ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 5, № 2 (2001) с. 107–110

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 5, No. 2 (2001) p. 107–110

ДО ТЕОРІЇ НЕЛІНІЙНОЇ ДИСПЕРСІЇ ХВИЛЬОВИХ ПАКЕТІВ У МЕТОДІ БАГАТЬОХ МАСШТАБІВ

В. П. Лукомський, Ю. В. Седлецький
Інститут фізики Національної академії наук України,
просп. Науки, 46, Київ, 03039, Україна
(Отримано 12 лютого 2001 р.; в остаточному вигляді — 31 липня 2001 р.)

Досліджено еволюцію в часі спектрально вузького хвильового пакета в слабконелінійному середовищі, що описується нелінійним рівнянням Кляйна–Ґордона з поліноміяльною нелінійністю. Методом багатьох масштабів побудовано асимптотичний розклад розв'язку до ϵ^5 включно. Цей розклад визначається комплексною функцією, що має зміст амплітуди першої гармоніки розв'язку, яка задовольняє нелінійне еволюційне рівняння Шредингера вищого порядку.

Ключові слова: нелінійне рівняння Шрединґера, метод багатьох масштабів, нелінійне рівняння Кляйна-Ґордона, солітон, асимптотичний розклад.

PACS number(s): 05.45.-a

Нелінійне рівняння Шрединґера (НРШ) описує повільну еволюцію комплексної обвідної імпульсу з високочастотним заповненням у слабконелінійному дисперсійному середовищі. У найнижчому порядку при врахуванні тільки кубічної нелінійности й параболічної лінійної дисперсії НРШ використовується для дослідження різноманітних фізичних систем і на цю пору набуло загальнофізичного значення. Існує декілька асимптотичних методів його виводу, які ґрунтуються на припущенні слабкої нелінійности системи. Це передусім метод Крилова–Боголюбова–Митропольського (КБМ) [1], спектральний метод [2–4], метод багатьох масштабів (МБМ) [5, 6], метод усередненого лаґранжіяна [7]. Найбільшого поширення в застосуваннях набув МБМ. Водночас останніми роками актуальними стали дослідження поширення ультракоротких імпульсів немалої амплітуди. Так, у техніці волокнисто-оптичного зв'язку для промислової передачі ущільнених інформаційних потоків виникає необхідність застосовувати ультракороткі імпульси. Щоб уникати їх розпливання у зв'язку зі збільшенням дисперсії, потрібно збільшувати їхні амплітуди [8, 9]. Отже, актуальним є урахування наступних нелінійних і дисперсійних членів у відповідних еволюційних рівняннях, які дістали назву НРШ вищих порядків [10–14].

Незважаючи на широке використання МБМ, авторам невідомі опубліковані праці, де цим методом було б отримано НРШ вищого порядку. Водночас такі рівняння були отримані іншими методами [3, 8, 4]. Як видно з методичних праць [5, 6], причина полягає в тому, що до цих пір не сформовано однозначного тлумачення алґоритму обчислення наступних членів в НРШ вищих порядків. У цій праці на класичному прикладі рівняння Кляйна–Ґордона з поліноміяльною нелінійністю подано послідовну процедуру побудови асимптотичного розкладу й виводу НРШ в довільному порядку за малим параметром для комплексної обвідної хвильового пакета.

Розгляньмо поширення квазімонохроматичного хвильового пакета достатньо малої, але скінченної амплітуди, що описується узагальненим нелінійним рівнянням Кляйна–Ґордона з поліноміяльною нелінійністю степеня $P \geq 2$

$$\phi_{tt} - c^2\phi_{xx} + \sum_{p=1}^{P} \alpha_p \phi^p = 0, \tag{1}$$

де c^2, α_p — дійсні числа, $\alpha_1 > 0$. З огляду на слабку нелінійність задачі подамо розв'язок у формі асимптотичного ряду за степенями малого нелінійного параметра ϵ

$$\phi(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \phi^{(n)}(t,x). \tag{2}$$

