ЖУРНАЛ ФІЗИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ
т. 6, № 2 (2002) с. 147–152

JOURNAL OF PHYSICAL STUDIES
v. 6, No. 2 (2002) p. 147–152

КВАЗІТОЧНО РОЗВ'ЯЗУВАНЕ РІВНЯННЯ ПАУЛІ

В. М. Ткачук, С. І. Вакарчук
Львівський національний університет імені Івана Франка,
кафедра теоретичної фізики,
вул. Драгоманова, 12, Львів, 79005, Україна
(Отримано 23 січня 2002 р.; в остаточному вигляді — 2 квітня 2002 р.)

Розглянуто рух електрона в площині, перпендикулярній до аксіяльно-симетричного магнетного поля. З використанням методу суперсиметрії знайдено квазіточно розв'язуване магнетне поле з явно відомими хвильовими функціями для нульового та одного збудженого енерґетичного рівнів.

Ключові слова: суперсиметрія, квазіточно розв'язувані задачі, магнетне поле.

PACS number(s): 03.65.–w, 11.30.Pb

I. ВСТУП

З перших років після виникнення квантової механіки існує постійний інтерес до відшукування точних розв'язків стаціонарного рівняння Шредінґера, зокрема до знаходження точних власних значень і власних функцій електрона в магнетних полях. Добре відомо, що точні розв'язки є скоріше винятком, ніж правилом. Як приклад точно розв'язуваної проблеми можна згадати задачу про рух електрона в постійному магнетному полі. Пізніше були знайдені електромагнетні поля спеціяльних конфігурацій, при русі електрона в яких стаціонарне рівняння Паулі може бути розв'язане точно [1]. Проте пошук нових точно розв'язуваних систем постійно привертає до себе увагу.

Понад двадцять років тому був відкритий новий клас систем — так звані квазіточно розв'язувані (КТР) системи, для яких обмежене число власних станів можна знайти точно. Перші приклади квазіточно розв'язуваних потенціялів наведені в [2–5]. Пізніше були запропоновані різні методи для ґенерування квазіточно розв'язуваних потенціялів, і як результат було відкрито багато квазіточно розв'язуваних систем [6–14]. Однією з таких задач є задача про двовимірний рух електрона в кулонівському полі та однорідному магнетному полі [15,16]. Двовимірні та багатовимірні КТР моделі з неоднорідним магнетним полем досліджували в [17] в межах групового підходу. У недавній праці [18] вивчено нелінійну n-суперсиметрію для зарядженої спін-1/2 частинки в зовнішньому двовимірному магнетному полі та показано її зв'язок з КТР проблемами.

У цій статті ми розглянемо двовимірне рівняння Паулі з неоднорідним магнетним полем. Добре відомо, що в цьому випадку реалізується суперсиметрія із двома суперзарядами. Оскільки наша праця ґрунтується на суперсиметричній квантовій механіці [21], ми зосередимось на огляді саме суперсиметричного методу для побудови квазіточно розв'язуваних потенціялів. Ідея методу суперсиметрії, запропонованого в [14,19,20], така: стартуючи з квазіточно розв'язуваного потенціялу з $n+1$ відомими власними станами і використовуючи властивості точної суперсиметрії, можна отримати суперсиметричного партнера, який є новим КТР потенціялом з n відомими власними станами.

У недавніх працях [22–24] ми запропонували новий суперсиметричний метод для ґенерування КТР потенціялів з двома відомими власними станами і одержали загальні вирази для суперпотенціялу, потенціяльної енерґії та хвильвих функцій двох енерґетичних рівнів. Зауважимо, що в працях [26,27] був отриманий загальний вираз для КТР потенціялів без використання суперсиметричної квантової механіки. Новим у статті [27] було те, що її автори показали, як отримати КТР потенціяли з довільними двома рівнями. Метод, запропонований у [27], є прямішим і простішим, ніж суперсиметричний підхід. Однак останній має свої переваги в тому, що містить більше можливостей. Так, він може бути узагальнений для побудови КТР потенціялів з трьома відомими власними станами [25] та умовно точно розв'язуваних потенціялів [23].

Метою цієї статті є поширити суперсиметричний метод для побудови КТР задач для рівняння Паулі, який ми запропонували. Зауважимо, що оскільки гамільтоніян Паулі за своєю природою володіє суперсиметрією, тому природним є застосування саме суперсиметричного підходу для знаходження КТР магнетних полів. У цій праці ми розглянемо аксіяльно-симетричні магнетні поля.

