначеннях має місце рівність $\sigma=E$ (аналогічний висновок стосується і значення моменту кількости руху).

Хоч розглянуті розв'язки є частковими, вони важливі тим, що виявляють роль і можливості ґравітаційної спін-орбітальної взаємодії в ультрарелятивістичній ділянці. Причому якщо при пошуку розв'язків рівнянь Матісона–Папапетру доводиться накладати додаткову умову, як от Пірані, Тульчиєва–Діксона чи якусь іншу, для рівняння Дірака потреби в подібній умові нема.

Становить інтерес подальший розгляд тих розв'язків рівнянь Дірака в полі Шварцшільда, які можна було б назвати відповідниками таких суттєво негеодезійних розв'язків рівнянь Матісона–Папапетру, що описують рухи з великими значеннями енерґії зв'язку. Це, зокрема, сприяло б розробці більш реалістичної картини ґравітаційного колапсу, яка послідовно враховувала б роль ґравітаційної спін-орбітальної взаємодії і відповідних квантових ефектів.

[1] V. Fock, D. Ivanenko, Z. Phys. **54**, 798 (1929); V. Fock, Z. Phys. **57**, 261 (1929); H. Weyl, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **15**, 323 (1929); В. А. Фок, *Альберт Эйнштейн и теория гравитации* (Мир, Москва, 1979), с. 415.

[2] M. Mathisson, Acta Phys. Pol. **6**, 163 (1937).

[3] A. Papapetrou, Proc. R. Soc. London, Ser. A **209**, 248 (1951).

[4] J. Frenkel, Z. Phys. **37**, 243 (1926); Я. И. Френкель, *Собрание избранных трудов. Т. 2* (Изд-во АН СССР, Москва; Ленинград, 1958), с. 460.

[5] E. Corinaldesi, A. Papapetrou, Proc. Roy. Soc. A **209**, 259 (1951).

[6] S. Wong, Int. J. Theor. Phys. **5**, 221 (1972); L. Kannenberg, Ann. Phys. (N. Y.) **103**, 64 (1977); R. Catenacci, M. Martellini, Lett. Nuovo Cimento **20**, 282 (1977); E. Harris, Nuovo Cimento B, **55**, 205 (1980); J. Audretsch, J. Phys. A **14**, 411 (1981); А. К. Горбацевич, *Квантовая механика в общей теории относительности* (Университетское, Минск, 1985); A. Gorbatsievich, Acta Phys. Pol. B **17**, 111 (1986); A. Barut, M. Pavsic, Class. Quantum Gravit. **4**, 41 (1987).

[7] K. Huang, Am. J. Phys. **20**, 479 (1952); L. de Broglie, *La theorie des particules de spin 1/2* (Gauthier-Villars, Paris, 1952).

[8] F. Gürsey, Phys. Rev. **97**, 1712 (1955).

[9] J. Weyssenhoff, A. Raabe, Acta Phys. Pol. **9**, 7 (1947).

[10] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes* (Clarendon Press, Oxford, 1983); С. Чандрасекар, *Математическая теория черных дыр, Ч. 2* (Мир, Москва, 1986).

[11] Д. В. Гальцов, *Частицы и поля в окрестности черных дыр* (Изд-во Моск. ун-та, Москва, 1986).

[12] Р. М. Пляцко, А. Л. Вынар, Докл. Акад. Наук СССР **263**, 1125 (1982); Р. М. Пляцко, Укр. фіз. журн. **39**, 654 (1994); **42**, 389 (1997); Р. М. Пляцко, С. Я. Пукас, Укр. фіз. журн. **40** 517 (1995); R. M. Plyatsko, Cond. Matt. Phys. **1**, 529 (1998).

[13] Р. М. Пляцко, *Прояви гравітаційної ультрарелятивістської спін-орбітальної взаємодії* (Наукова думка, Київ, 1988).

[14] К. Меллер, *Теория относительности* (Атомиздат, Москва, 1975).

[15] R. Wald, Phys. Rev. D **6**, 406 (1972).

[16] W. Tulczyjew, Acta Phys. Pol. **18**, 393 (1959); W. Dixon, Nuovo Cimento **34**, 317 (1964).

[17] R. Plyatsko, Phys. Rev. D **58**, 084031 (1998).

[18] Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям* (Наука, Москва, 1971).

ON THE COMPARISON OF SOLUTIONS OF THE DIRAC AND MATHISSON–PAPAPETROU EQUATIONS IN A SCHWARZSCHILD FIELD

R. Plyatsko

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 3-b Naukova Str., Lviv, UA–79601, Ukraine

The importance of the analysis of the Dirac equation solutions corresponding to such ultrarelativistic solutions of the Mathisson–Papapetrou equations which are caused by the essential influence of the gravitational spin-orbit interaction is discussed. As the first step in this direction we consider the partial solution of the Dirac equation in a Schwarzschild field corresponding to the solution of the Mathisson–Papapetrou equations describing the circular ultrarelativistic orbit of radius $r = 3M$, where M is a Schwarzschild mass.