Наявність малих нелінійних доданків в (1), а також квазімонохроматичність хвильового пакета із значенням частоти-носія ω і хвильового вектора k передбачають існування двох різних масштабів t_0 і $\tau = \epsilon t_0$ зміни поля в часі і відповідно $-x_0$ і $\xi = \epsilon x_0$ у просторі. Тоді часова і просторова похідні розв'язку також мають бути записані у вигляді двох доданків за змінними t_0, τ і x_0, ξ відповідно

$$\phi_t = \phi_{t_0} + \epsilon\phi_\tau, \quad \phi_x = \phi_{x_0} + \epsilon\phi_\xi. \tag{3}$$

Далі побудова асимптотичного розв'язку (2) залежить від постановки початкових і граничних умов для рівняння (1). Вивчім початкову задачу: при $t = 0$ на всій осі $x \in (-\infty; \infty)$ задана функція

$$\phi(x_0,\xi,0) = A(\xi,0)\exp(-ikx_0) + k.c. \tag{1a}$$

з розділеними просторовими змінними і необхідно визначити похідну комплексної обвідної ϕ_τ через значення самої функції та її похідних за ξ. Очевидно, що для крайової задачі змінні x і t міняються місцями. Як відомо [6], основна ідея МБМ полягає в тому, що похідна $\phi_\tau(\xi,\tau)$ зображена асимптотичним рядом

$$\phi_\tau = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^{n-1}\phi_{t_n}, \tag{4}$$

де похідні ϕ_{t_n} становлять собою внесок у вислідну похідну членів порядку ϵ^n, а змінні $t_n = \epsilon^{n-1}\tau$ вважаються незалежними.

Після підстановки (2–4) в основне рівняння (1) і прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ϵ^n отримуємо для $n = 1, 2, ...$

$$(\hat{D}_0 + \alpha_1)\phi^{(n)} = -\sum_{n'=1}^{n-1} \hat{D}_{n'}\phi^{(n-n')}$$
$$-\sum_{p=2}^{\min(n,P)} \alpha_p \sum_{n'=p-1}^{n-1} (\phi^{p-1})^{(n')}\phi^{(n-n')}, \tag{5}$$

де введено позначення

$$\hat{D}_0 = \frac{\partial^2}{\partial {t_0}^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial {x_0}^2},$$
$$\hat{D}_1 = 2\frac{\partial^2}{\partial t_0 \partial t_1} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial \xi},$$
$$\hat{D}_2 = 2\frac{\partial^2}{\partial t_0 \partial t_2} + \frac{\partial^2}{\partial {t_1}^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}, \ldots,$$
$$\hat{D}_{n>2} = \sum_{n'=1}^{n-1} 2\frac{\partial^2}{\partial t_0 \partial t_n} + \frac{\partial^2}{\partial t_{n'} \partial t_{n-n'}}.$$

Із першого з рівнянь (5) випливає, що, як і в початковий момент $t = 0$, швидкі й повільні змінні розділяються

$$\phi^{(1)}(x,t) = A(t_1, t_2, ..., \xi)\exp^{i\theta} + k.c.,$$
$$\theta = \omega t_0 - k x_0, \tag{6}$$

де

$$\omega = \pm\sqrt{c^2k^2 + \alpha_1} \tag{7}$$

— закон дисперсії лінеаризованої задачі.