II. СУПЕРСИМЕТРІЯ ЕЛЕКТРОНА В АКСІЯЛЬНО-СИМЕТРИЧНОМУ МАГНЕТНОМУ ПОЛІ

Добре відомо, що при русі електрона у двовимірному магнетному полі $B_x = B_y = 0$, $B_z = B(x, y)$ реалізується суперсиметрія з двома суперзарядами $N = 2$ [28]. Гамільтоніян Паулі у цьому випадку можна записати в такій суперсиметичній формі:

$$H = \frac{1}{2}(\pi_x^2 + \pi_y^2 - eB\sigma_z) = \{Q_+, Q_-\}, \tag{1}$$

де

$$\pi_\alpha = p_\alpha - eA_\alpha, \quad p_\alpha = -i\partial/\partial x_\alpha, \quad A_\alpha = A_\alpha(x,y)$$

є компонентами векторного потенціялу. Магнетне поле

$$B = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \tag{2}$$

є перпендикулярним до площини руху електрона x–y. Суперзаряди мають вигляд

$$Q_+ = \pi_-\sigma_+, \quad Q_- = \pi_+\sigma_-, \tag{3}$$

де

$$\sigma_\pm = (\sigma_x \pm i\sigma_y)/2, \qquad \pi_\pm = (\pi_x \pm \pi_y)/\sqrt{2}.$$

Гамільтоніян перепишемо у такому вигляді:

$$H = \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix}, \tag{4}$$

де $H_+ = \pi_-\pi_+$, $H_- = \pi_+\pi_-$ називаються суперсиметричними партнерами і мають факторизований вигляд. Саме факторизація дає нам змогу побудувати квазіточно розв'язувані магнетні поля.

У цій статті ми розглянемо векторний потенціял

$$A_x = -\frac{y}{\rho}A(\rho), \quad A_y = \frac{x}{\rho}A(\rho), \tag{5}$$

який відповідає аксіяльно-симетричному магнетному полю

$$B(\rho) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A(\rho)), \tag{6}$$

де

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Ми вивчатимемо рівняння на власні функції та власні значення гамільтоніяна Паулі

$$H\psi = E\psi. \tag{7}$$

Завдяки аксіяльній симетрії зручно переписати оператори $\pi_\pm$ в полярних координатах

$$\pi_\pm = -\frac{i}{\sqrt{2}}e^{\pm i\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\rho} \pm \left(\frac{i}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} - eA(\rho)\right)\right]. \tag{8}$$

Хвильову функцію шукаємо у вигляді

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\begin{pmatrix} e^{i(m-1)\varphi} & R^+ \\ e^{im\varphi} & R^- \end{pmatrix}, \tag{9}$$

яка є також власною функцією повного моменту кількости руху оператора $J_z = L_z + S_z$

$$J_z\psi = (m-1/2)\psi. \tag{10}$$

Радіяльна частина хвильової функції $R_\pm(\rho)$ задовольняє рівняння

$$H_\pm(\rho)R^\pm(\rho) = ER^\pm(\rho). \tag{11}$$

Радіяльна частина суперсиметричних партнерів має факторизований вигляд

$$H_-(\rho) = B^+B^-, \tag{12}$$

$$H_+(\rho) = B^-B^+ \tag{13}$$

зі стандартними для одновимірної суперсиметричної квантової механіки операторами

$$B^- = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\partial}{\partial\rho} + W\right], \tag{14}$$

$$B^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\frac{\partial}{\partial\rho} + W\right], \tag{15}$$

де

$$W = \frac{m-1/2}{\rho} - eA \tag{16}$$

є суперпотенціялом. Зауважимо, що власна функція R^- гамільтоніяна H_- описує рух електрона зі спіном $s_z = -1/2$ та орбітальним моментом $L_z = m$, власна функція R^+ гамільтоніяна H_+ описує рух електрона зі спіном $s_z = 1/2$ та орбітальним моментом $L_z = m-1$.