Надалі розглядатимемо тільки хвилю, яка поширюється в додатному напрямку оси x, що відповідає знакові "+" у законі дисперсії (7). Підставмо (6) в рівняння (5) при $n = 2$. Відсутність секулярних членів у розв'язку $\phi^{(2)}$ (відсутність першої гармоніки у правій частині рівняння) забезпечується умовою

$$A_{t_1} = -\omega^{(1)}A_\xi, \quad \omega^{(n)} = \frac{\partial^n \omega}{\partial k^n}; \tag{8}$$

$\omega^{(1)}$ — групова швидкість. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння

$$\phi^{(2)} = b_0^{(2)}|A|^2 + b_2^{(2)}(A^2\exp^{2i\theta} + k.c.),$$
$$b_0^{(2)} = -\frac{2\alpha_2}{\alpha_1}, \quad b_2^{(2)} = \frac{\alpha_2}{3\alpha_1}. \tag{9}$$

Цей розв'язок відповідає ґенерації нульової і другої гармонік на нелінійності при поширенні плоскої хвилі (6).

При $n = 3$ відповідно маємо умову відсутности першої гармоніки в правій частині (5)

$$iA_{t_2} = -\frac{1}{2\omega}(A_{t_1t_1} - c^2A_{\xi\xi}) - q_3|A|^2A,$$
$$q_3 = \frac{1}{2\omega}\left(3\alpha_3 - \frac{10}{3}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1}\right) \tag{10}$$

і частинний розв'язок неоднорідного рівняння для $\phi^{(3)}$

$$\phi^{(3)} = b_3^{(3)}A^3\exp 3i\theta + k.c., \quad b_3^{(3)} = \frac{\alpha_2^2}{12\alpha_1^2} + \frac{\alpha_3}{8\alpha_1}. \tag{11}$$

Продовжуючи процедуру для $n = 4, 5, \ldots$, кожного разу знаходимо наступне наближення $\phi^{(n)}$ як суму гармонік до n включно, а з умови відсутности секулярности в розв'язку $\phi^{(n)}$ — значення похідної A_{t_n} через значення попередніх похідних $A_{t_{n-1}}, \ldots, A_{t_1}$.

Обмежуючись значенням $n = 5$, асимптотичний розклад розв'язку (2) зобразимо як обрізаний ряд Фур'є

$$\phi = \epsilon^2\phi_0(\tau,\xi) + \sum_{n=1}^{5}(\epsilon^n\phi_n(\tau,\xi)\exp(in\theta) + k.c.), \tag{12}$$

де

$$\phi_0 = b_0^{(2)}|A|^2 + \epsilon^2(b_0^{(4)}|A|^4 - \frac{2\alpha_2}{\alpha_1^2}\omega\omega^{(2)}\frac{\partial|A|^2}{\partial\xi}),$$
$$\phi_1 = A(\xi,\tau),$$
$$\phi_2 = b_2^{(2)}A^2 + \epsilon^2[b_2^{(4)}|A|^2A^2$$
$$-\frac{2\alpha_2}{9\alpha_1^2}\omega\omega^{(2)}(3AA_{\xi\xi} + A_\xi^2)], \tag{13}$$
$$\phi_3 = b_3^{(3)}A^3 + \epsilon^2[b_3^{(5)}|A|^2A^3$$

$$+\frac{3\omega\omega^{(2)}}{32\alpha_1^2}(\alpha_- A^2 A_{\xi\xi} - \alpha_+ A A_\xi^2)],$$

$$\phi_4 = b_4^{(4)} A^4, \quad \phi_5 = b_5^{(5)} A^5,$$

$$\alpha_- = \alpha_3 - \frac{5\alpha_2^2}{4\alpha_1}, \alpha_+ = \alpha_3 + \frac{34\alpha_2^2}{27\alpha_1},$$

$$b_4^{(4)} = \frac{\alpha_2^3}{54\alpha_1^3} + \frac{\alpha_2\alpha_3}{60\alpha_1^2} + \frac{\alpha_4}{15\alpha_1},$$

$$b_5^{(5)} = \frac{5\alpha_2^4}{1296\alpha_1^4} + \frac{5\alpha_2^2\alpha_3}{144\alpha_1^3} + \frac{11\alpha_2\alpha_4}{180\alpha_1^2} + \frac{\alpha_3^2}{64\alpha_1^2} + \frac{\alpha_5}{24\alpha_1},$$

$$b_3^{(5)} = \frac{237\alpha_2^4}{432\alpha_1^4} - \frac{61\alpha_2^2\alpha_3}{\alpha_1^3} - \frac{3\alpha_2\alpha_4}{20\alpha_1^2} - \frac{21\alpha_3^2}{64\alpha_1^2} + \frac{5\alpha_5}{8\alpha_1},$$

$$b_0^{(4)} = -\frac{38\alpha_2^3}{9\alpha_1 3} + \frac{10\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1^2} - \frac{6\alpha_4}{\alpha_1},$$

$$b_2^{(4)} = \frac{59\alpha_2^3}{54\alpha_1^3} - \frac{31\alpha_2\alpha_3}{12\alpha_1^2} + \frac{4\alpha_4}{3\alpha_1}.$$

Залежність амплітуд гармонік розв'язку (12–13) від повільних змінних τ, ξ є неявною: $\phi_n = \phi_n(A, A^*, A_\xi, \ldots)$. Еволюційне рівняння для комплексної обвідної $A(\xi, \tau)$ установлюємо шляхом обчислення похідної A_τ як суми всіх похідних A_{t_n}, знайдених з умов несекулярности розв'язку (8), (10) і т.д.

$$i(A_\tau + \omega^{(1)} A_\xi) + \epsilon\left(-\frac{\omega^{(2)}}{2!}A_{\xi\xi} + q_3|A|^2 A\right)$$
$$-i\epsilon^2\left(\frac{\omega^{(3)}}{3!}A_{\xi\xi\xi} + \frac{\omega^{(1)}q_3}{\omega}(|A|^2 A)_\xi\right)$$
$$+\epsilon^3\left(\frac{\omega^{(4)}}{4!}A_{\xi\xi\xi\xi} + b_{200}A^2 A^*_{\xi\xi} + b_{220}|A|^2 A_{\xi\xi}\right.$$
$$\left. + b_{210}A|A_\xi|^2 + b_{221}A^*(A_\xi)^2 + q_5|A|^4 A\right) = 0, \qquad (14)$$

де $\omega^{(n)}$, q_3 визначені у формулах (8), (10) і, крім того,

$$q_5 = \frac{1}{2\omega}\left(-\frac{\alpha_2^4}{\alpha_1^3}\left(\frac{335}{54} + \frac{25}{9}\frac{\alpha_1}{\omega^2}\right) + \frac{\alpha_2^2\alpha_3}{\alpha_1^2}\left(\frac{157}{6} + \frac{5\alpha_1}{\omega^2}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{3\alpha_3^2}{8\alpha_1}\left(1 - \frac{6\alpha_1}{\omega^2}\right) - \frac{84}{3}\frac{\alpha_2\alpha_4}{\alpha_1} + 10\alpha_5\right), \qquad (15)$$

$$b_{200} = -\left(\frac{{\omega^{(1)}}^2}{\omega^2}q_3 + \frac{2\alpha_2^2}{\alpha_1^2}\omega^{(2)}\right),$$

$$b_{220} = \frac{-2{\omega^{(1)}}^2 + \omega\omega^{(2)}}{\omega^2}q_3 - \frac{16\alpha_2^2}{9\alpha_1^2}\omega^{(2)},$$

$$b_{210} = \frac{\omega\omega^{(2)} - 4{\omega^{(1)}}^2}{\omega^2}q_3 - \frac{4\alpha_2^2}{\alpha_1^2}\omega^{(2)},$$

$$b_{221} = \frac{\omega\omega^{(2)} - 4{\omega^{(1)}}^2}{2\omega^2}q_3 - \frac{2\alpha_2^2}{9\alpha_1^2}\omega^{(2)}.$$

Параметр розкладу ϵ формальним, тому у формулах (12–14) можна покласти $\epsilon = 1$.