Із (11)–(13) випливають такі зв'язки між хвильовими функціями суперсиметричних партнерів, які називаються суперсиметричними перетвореннями:

$$R_E^+ = \frac{1}{\sqrt{2E}}B^-R_E^-, \tag{17}$$

$$R_E^- = \frac{1}{\sqrt{2E}}B^+R_E^+. \tag{18}$$

Зауважимо, що радіяльне рівняння (11) можемо трактувати як рівняння для одновимірного руху частинки на півосі $0 \le \rho < \infty$. З умови скінчености $\psi^\pm$ при $\rho \to 0$ знаходимо граничну умову для радіяльної частини хвильової функції, а саме: $R^\pm$ повинна прямувати до нуля при $\rho \to 0$ як $\sqrt{\rho}$ або швидше.

III. ВЛАСНИЙ СТАН З НУЛЬОВОЮ ЕНЕРҐІЄЮ

Розгляньмо рівняння на власні функції з нульовою енерґією для гамільтоніяна H_-. У результаті факторизації H_- його власні функції з нульовою енерґією задовольняють диференціяльне рівняння першого порядку

$$B^- R_0^- = 0, \tag{19}$$

яке в явній формі має вигляд

$$\left(\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{m-1/2}{\rho} + |e|A\right) R_0^- = 0. \tag{20}$$

Розв'язком цього рівняння є радіяльна частина хвильової функції

$$R_0^- = c\rho^{-(m-1/2)} e^{-|e|\int A(\rho)\,d\rho}, \tag{21}$$

тут і далі c є константою нормування. Повну хвильову функцію з нульовою енерґією запишемо як

$$\psi_0^- = c e^{im\varphi} \rho^{-m} e^{-|e|\int A(\rho)\,d\rho}, \tag{22}$$

де з умови несинґулярности хвильової функції при $\rho \to 0$ випливає $m < 0$. Із (22) бачимо також, що необхідною умовою прямування ψ_0^- до нуля при $\rho \to \infty$ є $\operatorname{sign} A(\rho) > 0$.

Для детального аналізу квадратичної інтеґровности цієї функції зручно виразити векторний потенціял через магнетний потік, що пронизує площину руху електрона xy. Із (6) отримуємо

$$A(\rho) = \frac{\Phi(\rho)}{2\pi\rho}, \tag{23}$$

де

$$\Phi(\rho) = 2\pi \int_0^\rho \rho B(\rho)\,d\rho \tag{24}$$

є магнетним потоком через круг радіусом ρ. Зауважимо, що в цій статті ми розглядаємо несинґулярні векторні потенціяли, для яких існує границя $\lim_{\rho\to 0} A(\rho) = A(0)$. Це означає, що магнетний потік $\Phi(\rho)$ при $\rho \to 0$ прямує до нуля у такий спосіб: $\Phi(\rho) = 2\pi A(0)\rho$.

За допомогою (23) хвильову функцію запишемо як

$$\psi_0^- = c\rho^{-m} e^{im\varphi} e^{-\frac{1}{\Phi_0}\int_0^\rho \frac{1}{\rho}\Phi(\rho)\,d\rho}, \tag{25}$$

де $\Phi_0 = \frac{2\pi}{|e|}$ — квант магнетного потоку.

Нехай магнетне поле зосереджено біля початку координат і повний потік через площину xy магнетного поля є $\Phi = \lim_{\rho\to\infty} \Phi(\rho)$. Тоді поведінка хвильової функції при $\rho \to \infty$ є такою:

$$\psi_0^- = c\rho^{-m-\Phi/\Phi_0} e^{im\varphi}, \quad \rho \to \infty. \tag{26}$$

З умови квадратичної інтеґровности ми отримуємо $-m < \Phi/\Phi_0 - 1$. Разом з умовою на m, що випливає з несинґулярности хвильової функції при $\rho \to 0$, ми маємо таку ділянку зміни m:

$$0 \le -m < \Phi/\Phi_0 - 1. \tag{27}$$

Таким чином, нульовий енерґетичний рівень є виродженим щодо магнетного квантового числа m. Із (27) випливає, що кратність виродження дорівнює $\Phi/\Phi_0 - 1$, коли Φ/Φ_0 є цілим числом, і $[\Phi/\Phi_0]$, коли Φ/Φ_0 — не ціле число. Тут квадратні дужки означають цілу частину числа. Результат про виродженість нульової енерґії при русі електрона в довільному неоднорідному полі отримали Аронов і Кашер [29]. Відзначимо також роботи [30,31], де досліджувались нульові моди для компактних та некомпактних поверхонь та знайдена кратність виродження суперсиметричного основного стану.

Ми розглянули рух електрона зі спіном $S_z = -1/2$. У цьому випадку стани з нульовою енерґією існують для додатного магнетного потоку $\Phi > 0$. Стани з нульовою енерґією для $S_z = 1/2$ існують, коли магнетний потік від'ємний ($\Phi < 0$). Зауважимо, що коли магнетний потік Φ скінчений, тоді наявні зв'язані стани тільки з нульовою енерґією. Для існування зв'язаних станів з ненульовою енерґією магнетний потік повинен бути нескінченим. Цей випадок ми розглянемо в наступному параграфі і побудуємо квазіточно розв'язувані магнетні поля з точно відомими хвильовими функціями нульового та одного збудженого рівнів.

IV. КВАЗІТОЧНО РОЗВ'ЯЗУВАНІ РІВНЯННЯ ПАУЛІ З ДВОМА ВІДОМИМИ СТАНАМИ

Для побудови квазіточно розв'язуваних магнетних полів ми застосуємо суперсиметричний метод, запропонований у [22]. Розгляньмо гамільтоніян $H_-(\rho) = B^+B^-$. Хвильові функції основного стану з нульовою енерґією ми дослідили в попередньому параграфі. Для того, щоб отримати хвильову функцію з ненульовою енерґією при $\Phi \to \infty$, ми застосуємо добре відому процедуру, яка використовується в межах суперсиметричної квантової механіки. Розгляньмо суперсиметричного партнера до $H_-(\rho)$, тобто $H_+(\rho) = B^-B^+$. Нехай гамільтоніян $H_+(\rho)$ має основний стан R_ε^+ з ненульовою енерґією ε. Якщо ми знайдемо основний стан R_ε^+, то відразу знайдемо збуджений стан гамільтоніяна $H_-(\rho)$ з енерґією ε, використовуючи суперсиметричні перетворення (17) і (18).

Для того, щоб одержати основний стан H_+, перепишімо гамільтоніян так:

$$H_+(\rho) = H_-^{(1)}(\rho) + \varepsilon, \tag{28}$$

де $H_-^{(1)}(\rho)$ визначений так само, як $H_-(\rho)$ з новим суперпотенціялом

$$W_1 = \frac{m_1 - 1/2}{\rho} + |e|A_1(\rho). \tag{29}$$

Запишімо рівняння (28) у явній формі

$$W^2 + W' = W_1^2 - W_1' + 2\varepsilon. \tag{30}$$

Це є рівняння Рікатті як стосовно W, так і W_1. Тому знайти розв'язок цього рівняння щодо W при фіксованому W_1 чи навпаки є неможливим. Спробуємо знайти таку пару W і W_1, яка задовольняє (30). Для цього означимо

$$W_+ = W_1 + W, \tag{31}$$

$$W_- = W_1 - W \tag{32}$$

і зведемо це рівняння до такого вигляду:

$$W_+' = W_+W_- + 2\varepsilon. \tag{33}$$

Це рівняння можна розв'язати як стосовно W_+, так щодо W_-. Скористаймось розв'язком для W_- [22]

$$W_- = \frac{W_+' - 2\varepsilon}{W_+}. \tag{34}$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (30) запишемо так:

$$W = \frac{1}{2}\left(W_+ - \frac{W_+' - 2\varepsilon}{W_+}\right), \tag{35}$$

$$W_1 = \frac{1}{2}\left(W_+ + \frac{W_+' - 2\varepsilon}{W_+}\right), \tag{36}$$

де W_+ є довільна функція, яку будемо називати ґенеруючою. Вибираючи різні ґенеруючі функції W_+, ми отримуємо різні суперпотенціяли W і W_1. Знаючи W, знаходимо векторний потенціял

$$|e|A = W(\rho) - \frac{m - 1/2}{\rho}, \tag{37}$$

для якого знаємо два зв'язані стани електрона. Стан електрона з нульовою енерґією задається формулою (22). Стан електрона з енерґією ε, спіном $S_z = 1/2$, орбітальним моментом $L_z = m - 1$ визначаємо хвильовою функцією, радіяльна частина якої має вигляд:

$$R_\varepsilon^+ = ce^{-\int W_1\, d\rho}. \tag{38}$$

Стан електрона з енерґією ε, спіном $S_z = -1/2$, орбітальним моментом $L_z = m$ визначаємо хвильовою функцією, радіяльну частину якої знаходимо із суперсиметричних перетворень (17), (18)