Таким чином, еволюція спектрально вузького хвильового пакета в слабконелінійному наближенні з точністю ϵ^5 при початковій умові (1a) може бути описана, замість рівняння (1), простішим рівнянням (14). Процедуру редукції легко узагальнити для системи нелінійних диференціяльних рівнянь. Граничний випадок нелінійного осцилятора ($c = 0$) переводить рівняння (1) в узагальнене рівняння Дюффінґа. Еволюція комплексної амплітуди (14) визначається при цьому тільки нелінійними членами з коефіцієнтами q_3, q_5, які були незалежно обчислені в [15].

Було також показано, що для рівняння Кляйна–Ґордона (1) з кубічною нелінійністю ($\alpha_2 = 0, \alpha_4 = 0, \alpha_5 = 0$) розклад точного розв'язку у вигляді еліптичної функції при початковій умові (1a) в заданому порядку за параметром ϵ точно збігається з розкладом (12), отриманим методом багатьох масштабів. Видно, що при врахуванні тільки членів порядку ϵ^3 рівняння (14) переходить у класичне НРШ [6, 7], тоді як вищі порядки описують явища нелінійної дисперсії. Крім того, при деяких співвідношеннях між коефіцієнтами α_p відбувається якісна зміна характеру еволюції комплексної обвідної. Зокрема, при $q_3 = 3\alpha_3 - \frac{10\alpha_2^2}{3\alpha_1} = 0$ особливості еволюції визначаються тільки балансом лінійних і нелінійних дисперсійних членів.

Ця робота була частково підтримана ґрантом INTAS N99–1637.

[1] Ю. А. Митропольский, *Нелинейная механика. Одночастотные колебания.* (Ин-т математики НАН Украины, Киев, 1997).

[2] В. Е. Захаров, Прикладная механика и техническая физика № **2**, 86 (1968).

[3] А. Г. Литвак, В. И. Таланов, Изв. вузов, радиофизика **10**, 539 (1967).

[4] В. П. Лукомский, Журн. эксп. теор. физ. **108**, вып. 2(8), 567 (1995).

[5] T. Kawahara, J. Phys. Soc. Jpn **35**, 1537 (1973).

[6] Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис, *Солитоны и нелинейные волновые уравнения* (Мир, Москва, 1972).

[7] H. C. Yuen , B. M. Lake, Phys. Fluids **18**, 956 (1975).

[8] Y. Kodama , A. Hasegawa, IEEE J. Quantum Electron. **23**, No. 5, 510 (1987).

[9] Z. Li, L. Li, H. Tian, G. Zhou, Phys. Rev. Lett. **84**, No. 18, 4096 (2000).
[10] K. Trulsen, K. Dysthe, J. Fluid Mech. **352**, 359 (1997).
[11] K. Trulsen, I. Kliakhandler, K. Dysthe, M. Velarde, Phys. Fluids, **12**, No. 10, 2432 (2000).
[12] F. Dias, C. Kharif, Annual Rev. Mech. **31**, 301 (1999).
[13] P. Christodoulides, F. Dias, Phys. Fluids **7**, No. 12, 3013 (1995).
[14] H. Doebner, G. Goldin, P. Nattermann, J. Math. Phys. **40**, 49 (1999).
[15] V. P. Lukomsky, V. B. Bobkov, Nonl. dynamics **16**, 1 (1998).

ON THE THEORY OF THE NONLINEAR DISPERSION OF WAVE PACKETS IN THE MULTIPLE SCALES METHOD

V. P. Lukomskii, Yu. V. Sedletskii
Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine
46 Nauky Pr., Kyiv, UA–03039, Ukraine

The time evolution of spectrally narrow wavetrain that is described by the nonlinear Klein–Gordon equation is investigated in weakly nonlinear medium. The asymptotic expansion of a solution is built by the method of multiple scales up to ϵ^5 inclusive. This expansion is defined by a complex function that has the sense of the first harmonic of a solution which satisfies the nonlinear evolutionary Schrödinger equation of a higher order.