$$R_\varepsilon^- = cW_+e^{-\int W_1\, d\rho}. \tag{39}$$

Зауважимо, що хоч (35) і (36) із довільною функцією W_+ задовольняють рівняння (30), проте з умови несинґулярности векторного потенціялу та квадратичної інтеґровности хвильової функції існують певні обмеження на ґенеруючу функцію W_+. У [22] ми знайшли W_+, які приводять до несинґулярних потенціялів та квадратично інтеґровних хвильових функцій для одновимірної квантової механіки. У нашому випадку радіяльне рівняння (11) можна трактувати як рівняння для одновимірного руху частинки на півосі. Тому результати, отримані в [22] стосовно поведінки W_+, справедливі і для всіх ρ, крім $\rho \to 0$.

Розгляньмо випадок, коли W_+ має один нуль у точці $\rho = a$ і поводиться в околі цієї точки так: $W_+ = W_+'(a)(\rho - a)$. Тоді при довільному ε функція W_-, а значить, і суперпотенціяли W і W_1, будуть мати полюс у точці $\rho = a$. Цей полюс можна усунути, вибравши $2\varepsilon = W_+'(a)$. Таким чином, тут суперпотенціял $W(\rho)$, а отже, і векторний потенціял (37), є несинґулярною функцією у всіх точках, крім $\rho = 0$.

Розгляньмо тепер асимптотику векторного потенціялу при $\rho \to 0$. Нехай W_+ при $\rho \to 0$ поводиться так:

$$W_+ = \frac{g}{\rho} + f(\rho), \tag{40}$$

де $f(\rho)$ деяка несинґулярна функція. Тоді

$$W = \frac{1}{2}\left\{\frac{g+1}{\rho} + f + \frac{f + \rho(f' - 2\varepsilon)}{g + f\rho}\right\}. \tag{41}$$

Підставляючи (41) у (37), знаходимо, що при $g = 2(m-1)$ векторний потенціял є несинґулярною функцією і має вигляд

$$|e|A(\rho) = \frac{1}{2}\left\{f + \frac{f + \rho(f' - 2\varepsilon)}{g + f\rho}\right\}. \tag{42}$$

Якщо $f(0) \neq 0$, то $|e|A(0) \neq 0$. Тоді магнетне поле (6), яке відповідає цьому векторному потенціялові, при $\rho \to 0$ буде мати синґулярність $1/\rho$. Це синґулярність кулонівського типу. Тому рух електрона в її околі є стійким. Зауважимо також, що цієї синґулярности в магнетному полі можна уникнути, якщо вибрати $f(\rho)$ таку, що $f(0) = 0$ і $f(\rho) = f'(0)\rho$ при $\rho \to 0$. Тоді магнетне поле виходить на константу при $\rho \to 0$.

На завершення розгляньмо явний приклад квазіточно розв'язуваного магнетного поля. Вибираючи різні ґенеруючі функції $W_+(\rho)$, отримаємо різні квазіточно розв'язувані магнетні поля. Звичайно, існують такі W_+, які приводять до точно розв'язуваних задач. Так, $W_+ = \gamma(\rho^2 - a^2)/\rho$ ґенерує однорідне магнетне поле, і задача на власні функції та власні значення гамільтоніяна Паулі розв'язується точно. Функція $W_+ = \gamma/\rho + \beta$ також приводить до точно розв'язуваної задачі з магнетним полем, обернено пропорційним до ρ.

Розгляньмо ґенеруючу функцію

$$W_+ = \frac{\gamma}{\rho}\frac{\rho^2 - a^2}{\beta\rho + 1}, \tag{43}$$

яка при $\beta = 0$ дає постійне магнетне поле, а при $\beta = 1/a$ — магнетне поле, обернено пропорційне до ρ. Для

$$\varepsilon = \frac{W'(a)}{2} = \frac{\gamma}{\beta a + 1} \tag{44}$$

ґенеруюча функція (43) приводить до таких суперпотенціялів:

$$W = \frac{-\gamma a^2 + 1}{2\rho} + \frac{1}{2}\left(\gamma\beta a^2 - \frac{\gamma}{\beta} + \beta\right)\frac{1}{\beta\rho + 1} - \frac{\beta a}{\beta a + 1}\frac{1}{\rho + a} + \frac{1}{2}\frac{\gamma}{\beta} + \frac{\beta}{\beta a + 1}, \tag{45}$$

$$W_1 = -\frac{\gamma a^2 + 1}{2\rho} + \frac{1}{2}\left(\gamma\beta a^2 - \frac{\gamma}{\beta} - \beta\right)\frac{1}{\beta\rho + 1} + \frac{\beta a}{\beta a + 1}\frac{1}{\rho + a} + \frac{1}{2}\frac{\gamma}{\beta} - \frac{\beta}{\beta a + 1}. \tag{46}$$

Наклавши на параметри суперпотенціялу умови

$$\gamma a^2 = 2(-m + 1), \tag{47}$$

отримуємо несинґулярний векторний потенціял

$$|e|A = \frac{1}{2}\left(\gamma\beta a^2 - \frac{\gamma}{\beta} + \beta\right)\frac{1}{\beta\rho + 1} - \frac{\beta a}{\beta a + 1}\frac{1}{\rho + a} + \frac{1}{2}\frac{\gamma}{\beta} + \frac{\beta}{\beta a + 1}, \tag{48}$$

якому відповідає магнетне поле

$$|e|B = \frac{\beta(1 + a^2)}{2}\frac{1}{\rho} + \frac{\beta}{(1 + a\beta)}\left(\frac{a}{(a + \rho)^2} + \frac{1}{a + \rho}\right) + \frac{1}{2}(\gamma - \beta^2 - \gamma\beta^2 a^2)\left(\frac{1}{(1 + \beta\rho)^2} + \frac{1}{1 + \beta\rho}\right). \tag{49}$$

Потік цього магнетного поля через xy площину руху електрона є нескінченим. Зауважимо, що параметри магнетного поля визначаються через фіксований орбітальний магнетний момент m. Проте, зафіксувавши параметри магнетного поля, ми знайдемо за допомогою (21) всі хвильові функції основного стану з нульовою енерґією для довільного орбітального моменту $L_z = m'$ та спіном $S_z = -1/2$

$$R_0^- = c\rho^{-m'+1/2}(\beta\rho + 1)^{-(\gamma a^2 - \gamma/\beta^2 + 1)/2}(\rho + a)^{\beta a/(\beta a + 1)}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\beta} + \frac{2\beta}{\beta a + 1}\right)\rho\right], \tag{50}$$

де $-m' = 0, 1, 2, \ldots$. Збуджений стан з енерґією ε є двократно вироджений, йому відповідають дві хвильові функції з орбітальним моментом $L_z = m - 1$ і $S_z = 1/2$

$$R_\varepsilon^+ = c\rho^{-m+1/2}(\beta\rho + 1)^{-(\gamma a^2 - \gamma/\beta^2 - 1)/2}(\rho + a)^{-\beta a/(\beta a + 1)}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\beta} - \frac{2\beta}{\beta a + 1}\right)\rho\right] \tag{51}$$

та орбітальним моментом $L_z = m$ і $S_z = -1/2$

$$R_\varepsilon^- = c\rho^{-m+1/2}(\beta\rho + 1)^{-(\gamma a^2 - \gamma/\beta^2 + 1)/2}(\rho + a)^{1/(\beta a + 1)}(\rho - a)\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\beta} - \frac{2\beta}{\beta a + 1}\right)\rho\right]. \tag{52}$$

Зазначимо, що збуджений стан є точно відомим тільки для фіксованого повного моменту кількости руху $J_z = m - 1/2$. Цікаво зауважити, що при

$$\frac{2\beta^2}{\beta a + 1} > \gamma = \frac{2}{a^2}(-m + 1) \tag{53}$$

R_ε^+ і R_ε^- розбігаються при $\rho \to \infty$, не є квадратично інтеґровними і не належать до власних станів. Таким чином, при умові (53) збуджений стан з енерґією ε відсутнім.

V. ВИСНОВКИ

У цій статті ми розвинули суперсиметричний метод для побудови квазіточно розв'язуваних магнетних полів для двовимірного рівняння Паулі та в явному вигляді знайшли хвильові функції нульового й одного збудженого енерґетичного рівнів. Запропонований метод дає змогу знаходити різноманітні КТР магнетні поля, вибираючи різні ґенеруючі функції.

Зауважимо, що обмеження аксіяльно-симетричними полями дає змогу звести задачу про двовимірний рух електрона до одновимірного радіяльного рівняння. Саме це дозволило застосувати розвинутий раніше для одновимірних систем суперсиметричний метод ґенерування КТР потенціялів до задачі про двовимірний рух електрона в магнетному полі. Знаходження довільних двовимірних неоднорідних КТР магнетних полів є складнішою задачею і буде предметом наступних праць.

[1] В. Г. Багров, Д. М. Гитман, И. М. Тернов, В. Р. Халилов, В. Н. Шаповалов, *Точные решения релятивистских волновых уравнений* (Наука, Новосибирск, 1982).
[2] V. Singh, S. N. Biswas, K. Dutta, Phys. Rev. D **18**, 1901 (1978).
[3] G. P. Flessas, Phys. Lett. A **72**, 289 (1979).
[4] M. Razavy, Am. J. Phys. **48**, 285 (1980); Phys. Lett. A **82**, 7 (1981).
[5] A. Khare, Phys. Lett. A **83**, 237 (1981).
[6] A. V. Turbiner, A. G. Ushveridze, Phys. Lett. A **126**, 181 (1987).
[7] A. V. Turbiner, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **94**, 33 (1988).
[8] A. V. Turbiner, Commun. Math. Phys. **118**, 467 (1988).
[9] M. A. Shifman, Int. J. Mod. Phys. A **4**, 2897 (1989).
[10] A. G. Ushveridze, *Quasi-exactly solvable models in quantum mechanics* (Institute of Physics Publishing, Bristol, 1994).
[11] O. B. Zaslavskii, V. V. Ul'yanov, V. M. Tsukernik, Fiz. Nizk. Temp. **9**, 511 (1983).
[12] O. B. Zaslavsky, V. V. Ulyanov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **87**, 1724 (1984).
[13] V. V. Ulyanov, O. B. Zaslavskii, J. V. Vasilevskaya, Fiz. Nizk. Temp. **23**, 110 (1997).
[14] A. Gangopadhyaya, A. Khare, U. P. Sukhatme, Phys. Lett. A **208**, 261 (1995).
[15] V. M. Villabla, R. Pino, Phys. Lett. A **238**, 49 (1998).
[16] Chun-Ming Chiang, Choon-Lin Ho, Phys. Rev. A **63**, 062105 (2001).
[17] O. D. Zaslavskii, e-print solv-int/9812031 (1998).
[18] S. M. Klishevich, M. S. Plyushchay Nucl. Phys. B **616**, 403 (2001).
[19] D. P. Jatkar, C. Nagaraja Kumar, A. Khare, Phys. Lett. A **142**, 200 (1989).
[20] P. Roy, Y. P. Varshni, Mod. Phys. Lett. A **6**, 1257 (1991).
[21] F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme, Phys. Rep. **251**, 267 (1995).
[22] V. M. Tkachuk, Phys. Lett. A **245**, 177 (1998).
[23] V. M. Tkachuk, J. Phys. A **32**, 1291 (1999).
[24] V. M. Tkachuk, J. Phys. A **34**, 6339 (2001).
[25] T. V. Kuliy, V. M. Tkachuk, J. Phys. A **32**, 2157 (1999).
[26] A. Caticha, Phys. Rev. A **51**, 4264 (1995).
[27] S. N. Dolya, O. V. Zaslavskii, J. Phys. A **34**, 1981 (2001).
[28] L. E. Gendenshteyn, Jadern. Fiz. **41**, 261 (1985).
[29] Y. Aharonov, A. Casher, Phys. Rev. A **19**, 1461 (1978).
[30] Yu. A. Sitenko, Teor. Mat. Fiz. **81**, 369 (1989).
[31] Yu. A. Sitenko, Jadern. Fiz. **51**, 1416 (1990).

QUASI-EXACTLY SOLVABLE PAULI EQUATION

V. M. Tkachuk, S. I. Vakarchuk
Ivan Franko National University of Lviv, Department for Theoretical Physics,
12 Drahomanov Str., Lviv, UA–79005, Ukraine

We consider the motion of the electron in the plane perpendicular to the axially-symmetric magnetic field. Using supersymmetric method the quasi-exactly solvable magnetic field with explicitly known wave functions for zero and one excited energy levels is found.